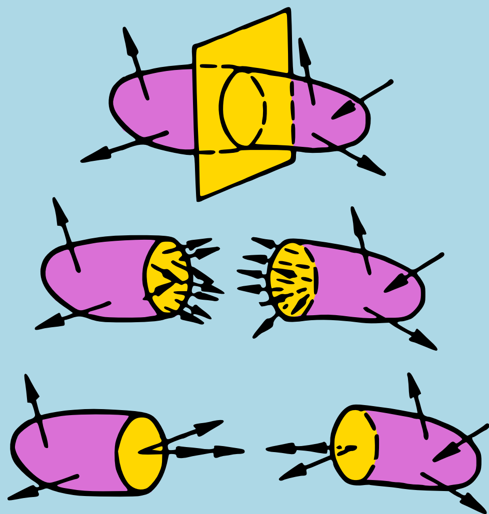
G. Pissarenko, A. Yakovlev
V. Matvéev

AIDE-MÉMOIRE DE RÉSISTANCE DES MATÉRIAUX



Éditions Mir Moscou

Г. С. ПИСАРЕНКО,
А. П. ЯКОВЛЕВ,
В. В. МАТВЕЕВ

СПРАВОЧНИК ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

*Издательство
«Наукова думка»
Киев, 1975*

Aide-mémoire de résistance des matériaux

---

par

G. Pissarenko

A. Yakovlev

V. Matvéev

Editions Mir · Moscou

Traduit du russe par
M. SEGASAYO

На французском языке

Table des matières

Préface

La résistance des matériaux, une des disciplines fondamentales d'ingénieur, joue un rôle de premier plan dans la formation des ingénieurs de presque toutes les spécialités. La résistance des matériaux a une importance particulièrement grande pour les ingénieurs en mécanique, construction des machines et génie civil.

L'introduction dans le programme académique des écoles techniques supérieures de nouvelles disciplines reflétant l'état actuel de la science et de la technique et ce, dans le cadre des délais limités dévolus aux études, a conduit à une réduction sensible du nombre d'heures réservées au cours de résistance des matériaux. Dans une certaine mesure, les élèves des écoles techniques ne peuvent combler les lacunes, inévitables dans de telles conditions, qu'en étudiant d'eux-mêmes, en puisant dans les différents manuels, les chapitres indispensables de ce cours si important pour le futur ingénieur.

En Union Soviétique, les manuels de résistance des matériaux de S. Timoshenko, N. Béliaev, V. Féodossiev, ainsi que d'autres, ont connu plusieurs éditions. Néanmoins, on ressent, tant du côté de la grande légion d'ingénieurs occupés dans la production et dans les bureaux d'études que du côté des élèves et des chercheurs, une grande nécessité d'un aide-mémoire de résistance des matériaux qui refléterait de façon suffisamment complète l'état actuel de la résistance en tant que science. Malheureusement un tel aide-mémoire n'existe ni chez nous ni à l'étranger, et les aide-mémoire de résistance des matériaux et de mécanique des constructions qu'on reoncontre sont fort spécialisés et de ce fait traitent de toute une série de chapitres très importants en partant de différentes approches employées dans l'un ou l'autre manuel de résistance des matériaux. Les auteurs se sont donc assignés pour tâche de mettre sur pied un aide-mémoire de résistance des matériaux qui, tout en étant suffisamment complet et universel, puisse refléter l'état actuel de la résistance en tant que science

et ceci en se basant sur une approche unique dans la présentation du sujet, lequel serait exposé à la lumière d'un cours théorique approprié. Il a été adopté, en qualité de ce dernier, le manuel de G. Pissarenko, V. Agariov, A. Qvitka, V. Popkov, E. Oumansky «Résistance des matériaux», 3-ème édition, Kiev, «Visha Schkola», 1973. Ce livre reflète l'expérience accumulée au cours de nombreuses années d'enseignement de la résistance des matériaux à l'Institut polytechnique de Kiev ainsi que l'expérience tirée de l'utilisation des deux éditions précédentes de ce manuel par les élèves de bon nombre d'écoles supérieures de notre pays.

Dans chaque chapitre, avant de présenter les données de référence sous forme de formules toutes prêtes, de tableaux et de graphiques, on expose brièvement les notions théoriques fondamentales. Dans ce cadre, on formule les hypothèses de départ, les règles appropriées, les théorèmes, et, enfin, on donne les conclusions et recommandations les plus importantes. Pour faciliter l'usage des données de référence, on a présenté, à la page 871, une liste des tableaux que contient le livre.

Nous espérons que le présent aide-mémoire sera utile non seulement aux ingénieurs de toutes les spécialités travaillant dans les bureaux d'études ou occupés dans la production et ayant affaire à des calculs de résistance mais encore, pourra être utilisé avec profit par les étudiants, les boursiers de thèse, les professeurs ainsi que les chercheurs.

Auteurs

CHAPITRE PREMIER

Introduction

§ 1. Résistance des matériaux comme discipline scientifique. Son objet

La *résistance des matériaux* est une science qui traite les méthodes d'ingénieur employées pour le calcul de résistance, de rigidité et de stabilité des éléments de machines et des ouvrages.

On appelle *résistance* la capacité d'une structure, de ses parties et de ses pièces de supporter, sans se détruire, une charge déterminée.

La *rigidité* est la capacité d'une structure et de ses éléments de s'opposer à l'action déformatrice des charges extérieures (modification de la forme et des dimensions). Les déformations ne doivent pas, pour des charges données, dépasser des valeurs déterminées, établies conformément aux exigences requises pour ladite structure.

La *stabilité* est la capacité d'une structure et de ses éléments de conserver une forme initiale donnée, correspondant à l'état d'équilibre élastique.

Pour que les structures répondent, dans l'ensemble, aux exigences requises pour leur solidité, rigidité et stabilité, il faut conférer à leurs éléments la forme la plus rationnelle et déterminer les dimensions correspondantes.

La résistance des matériaux étudie ce genre de problèmes en se basant sur les données aussi bien théoriques qu'expérimentales, les unes et les autres étant d'une importance identique dans cette science.

En ce qui concerne sa partie théorique, la résistance des matériaux se base sur la mécanique rationnelle, tandis que pour sa partie expérimentale, elle se base sur la physique et la technologie des matériaux.

La résistance des matériaux est la science la plus générale qui étudie la solidité des machines et des ouvrages. La création de différents types de machines et mécanismes, ouvrages de génie civil, la construction des ponts, lignes de transport et antennes, hangars, navires, avions et hélicoptères, turbines et machines électriques, groupes des centrales nucléaires, engins et fusées, etc., tout cela est impensable sans une connaissance fondamentale de la résistance des matériaux.

La résistance des matériaux n'épuise pas toutes les questions de la mécanique des solides déformables. Ces problèmes sont étudiés dans des disciplines connexes telles que la mécanique des systèmes de barres, la théorie de l'élasticité et de la plasticité. Cependant, c'est à la résistance des matériaux que revient le rôle principal lorsqu'il s'agit de résoudre des problèmes de solidité.

Malgré toute la diversité des types d'éléments de structure qu'on rencontre dans les ouvrages et dans les machines, ils peuvent tous être ramenés à un nombre relativement restreint de formes principales. Les corps ayant ces formes principales constituent précisément l'objet de calcul de résistance, de rigidité et de stabilité. Il s'agit de *barres*, de *plaques* et *enveloppes*, de *corps massifs*.

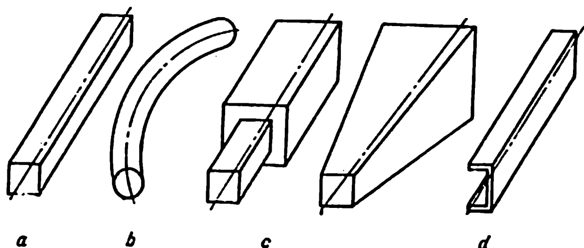


FIG. 1

On appelle *barre* ou *poutre* un corps dont une dimension (la longueur) est beaucoup plus grande que les deux autres (transversales) (fig. 1). Dans la pratique, on rencontre des barres à axe rectiligne (fig. 1,*a*) et à axe curviligne (fig. 1,*b*). Les barres rectilignes tout aussi bien que les barres curvilignes peuvent avoir une section constante (fig. 1, *a*) ou variable (fig. 1, *c*). Traverses, essieux, arbres sont autant d'exemples de barres rectilignes. Les crochets porte-charge, les anneaux de chaînes, etc., peuvent servir d'exemples de barres curvilignes. Les barres de section transversale à profil complexe dont l'épaisseur des parois est beaucoup plus petite que les dimensions hors tout portent le nom de barres à parois minces (fig. 1, *d*).

Une *enveloppe* se présente comme un corps limité par deux surfaces curvilignes disposées à proximité l'une de l'autre, en d'autres termes, comme un corps dont une de ses dimensions (l'épaisseur) est beaucoup plus petite que les deux autres. Le lieu géométrique des points équidistants des deux surfaces de l'enveloppe porte le nom de surface médiane. Selon la configuration de la surface médiane on distingue les enveloppes cylindriques (fig. 2, *a*), coniques (fig. 2, *b*), sphériques (fig. 2, *c*) et autres. C'est aux enveloppes que se rapportent les réservoirs à parois minces,

les chaudières, les coupoles des édifices, les revêtements de fuselages, d'ailes et d'autres parties des appareils volants, les bordés des navires, etc.

Quand la surface médiane d'une enveloppe se présente comme un plan, pareille enveloppe s'appelle *plaque* (fig. 2, *d*). Les plaques peuvent être rondes, rectangulaires et avoir d'autres configurations. L'épaisseur des plaques, comme celle des enveloppes, peut être constante ou variable. Les fonds plats et les dessus des réservoirs (fig. 2, *e*), les planchers des édifices, les roues de machines à aubages, etc., sont tous des plaques.

Un corps est dit *massif* si toutes ses trois dimensions sont du même ordre de grandeur. Il s'agit de fondations des édifices, de murs de soutènement, etc.

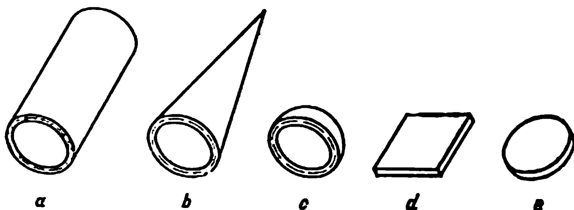


FIG. 2

En résistance des matériaux les problèmes se résolvent en général à l'aide des méthodes mathématiques simples grâce à la mise à profit d'une série d'hypothèses simplificatrices et à l'usage des données expérimentales; avec cela, les solutions sont présentées sous forme de formules de calcul dont l'ingénieur peut se servir directement dans sa pratique. C'est la barre droite qui constitue l'objet principal de la résistance des matériaux.

§ 2. Types de déformations. Notion d'état déformé d'un matériau

Les corps réels sont susceptibles de se déformer, c'est-à-dire de changer leurs forme et dimensions. Les déformations des corps sont le résultat de l'action des forces extérieures ou du changement de température. Lorsqu'un corps se déforme, ses points ainsi que les lignes ou sections tracées mentalement se déplacent dans le plan ou dans l'espace par rapport à leur position initiale.

Dans un corps solide soumis à une sollicitation, apparaissent des forces intérieures d'interaction entre les particules; ces forces opposent une réaction aux forces extérieures et tendent à faire revenir les particules du corps dans la position qu'elles occupaient avant la déformation.

On distingue les *déformations élastiques* qui disparaissent aussitôt que cesse l'action des forces qui étaient à leur origine et les *déformations plastiques* ou *résiduelles* qui persistent après qu'on ait enlevé les charges. Dans la plupart des cas, les valeurs que peuvent atteindre les déformations des éléments d'une structure sont soumises à des limitations déterminées.

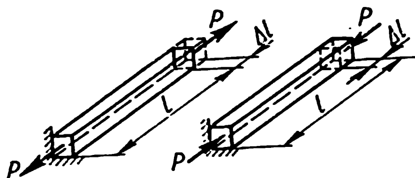


FIG. 3

La résistance des matériaux étudie les types principaux suivants de déformations: *traction* et *compression*, *cisaillement* (ou *glissement*), *torsion*, *flexion*. Elle étudie également des déformations plus compliquées qui s'obtiennent comme résultat de la combinaison de quelques types principaux.

La *traction* ou la *compression* ont lieu, par exemple, dans le cas où des forces opposées sont appliquées le long de l'axe d'une barre (fig. 3). Dans ce cas l'on assiste à un déplacement de translation des sections le long de l'axe de la barre, laquelle s'étire s'il s'agit d'une traction ou raccourcit s'il s'agit d'une compression. La variation de la longueur initiale l de la barre, que l'on désigne par Δl, s'appelle *allongement absolu* (traction) ou *raccourcissement absolu* (compression).

Le rapport entre l'allongement (raccourcissement) absolu Δl et la longueur initiale l s'appelle *allongement (raccourcissement) relatif moyen* le long de l ou *déformation linéaire moyenne relative* du tronçon et se désigne, d'ordinaire, par ε_{moy}:

$$\varepsilon_{moy} = \frac{\Delta l}{l}.$$

L'*allongement linéaire relatif réel* ou *déformation linéaire relative* en un point se détermine comme la déformation relative d'un tronçon quand $l \to 0$

$$\varepsilon = \lim_{l \to 0} \frac{\Delta l}{l}.$$

Plusieurs éléments de structures travaillent dans des conditions de traction ou de compression: tiges des poutres en treillis, colonnes, tiges des machines à pistons, boulons de serrage et autres.

Le *cisaillement* ou glissement a lieu lorsque les forces extérieures provoquent un déplacement de deux sections planes parallèles, l'une par rapport à l'autre, la distance entre elles demeurant inchangée (fig. 4). La valeur de déplacement Δs s'appelle *cisaillement absolu*. Le rapport

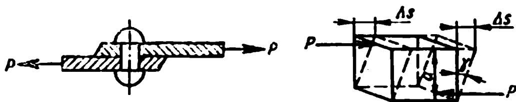


FIG. 4

entre le cisaillement absolu et la distance entre les plans en glissement (la tangente de l'angle γ) porte le nom de *cisaillement relatif*. Etant donné la petitesse de l'angle γ, on peut poser

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma = \frac{\Delta s}{a} \cdot$$

Le cisaillement relatif est une déformation angulaire qui caractérise le gauchissement d'un élément.

Dans des conditions de cisaillement, ou de glissement, travaillent, par exemple, les rivets et les boulons, les pièces de fixation que les forces extérieures tendent à décaler l'une de l'autre.

La *torsion* a lieu lorsque sur une barre agissent des forces extérieures qui engendrent un moment par rapport à son axe (fig. 5). La déformation de torsion s'accompagne d'une rotation des sections transversales de la barre l'une par rapport à l'autre autour de l'axe de cette dernière. L'angle de rotation d'une section de la barre par rapport à une autre se trouvant à une distance l porte le nom d'*angle de torsion* sur la longueur l. Le rapport entre l'angle de torsion φ et la longueur l porte le nom d'*angle de torsion unitaire*

$$\theta = \frac{\varphi}{l} \cdot$$

Dans des conditions de torsion travaillent les arbres, les broches des tours et des perceuses ainsi que d'autres pièces.

La *flexion* (fig. 6) consiste en un gauchissement de l'axe d'une barre droite ou en une modification de la courbure d'une barre curviligne. Le déplacement d'un point quelconque de l'axe d'une barre en flexion s'exprime au moyen d'un vecteur dont l'origine coïncide avec la position initiale de ce point tandis que le bout coïncide avec la position de ce même point dans la barre déformée. Dans les barres droites, les déplacements des points

dans une direction perpendiculaire à la position initiale de l'axe s'appellent *flèches*. Nous désignerons les flèches par la lettre w, la flèche maximale, par la lettre f. La flexion s'accompagne en même temps d'une rotation des sections de la barre autour des axes se trouvant dans les plans desdites

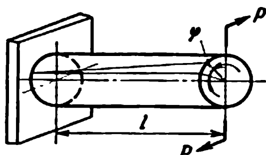


FIG. 5

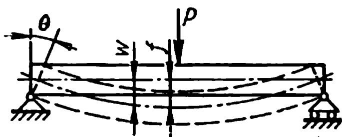


FIG.

sections. Les angles de rotation des sections par rapport à leurs positions initiales seront désignés de la lettre θ.

Dans des conditions de flexion travaillent les poutres des planchers entre étages, des ponts, les essieux des wagons, les ressorts à lames, les arbres, les dents de pignons, les rayons des roues, les leviers et beaucoup d'autres pièces.

Les déformations très simples de la barre qui viennent d'être décrites donnent une idée sur la modification de sa forme et de ses dimensions en gros mais ne disent rien sur le degré et la nature de l'*état déformé* du matériau. Des études montrent que, généralement parlant, l'état déformé d'un corps n'est pas uniforme et change d'un point à l'autre. Avec cela, l'état déformé en un point du corps se détermine entièrement au moyen de six *composantes de déformation:* trois déformations linéaires relatives ε_x, ε_y, ε_z et trois déformations angulaires relatives γ_{xy}, γ_{xz}, γ_{yz}.

§ 3. Principales hypothèses

Pour construire une théorie de la résistance des matériaux, on pose une série d'hypothèses quant à la structure et aux propriétés des matériaux ainsi qu'à la nature des déformations.

1. *Hypothèse de la continuité du matériau.* L'on suppose que le matériau remplit entièrement le volume qu'il occupe. La théorie atomistique de la constitution discrète de la matière n'est pas prise en considération.

2. *Hypothèse de l'homogénéité et de l'isotropie*. L'on suppose que les propriétés du matériau sont identiques dans tous les points et, en chaque point, le restent dans toutes les directions. Dans certains cas, l'hypothèse d'isotropie n'est pas acceptable. Ainsi, le bois dont les propriétés diffèrent sensiblement le long et en travers les fibres, de même que les matériaux armés, sont anisotropes.

3. *Hypothèse sur la petitesse des déformations* (hypothèse de la rigidité relative du matériau). L'on suppose que les déformations sont petites par comparaison avec les dimensions du corps déformé. A ce titre on néglige les modifications qui, lors de la déformation, surviennent dans la disposition des forces extérieures par rapport aux différentes parties du corps, et les équations de statique s'écrivent comme pour un corps non déformé. Dans certains cas spécialement mentionnés, l'on est obligé de renoncer à ce principe.

4. *Hypothèse sur l'élasticité parfaite du matériau*. Tous les corps sont supposés absolument élastiques. En réalité, les corps réels peuvent être considérés comme élastiques seulement pour des valeurs déterminées de charges, ce qu'il faut prendre en considération quand on se sert des formules de résistance des matériaux.

5. *Hypothèse sur la dépendance linéaire entre les déformations et les charges*. L'on suppose que pour la majorité des matériaux, la loi de Hooke qui établit une dépendance directement proportionnelle entre les déformations et les sollicitations reste en vigueur.

Les hypothèses sur la petitesse des déformations et sur la dépendance linéaire entre les déformations et les sollicitations rendent légitime le *principe de superposition* (principe de l'indépendance des effets et de l'addition des forces) lors de la résolution de la plupart des problèmes de résistance des matériaux. Par exemple, dans n'importe quelle partie d'une structure, les efforts suscités par différents facteurs (plusieurs forces, effets thermiques) sont égaux à la somme des efforts suscités par chacun de ces facteurs et ne dépendent pas de l'ordre d'application de ces derniers. Cela reste également vrai pour les déformations.

6. *Hypothèse des sections planes*. L'on suppose que des sections planes imaginaires pratiquées perpendiculairement à l'axe de la barre restent planes et perpendiculaires à l'axe au cours du processus de déformation.

Ces hypothèses, ainsi que certaines autres, permettent de résoudre un grand nombre de problèmes concernant le calcul de résistance, de rigidité et de stabilité. En général, les résultats de tels calculs s'accordent bien avec les données expérimentales.

CHAPITRE 2

Caractéristiques géométriques des sections planes

La résistance qu'une barre offre à différentes formes de déformations dépend souvent non seulement du matériau dont il est fait et de ses dimensions, mais aussi de la configuration de son axe, de la forme des sections transversales ainsi que de leur disposition par rapport aux charges sollicitantes. Examinons les caractéristiques géométriques principales des sections transversales d'une barre en faisant abstraction des propriétés physiques de celle-ci. Ces caractéristiques sont: aires des sections transversales, moments statiques, moments d'inertie, moments résistants, rayons de giration.

§ 4. Moment statique d'une aire. Centre de gravité d'une aire

Si l'on examine une figure quelconque (la section transversale d'une barre) liée à un système de coordonnées xOy (fig. 7), on peut, par analogie avec l'expression qui donne le moment d'une force par rapport à un axe quelconque, établir l'expression du moment d'une aire qui porte le nom de *moment statique*. Ainsi, le produit d'un élément dF d'une aire par la distance y de l'axe Ox

$$dS_x = ydF$$

portera le nom de moment statique de cet élément par rapport à l'axe Ox. De même $dS_y = xdF$ sera le moment statique de cet élément par rapport à l'axe Oy. La somme de ces produits sur toute l'étendue de l'aire donnera les *moments statiques de l'aire* par rapport aux axes x et y respectivement:

$$S_x = \int_F ydF; \quad S_y = \int_F xdF. \tag{2.1}$$

L'unité de mesure du moment statique est l'unité de longueur prise au cube (par exemple, cm³).

Soit x_C et y_C les coordonnées du centre de gravité d'une figure. En continuant d'utiliser l'analogie avec les moments des forces, on peut, en vertu du théorème sur le moment de la résultante, écrire les expressions suivantes:

$$S_x = Fy_C; \quad S_y = Fx_C, \tag{2.2}$$

F étant l'aire de la figure.

Les coordonnées du centre de gravité sont égales à

$$x_C = \frac{S_y}{F}; \quad y_C = \frac{S_x}{F}. \tag{2.3}$$

Pour calculer les moments statiques d'une figure complexe, il faut la subdiviser en des formes simples (fig. 8) dont l'aire (F_i) et la position

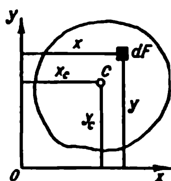


FIG. 7

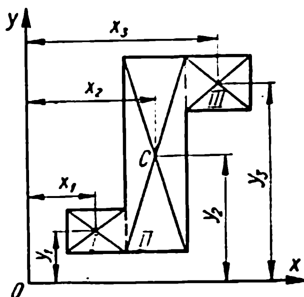


FIG. 8

du centre de gravité (x_i, y_i) pour chacune d'elles sont connues. Les moments statiques de toute la figure par rapport aux axes Ox et Oy seront respectivement égaux à

$$\left.\begin{aligned} S_x &= F_1y_1 + F_2y_2 + \ldots + F_ny_n = \sum_{i=1}^{i=n} F_iy_i; \\ S_y &= F_1x_1 + F_2x_2 + \ldots + F_nx_n = \sum_{i=1}^{i=n} F_ix_i. \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

Les coordonnées du centre de gravité d'une figure complexe se déterminent à partir des formules (2.3) et (2.4)

$$x_C = \frac{S_y}{F} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} F_i x_i}{\sum_{i=1}^{i=n} F_i}; \quad y_C = \frac{S_x}{F} = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} F_i y_i}{\sum_{i=1}^{i=n} F_i}. \qquad (2.5)$$

§ 5. Moments d'inertie des figures planes

On appelle ***moment d'inertie axial ou équatorial*** *de l'aire d'une figure l'intégrale des produits des aires élémentaires par le carré de leurs distances à partir de l'axe considéré.* Ainsi, les moments d'inertie d'une figure quelconque (fig. 9) par rapport aux axes x et y seront respectivement égaux à

$$J_x = \int_F y^2\, dF; \quad J_y = \int_F x^2\, dF. \qquad (2.6)$$

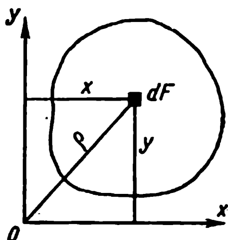


FIG. 9

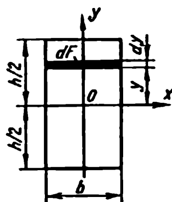


FIG. 10

Les moments d'inertie des figures élémentaires se calculent à partir de ces formules.

Rectangle (fig. 10). L'aire élémentaire étant $dF = bdy$, on aura

$$J_x = \int_F y^2\, dF = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 b\, dy = \frac{bh^3}{12}.$$

On aura évidemment

$$J_y = \frac{hb^3}{12}.$$

Triangle (fig. 11). Tenant compte de ce que $b(y) = \frac{b}{h}(h-y)$ $dF = \frac{b}{h}(h-y)\,dy$, on exprimera le moment d'inertie par rapport à l'axe x comme

$$J_x = \int_F y^2\,dF = \frac{b}{h}\int_0^h y^2(h-y)\,dy = \frac{bh^3}{12}.$$

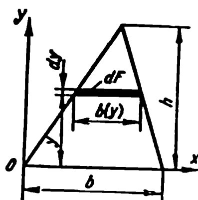


FIG. 11

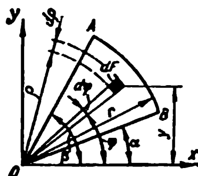


FIG. 12

Secteur circulaire (fig. 12). Tenant compte de ce que $dF = \rho d\varphi\, d\rho$ et que $y = \rho \sin\varphi$, calculons le moment d'inertie par rapport à l'axe x:

$$J_x = \int_F y^2\,dF = \int_\alpha^\beta\int_0^r \rho^2 \sin^2\varphi\,\rho\,d\varphi\,d\rho = \frac{r^4}{8}\left[(\beta-\alpha) - \frac{\sin 2\beta - \sin 2\alpha}{2}\right].$$

On appelle **moment d'inertie polaire** *de l'aire d'une figure par rapport à un point donné (pôle O) l'intégrale des produits des aires élémentaires par le carré de leurs distances* ρ *à partir du pôle* (fig. 9):

$$J_p = \int_F \rho^2\,dF. \tag{2.7}$$

Si à travers ce pôle on fait passer un système d'axes réciproquement perpendiculaires x, y on aura $\rho^2 = x^2 + y^2$. En vertu de (2.6) et (2.7), nous aurons

$$J_p = J_x + J_y. \tag{2.8}$$

Cercle (fig. 13). Comme $dF = 2\pi\rho\, d\rho$, le moment d'inertie polaire sera:

$$J_p = \int_F \rho^2\, dF = 2\pi \int_0^r \rho^3\, d\rho = \frac{\pi r^4}{2},$$

ou

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}.$$

En vertu de (2.8), on aura évidemment pour un cercle

$$J_x = J_y = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi d^4}{64}.$$

A remarquer que les moments d'inertie axiaux et polaires sont toujours des grandeurs positives.

On appelle **moment d'inertie centrifuge** *l'intégrale des produits des aires élémentaires par leurs distances comptées à partir des axes de coordonnées* x, y:

$$J_{xy} = \int_F xy\, dF. \tag{2.9}$$

Selon la disposition des axes, le moment d'inertie centrifuge peut être soit négatif soit, enfin, nul. Les axes par rapport auxquels le moment d'inertie centrifuge est égal à zéro portent le nom d'*axes principaux d'inertie*. Deux axes réciproquement perpendiculaires dont l'un au moins constitue l'axe de symétrie d'une figure seront des axes principaux de cette dernière. Cela découle du fait que, dans ce cas, à chaque valeur positive de la quantité $xydF$ correspond une valeur identique négative de l'autre côté de l'axe de symétrie (fig. 14) et leur somme sur toute l'étendue de la figure équivaut

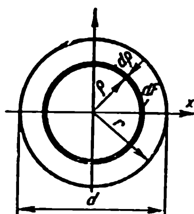


FIG. 13

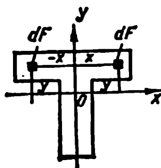


FIG. 14

à zéro. Les axes principaux passant par le centre de gravité d'une section portent le nom d'*axes centraux principaux*. L'unité de longueur prise à la quatrième puissance (par exemple, cm⁴) sert d'unité de mesure pour les moments d'inertie.

§ 6. Moments d'inertie des sections complexes

Lorsqu'il s'agit de calculer les moments d'inertie des figures complexes, on subdivise, d'ordinaire, ces dernières en parties simples dont les moments d'inertie sont connus. De la propriété principale de l'intégrale d'une somme découle que le moment d'inertie d'une figure complexe est égal à la somme des moments d'inertie de ses parties composantes. Trouvons le moment d'inertie d'une figure complexe (fig. 15) par rapport à l'axe x en la subdivisant en trois parties simples I, II, III, ayant pour aires, respectivement, F_{I}, F_{II}, F_{III}:

$$J_x = \int_{F_{\mathrm{I}}} y^2\, dF + \int_{F_{\mathrm{II}}} y^2\, dF + \int_{F_{\mathrm{III}}} y^2\, dF,$$

ou

$$J_x = J_x^{\mathrm{I}} + J_x^{\mathrm{II}} + J_x^{\mathrm{III}}. \qquad (2.10)$$

Il est à remarquer que, dans le cas où une section contient un orifice, il est commode de considérer ce dernier comme une partie de la figure ayant une aire de valeur négative. C'est ainsi que le moment d'inertie par rapport à l'axe x de la section représentée sur la fig. 16 sera

$$J_x = J_x^{\mathrm{I}} - J_x^{\mathrm{II}} = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi r^4}{4}.$$

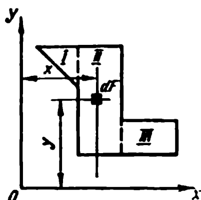


FIG. 15

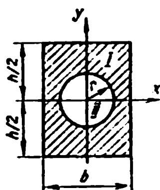


FIG. 16

§ 7. Moments d'inertie par rapport à des axes parallèles

Supposons connus les moments d'inertie d'une figure par rapport aux axes centraux x, y

$$J_x = \int_F y^2\,dF; \quad J_y = \int_F x^2\,dF; \quad J_{xy} = \int_F xy\,dF. \tag{2.11}$$

L'on demande de déterminer les moments d'inertie par rapport aux axes x_1, y_1, parallèles aux axes centraux (fig. 17):

$$J_{x_1} = \int_F y_1^2\,dF; \quad J_{y_1} = \int_F x_1^2\,dF; \quad J_{x_1y_1} = \int_F x_1y_1\,dF. \tag{2.12}$$

Les coordonnées d'un point quelconque dans le nouveau système $x_1O_1y_1$ peuvent être exprimées par l'intermédiaire des coordonnées de l'ancien, xOy, de la manière suivante:

$$x_1 = x + b; \quad y_1 = y + a. \tag{2.13}$$

Comme les moments statiques de l'aire par rapport aux axes centraux sont nuls, les formules (2.12), compte tenu de (2.13), peuvent être représentées dans leur forme finale suivante:

$$\left.\begin{aligned} J_{x_1} &= J_x + a^2F; \\ J_{y_1} &= J_y + b^2F; \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

$$J_{x_1y_1} = J_{xy} + abF. \tag{2.15}$$

Par conséquent: 1) *le moment d'inertie par rapport à un axe quelconque est égal au moment d'inertie par rapport à un axe central, parallèle à l'axe donné augmenté du produit de l'aire de la figure par le carré de la distance entre ces axes*; 2) *le moment d'inertie centrifuge par rapport à un système quelconque d'axes rectangulaires est égal au moment d'inertie centrifuge par rapport au système d'axes centraux parallèles aux axes donnés, augmenté du produit de l'aire de la figure par les coordonnées de son centre de gravité dans le nouveau système d'axes.* Il convient de souligner que les coordonnées a, b qui rentrent dans la formule (2.15) doivent être prises avec leurs signes respectifs.

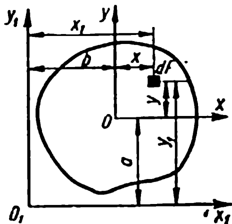


FIG. 17

§ 8. Relation entre les moments d'inertie lors de la rotation des axes de coordonnées

Supposons connus les moments d'inertie d'une figure quelconque par rapport aux axes de coordonnées x, y (fig. 18):

$$J_x = \int_F y^2 dF; \quad J_y = \int_F x^2 dF; \quad J_{xy} = \int_F xy dF. \tag{2.16}$$

L'on demande de déterminer les moments d'inertie par rapport aux axes x_1, y_1 tournés, par rapport aux axes x et y, d'un angle α dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre, cet angle étant considéré comme positif:

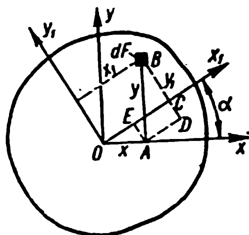


FIG. 18

$$J_{x_1} = \int_F y_1^2 dF; \quad J_{y_1} = \int_F x_1^2 dF; \quad J_{x_1y_1} = \int_F x_1y_1\, dF. \tag{2.17}$$

Les coordonnées d'une aire élémentaire quelconque dans le nouveau système (x_1Oy_1) peuvent être représentées à l'aide des coordonnées de l'ancien système (xOy) de la manière suivante:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= OC = OE + AD = x\cos\alpha + y\sin\alpha; \\ y_1 &= BC = BD - EA = y\cos\alpha - x\sin\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{2.18}$$

En définitive, nous aurons:

$$\left.\begin{aligned} J_{x_1} &= J_x \cos^2\alpha + J_y \sin^2\alpha - J_{xy} \sin 2\alpha; \\ J_{y_1} &= J_y \cos^2\alpha + J_x \sin^2\alpha + J_{xy} \sin 2\alpha, \end{aligned}\right\} \qquad (2.19)$$

$$J_{x_1y_1} = J_{xy}\cos 2\alpha - \frac{1}{2}(J_y - J_x)\sin 2\alpha. \qquad (2.20)$$

Soulignons que les formules (2.19) et (2.20) obtenues pour le cas d'une rotation d'un système quelconque d'axes rectangulaires restent, naturellement, valables pour les axes centraux. Additionnant terme à terme dans (2.19), nous aurons

$$J_{x_1} + J_{y_1} = J_x + J_y = J_p.$$

Par conséquent, *lors de la rotation des axes rectangulaires, la somme des moments d'inertie axiaux ne change pas et est égale au moment d'inertie polaire par rapport à l'origine des coordonnées.*

La rotation d'un système d'axes d'un angle $\alpha = 90°$ donnera

$$J_{x_1} = J_y; \quad J_{y_1} = J_x; \quad J_{x_1y_1} = -J_{xy}.$$

§ 9. Détermination de la direction des axes d'inertie principaux. Moments d'inertie principaux

Ce sont les axes centraux principaux par rapport auxquels le moment d'inertie centrifuge est égal à zéro qui représentent le plus d'intérêt du point de vue pratique. Désignons par les lettres u, v les axes centraux principaux. On aura évidemment

$$J_{uv} = 0.$$

Pour déterminer la position des axes centraux principaux d'une figure quelconque asymétrique, il faut faire tourner les axes centraux x, y d'un

angle α_0 (fig. 19) tel que le moment d'inertie centrifuge correspondant à cette nouvelle position des axes soit égal à zéro

$$J_{x_1y_1} = J_{uv} = 0.$$

De la formule (2.20), nous obtenons

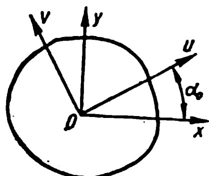


FIG. 19

$$J_{x_1y_1} = J_{xy} \cos 2\alpha_0 - \frac{J_y - J_x}{2} \sin 2\alpha_0 = 0.$$

d'où

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2J_{xy}}{J_y - J_x}. \qquad (2.21)$$

Les deux valeurs de l'angle α_0 qu'établit la formule (2.21) diffèrent l'une de l'autre de 90° et déterminent la position des axes principaux. Comme il est aisé de le remarquer, le plus petit de ces angles ne dépasse pas, en valeur absolue, $\frac{\pi}{4}$. D'ordinaire, c'est le plus petit angle qu'on retient. L'axe principal tracé sous cet angle (positif ou négatif) se désigne, d'ordinaire, par la lettre u. Rappelons que les valeurs négatives de l'angle α_0 se mesurent à partir de l'axe x dans le sens des aiguilles d'une montre.

La fig. 20 représente quelques exemples de symbolisation des axes principaux en conformité avec la règle indiquée. Les axes de départ sont désignés par x et y. Les valeurs des moments d'inertie principaux peuvent être obtenues à partir des formules générales (2.19) si l'on y pose $\alpha = \alpha_0$:

$$\left.\begin{aligned} J_u &= J_x \cos^2\alpha_0 + J_y \sin^2\alpha_0 - J_{xy} \sin 2\alpha_0; \\ J_v &= J_y \cos^2\alpha_0 + J_x \sin^2\alpha_0 + J_{xy} \sin 2\alpha_0. \end{aligned}\right\} \qquad (2.22)$$

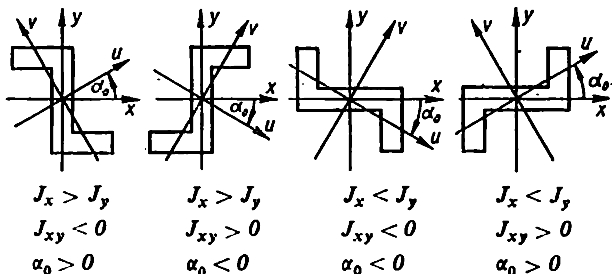


FIG. 20

Additionnons et retranchons entre elles les dernières expressions. En tenant compte de (2.21), nous aurons

$$J_u + J_v = J_x + J_y;$$

$$J_u - J_v = (J_x - J_y)\cos 2\alpha_0 - 2J_{xy}\sin 2\alpha_0 = (J_x - J_y)\frac{1}{\cos 2\alpha_0}.$$

En résolvant ensemble ces dernières équations par rapport à J_u et J_v on obtient

$$\left.\begin{aligned} J_u &= \frac{1}{2}\left[(J_x + J_y) + (J_x - J_y)\frac{1}{\cos 2\alpha_0}\right]; \\ J_v &= \frac{1}{2}\left[(J_x + J_y) - (J_x - J_y)\frac{1}{\cos 2\alpha_0}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (2.23)$$

Il est clair que pour $J_x > J_y$, on aura $J_u > J_v$. Tenant compte, en conformité avec (2.21), que

$$\frac{1}{\cos 2\alpha_0} = \pm\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\, 2\alpha_0} = \pm\sqrt{1 + \frac{4J_{xy}^2}{(J_x - J_y)^2}},$$

les équations (2.23) qui donnent les moments principaux peuvent être mises sous la forme suivante

$$\left.\begin{aligned} J_u &= \frac{1}{2}\left[(J_x + J_y) \pm \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2}\right]; \\ J_v &= \frac{1}{2}\left[(J_x + J_y) \mp \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2}\right], \end{aligned}\right\} \quad (2.24)$$

avec cela, les signes d'en haut correspondront à $J_x > J_y$, tandis que ceux d'en bas, à $J_x < J_y$.

Ainsi, les formules (2.21), (2.23) et (2.24) permettent de déterminer la position des axes principaux et la valeur des moments d'inertie centraux principaux.

Si maintenant, à la place du système arbitraire initial des axes centraux xOy, on adopte le système des axes principaux, les formules (2.19) et (2.20) qui assurent le passage à des axes retournés se simplifient:

$$\left.\begin{aligned} J_{x_1} &= J_u \cos^2\alpha + J_v \sin^2\alpha; \\ J_{y_1} &= J_v \cos^2\alpha + J_u \sin^2\alpha, \end{aligned}\right\} \tag{2.25}$$

$$J_{x_1 y_1} = \frac{1}{2} (J_u - J_v) \sin 2\alpha. \tag{2.26}$$

Remarquons que les moments d'inertie principaux possèdent la propriété d'extrémum. On peut facilement s'en convaincre en dérivant les expressions (2.19) par rapport à la variable α.

Les plans qui contiennent l'axe d'une barre ainsi que les axes d'inertie principaux de sa section transversale s'appellent *plans principaux*.

§ 10. Représentation graphique des moments d'inertie. Notion de rayon de giration et d'ellipse d'inertie

Le calcul des moments d'inertie d'après les formules (2.23)-(2.26) peut être remplacé par leur détermination graphique. Dans ce cadre, il est convenu de considérer deux problèmes: le problème direct et le problème inverse.

Quand on résout le problème direct, ce sont les moments d'inertie par rapport à un système d'axes central arbitraire qui se déterminent à partir des moments d'inertie principaux J_u et J_v connus. Le problème inverse consiste à déterminer les moments d'inertie principaux lorsque sont connus les moments d'inertie J_x, J_y et J_{xy}, par rapport à un système d'axes central arbitraire x, y.

Problème direct. Déterminer les moments d'inertie J_x, J_y, J_{xy} par rapport aux axes x et y (fig. 21, *a*) si sont connus J_u et J_v par rapport à des axes principaux dont la direction est connue. Pour plus de précision, posons $J_u > J_v$.

Choisissons dans un certain plan géométrique (fig. 21, *b*) un système rectangulaire de coordonnées. Sur l'axe des abscisses, nous porterons les moments d'inertie axiaux $J_{ax}(J_u, J_v, J_x, J_y$, etc.), tandis que sur l'axe des ordonnées, les moments d'inertie centrifuges $J_{cf}(J_{xy}$, etc.).

Portons sur l'axe des abscisses, en échelle requise, les segments OA et OB équivalents aux moments d'inertie principaux. Divisons en deux le segment AB de telle façon que $BC = AC = \frac{1}{2}(J_u - J_v)$. Du point C

décrivons un cercle de rayon CA appelé *cercle d'inertie*. Alors, pour déterminer le moment d'inertie par rapport à un axe x tracé sous un angle α à partir de l'axe principal u, nous élèverons du centre et sous un angle égal à 2α un rayon CD_x. Les angles positifs seront portés dans le sens contraire aux aiguilles d'une montre. Avec cela, il s'avère que l'ordonnée du point D_x est égale au moment d'inertie centrifuge J_{xy} tandis que l'abscisse, au moment d'inertie axial J_x par rapport à l'axe x. Pour obtenir la valeur du moment d'inertie J_y par rapport à un axe y perpendiculaire à l'axe x et, par conséquent, tracé sous un angle positif $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$ par rapport à l'axe principal u, élevons du centre le rayon CD_y sous un angle égal à $2\beta = 2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$. L'on se rend facilement compte qu'il constitue le prolongement du rayon CD_x. L'abscisse du point D_y est égale au moment d'inertie J_y et l'ordonnée K_yD_y, au moment d'inertie centrifuge avec le signe inverse $(-J_{xy})$, ce qui correspond à un moment d'inertie centrifuge par rapport à des axes tournés de 90°. Remarquons qu'aux deux axes respectivement perpendiculaires correspondent deux points du cercle (D_x et D_y) se trouvant sur un même diamètre.

Du point D_x, traçons un axe x parallèle à l'axe correspondant de la fig. 21, *a*. Le point M de son intersection avec le cercle porte le nom de *pôle du cercle d'inertie* (point principal ou point focal du cercle d'inertie). Il est aisé de montrer que la ligne qui relie le pôle avec n'importe quel point du cercle donne la direction de l'axe représenté sur le diagramme

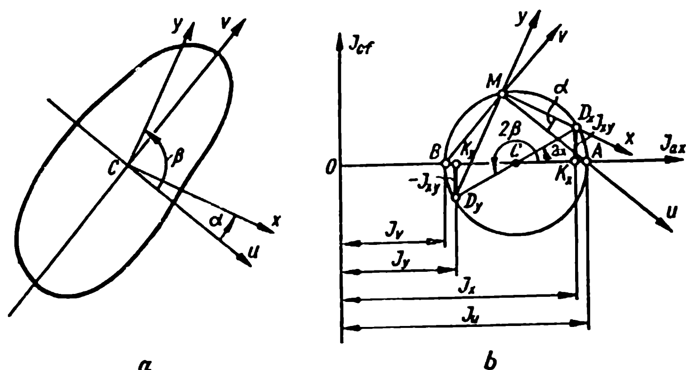


FIG. 21

par ce point. En particulier, la ligne MA donne la direction de l'axe principal u. La ligne MB est parallèle à l'axe principal v.

Problème inverse. Les moments d'inertie J_x, J_y, J_{xy} de l'aire d'une section d'une barre par rapport à un système d'axes centraux x, y sont connus (fig. 22, *a*). Déterminer la disposition des axes d'inertie principaux et la valeur des moments d'inertie principaux. Pour plus de précision dans la construction, posons $J_x > J_y$ et $J_{xy} > 0$.

Construisons dans un plan géométrique (fig. 22, *b*) les points D_x et D_y correspondant aux moments d'inertie par rapport aux axes x et y. Les abscisses de ces points seront les moments d'inertie axiaux: $OK_x = J_x$; $OK_y = J_y$; les ordonnées représentent les moments d'inertie centrifuges J_{xy} avec $K_xD_x = J_{xy}$; $K_yD_y = -J_{xy}$. Comme les deux points appartiennent à un même diamètre, en les reliant, nous obtenons le centre du cercle d'inertie C à partir duquel nous décrivons une circonférence de rayon

$$CD_x = CD_y = \sqrt{\left(\frac{J_x - J_y}{2}\right)^2 + J_{xy}^2},$$

qui coupe l'axe des abscisses dans les points A et B. Il est évident que les abscisses de ces points (OA et OB) représentent les moments d'inertie principaux cherchés J_u et J_v.

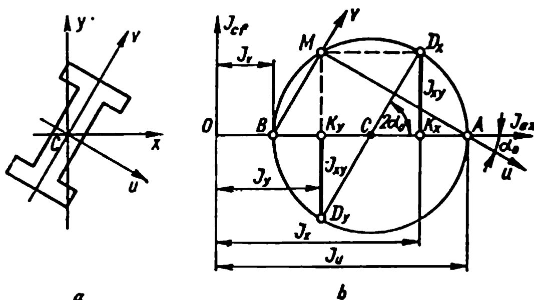


FIG. 22

Pour déterminer la direction des axes principaux, construisons le point focal du cercle d'inertie. Pour ce faire, des points D_x et D_y élevons des lignes respectivement parallèles aux axes indiqués jusqu'à leur intersection avec le cercle au point M. En reliant ensuite le point focal avec les points A et B du cercle, nous obtiendrons la direction des axes principaux u et v (fig. 22, *b*). La fig. 23, *a*, *b*, *c*, *d* montre la résolution gra-

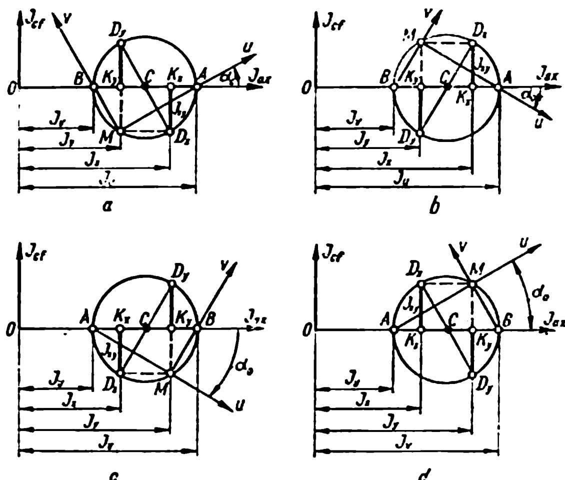


FIG. 23

phique du problème inverse respectivement pour les quatre cas représentés sur la fig. 20.

Le moment d'inertie d'une figure par rapport à un axe quelconque peut être représenté sous forme de produit de l'aire de cette figure par le carré d'une certaine grandeur appelée *rayon de giration:*

$$J_x = \int_F y^2\, dF = Fi_x^2, \tag{2.27}$$

i_x étant le rayon d'inertie par rapport à l'axe x.

De (2.27), il découle que

$$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}\ . \tag{2.28}$$

Par analogie, le rayon d'inertie par rapport à l'axe y sera

$$i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}\,. \tag{2.29}$$

Aux axes d'inertie centraux principaux correspondent les rayons d'inertie principaux

$$i_u = \sqrt{\frac{J_u}{F}}\,; \quad i_v = \sqrt{\frac{J_v}{F}}\,. \tag{2.30}$$

Sur les axes d'inertie centraux principaux d'une figure plane, construisons une ellipse ayant des demi-axes équivalents aux rayons d'inertie principaux; ce faisant, nous porterons sur l'axe u des segments égaux à i_v tandis que sur l'axe v des segments égaux à i_u (fig. 24). Cette ellipse appelée ellipse d'inertie possède une propriété remarquable consistant dans le fait que le rayon d'inertie à n'importe quel axe central x se définit comme la perpendiculaire OA abaissée du centre O de l'ellipse sur la tangente à cette dernière, cette tangente étant parallèle à l'axe x. Pour obtenir le point de tangence, il suffit de tracer une corde quelconque parallèlement à l'axe donné x. Le point d'intersection de l'ellipse avec la ligne reliant le centre O et le milieu de la corde sera le point de tangence. Après avoir mesuré le segment $OA = i_x$, trouvons le moment d'inertie d'après la formule

$$J_x = Fi_x^2.$$

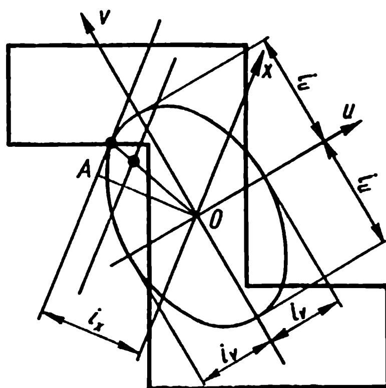


FIG. 24

§ 11. Moments résistants

On appelle **moment résistant axial** *le rapport entre le moment d'inertie par rapport à un axe donné et la distance de cet axe jusqu'au point le plus éloigné de la section transversale:*

$$W_x = \frac{J_x}{y_{max}}. \tag{2.31}$$

Les moments résistants ont pour dimension l'unité de longueur prise au cube (mm³, cm³ ou m³).

Les moments résistants par rapport aux axes centraux principaux que l'on appelle en général moments résistants ont une importance pratique.

1. Pour le rectangle (fig. 10):

$$W_x = \frac{J_x}{h/2} = \frac{bh^2}{6}; \tag{2.32}$$

$$W_y = \frac{J_y}{b/2} = \frac{hb^2}{6}. \tag{2.33}$$

2. Pour le cercle (fig. 13):

$$W_x = W_y = W = \frac{J_x}{r} = \frac{\pi r^3}{4} = \frac{\pi d^3}{32}. \tag{2.34}$$

3. Pour une section tubulaire avec d pour diamètre intérieur et D pour diamètre extérieur:

$$W_x = W_y = W = \frac{J_x}{D/2} = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D} = \frac{\pi D^3}{32}(1 - \alpha^4), \tag{2.35}$$

avec

$$\alpha = \frac{d}{D}. \tag{2.36}$$

On appelle **module de résistance polaire** *le rapport entre le moment d'inertie polaire et la distance du pôle jusqu'au point le plus éloigné de la section:*

$$W_p = \frac{J_p}{\rho_{max}}. \tag{2.37}$$

Pour pôle on prend le centre de gravité de la section transversale d'une barre.

1. Pour le cercle (fig. 13)

$$W_p = \frac{J_p}{r} = \frac{\pi r^3}{2} = \frac{\pi d^3}{16}. \tag{2.38}$$

2. Pour une section tubulaire

$$W_p = \frac{J_p}{D/2} = \frac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4). \tag{2.39}$$

§ 12. Ordre de calcul

Lors de l'analyse des caractéristiques géométriques des figures planes aussi complexes qu'elles soient, le problème le plus important est de déterminer la disposition des axes principaux et des valeurs des moments d'inertie principaux. On peut recommander l'ordre suivant de détermination de la disposition des axes principaux et des valeurs des moments d'inertie centraux principaux d'une figure complexe composée de parties simples dont les caractéristiques se déterminent plus facilement.

1. Traçons un système d'axes rectangulaires arbitraire. Divisons la figure en parties simples et, d'après la formule (2.5), déterminons son centre de gravité.

2. Le système initial d'axes centraux x, y sera tracé de façon à simplifier au possible le calcul des moments d'inertie des parties de la figure par rapport à ces axes. Pour ce faire, en usant des formules de transition à des axes parallèles (2.14) et (2.15), déterminons les moments d'inertie des parties de la figure par rapport à leurs propres axes centraux parallèles aux axes x, y. De cette façon, nous obtenons les valeurs de J_x, J_y et J_{xy}

3. Déterminons d'après (2.21) l'angle d'inclinaison des axes centraux principaux en désignant par la lettre u l'axe tracé sous le plus petit angle (positif ou négatif) et par la lettre v, la perpendiculaire à cet axe.

4. En partant des formules (2.24), déterminons les valeurs des moments d'inertie centraux principaux J_u et J_v.

Exemple. Déterminer la position des axes centraux principaux et calculer les moments d'inertie principaux d'une section transversale faite d'une cornière à ailes inégales répondant à n° 14/9 (GOST 8510-72) ainsi que d'un profilé en U, n° 24 (GOST 8240-72) (fig. 25, *a*).

Solution. Traçons les axes centraux x_1, y_1 et x_2, y_2 passant par les centres de gravité C_1 et C_2 de la cornière et du profilé parallèlement à leurs côtés. Comme x_2 est l'axe de symétrie du profilé, celui-ci et l'axe x_2 représentent les axes centraux principaux de ce dernier. L'axe central principal de la cornière y_0 forme avec l'axe central de cette dernière x_1 l'angle α.

Pour la cornière, $F_1 = 22{,}2\ \text{cm}^2$; $J_{x_1} = 146\ \text{cm}^4$; $J_{y_1} = 444\ \text{cm}^4$; $J_{y_0} = J_{\min} = 85{,}5\ \text{cm}^4$; $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}409$; $\alpha = 22°15'$; les coordonnées du centre de gravité $x_C = 4{,}58$ cm, $y_C = 2{,}12$ cm.

Pour le profilé $F_2 = 30{,}6\ \text{cm}^2$; $J_{x_2} = 2900\ \text{cm}^4$; $J_{y_2} = 208\ \text{cm}^4$; $J_{x_2y_2} = 0$; les coordonnées du centre de gravité $x_C = 2{,}42$ cm; $y_C = 12$ cm.

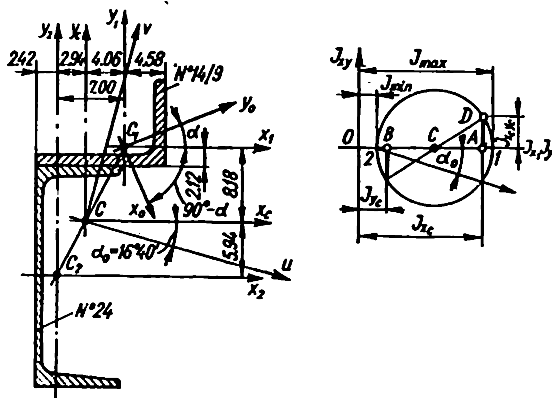


FIG. 25

Trouvons le moment d'inertie principal J_{x_0} et le moment d'inertie centrifuge $J_{x_1y_1}$ de la cornière:

$$J_{x_0} = J_{\max} = 444 + 146 - 85{,}5 = 504{,}5\ \text{cm}^4;$$

$$J_{x_1y_1} = \frac{J_{x_0} - J_{y_0}}{2} \sin 2(90° - \alpha) = \frac{J_{x_0} - J_{y_0}}{2} \sin 2\alpha =$$

$$= \frac{504{,}5 - 85{,}5}{2} \cdot 0{,}701 = 146{,}7\ \text{cm}^4.$$

Les distances entre les axes centraux de la cornière et du profilé sont égales à:
entre les axes x_1 et x_2

$$12{,}00 + 2{,}12 = 14{,}12 \text{ cm};$$

entre les axes y_1 et y_2

$$14{,}00 - 2{,}42 - 4{,}58 = 7{,}00 \text{ cm}.$$

Déterminons les coordonnées du centre de gravité C de toute la figure dans le système d'axes x_2, y_2:

$$x_C = \frac{22{,}2 \cdot 7{,}00}{22{,}2 + 30{,}6} = 2{,}94 \text{ cm}; \quad y_C = \frac{22{,}2 \cdot 14{,}12}{22{,}2 + 30{,}6} = 5{,}94 \text{ cm}.$$

Le centre de gravité C doit se trouver sur la droite C_1C_2, ce dont il faut faire la vérification sur le dessin. Faisons passer par le centre de gravité C les axes centraux x_C et y_C parallèlement aux axes centraux qui avaient été tracés précédemment pour la cornière et le profilé. Les coordonnées du centre de gravité de la cornière et du profilé dans le système d'axes centraux x_C, y_C sont égales à:

$$x_{C_1} = 7{,}00 - 2{,}94 = 4{,}06 \text{ cm}; \quad y_{C_1} = 14{,}12 - 5{,}94 = 8{,}18 \text{ cm};$$

$$x_{C_2} = -2{,}94 \text{ cm}; \quad y_{C_2} = -5{,}94 \text{ cm}.$$

Calculons les moments d'inertie centrifuges et axiaux de toute la section dans un système d'axes centraux arbitraires x_C et y_C:

$$J_{x_C} = 146{,}0 + 22{,}2 \cdot 8{,}18^2 + 2900 + 30{,}6 \cdot 5{,}94^2 = 5607{,}6 \text{ cm}^4;$$

$$J_{y_C} = 444{,}0 + 22{,}2 \cdot 4{,}06^2 + 208{,}0 + 30{,}6 \cdot 2{,}94^2 = 1282{,}4 \text{ cm}^4;$$

$$J_{x_C y_C} = 146{,}7 + 22{,}2 \cdot 4{,}06 \cdot 8{,}18 + 30{,}6 \cdot (-2{,}94) \cdot (-5{,}94) =$$

$$= 1417{,}3 \text{ cm}^4.$$

D'après la formule (2.21) trouvons α_0, l'angle d'inclinaison des axes centraux principaux x et y par rapport à des axes centraux arbitraires x_C et y_C:

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2J_{x_C y_C}}{J_{y_C} - J_{x_C}} = \frac{2 \cdot 1417,3}{1282,4 - 5607,6} = -\,0,66;$$

$$2\alpha_0 = -\,33°20'; \quad \alpha_0 = -\,16°40'.$$

Comme l'angle α_0 est négatif, l'axe central principal u sera, par rapport à l'axe central arbitraire x_C, tracé dans le même sens que les aiguilles d'une montre, et vu que $J_{x_C} > J_{y_C}$, l'axe u sera l'axe par rapport auquel le moment d'inertie devient maximal.

Déterminons d'après la formule (2.24) les moments d'inertie principaux:

$$J_{u,v} = \frac{5607,6 + 1282,4}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5607,6 - 1282,4}{2}\right)^2 + 1417,3^2} =$$

$$= 3445,0 \pm 2585,6 \text{ cm}^4;$$

$$J_u = J_{max} = 6030,6 \text{ cm}^4 = 6030,6 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4;$$

$$J_v = J_{min} = 859,4 \text{ cm}^4 = 859,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^4.$$

Vérification. Les conditions suivantes doivent être remplies:

$$J_{x_C} + J_{y_C} = J_u + J_v \text{ et } J_{uv} = 0.$$

Dans le cas présent, nous avons

$$J_{x_C} = J_{y_C} = 5607,6 + 1282,4 = 6890,0 = J_u + J_v =$$

$$= 6030,6 + 859,4 = 6890,0 \text{ cm}^4;$$

$$J_{uv} = \frac{J_{x_C} - J_{y_C}}{2} \sin 2\alpha_0 + J_{x_C y_C} \cos 2\alpha_0 =$$

$$= \frac{5607,6 - 1282,4}{2} \cdot (-0,55) + 1417,3 \cdot 0,836 =$$

$$= -1189,4 + 1184,9 = -4,5 \text{ cm}^4.$$

L'erreur relative $\frac{4,5}{1184,9} \cdot 100 = 0,4\ \%$ ce qui est admissible.

La fig. 25, *b* montre la construction du cercle d'inertie pour une résolution graphique du même problème.

Les tableaux 1-6 donnent les caractéristiques géométriques de différentes sections planes ainsi que des sections des profilés de laminage.

Forme de la section	Aire de la section F	Coordonnées des points extrêmes de la section
Carré Tout axe central est principal	$F = h^2$	$x_1 = y_1 = \frac{h}{2}$
Carré creux Tout axe central est principal	$F = H^2 - h^2$	$x_1 = y_1 = \frac{H}{2}$

Moments d'inertie: axiaux: J_x, J_y; centrifuge: J_{xy}; polaire: J_p; en torsion libre: J_t	Moments résistants: axiaux: W_x, W_y; polaire: W_p et en torsion libre: W_t	Rayons d'inertie $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = J_y = \frac{h^4}{12} = \frac{h^2F}{12}$, $J_{x_2} = \frac{h^4}{3} = \frac{h^2F}{3}$, $J_t = 0{,}1406h^4$	$W_x = W_y = \frac{h^3}{6}$, $W_t = 0{,}208h^3$	$i_x = i_y = \frac{h}{\sqrt{12}} = 0{,}289h$ L'ellipse d'inertie est un cercle
$J_x = J_y = \frac{H^4 - h^4}{12} = \frac{H^2 + h^2}{12} F$	$W_x = W_y = \frac{H^4 - h^4}{6H}$	$i_x = i_y = \sqrt{\frac{H^2 + h^2}{12}} = 0{,}289\sqrt{H^2 + h^2}$ L'ellipse d'inertie est un cercle

Forme de la section	Aire de la section F	Coordonnées des points extrêmes de la section
Carré creux à parois minces Tout axe central est principal	$F = 4H\delta$ $\delta < \frac{H}{15}$	$x_1 = y_1 = \frac{H}{2}$
Carré creux Tout axe central est principal	$F = h^2 - a^2$	$x_1 = y_1 = \frac{h}{2}$

Moments d'inertie: axiaux: J_x, J_y; centrifuge: J_{xy}; polaire: J_p; en torsion libre: J_t	Moments résistants: axiaux: W_x, W_y; polaire: W_p et en torsion libre: W_t	Rayons d'inertie $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = J_y = \frac{2}{3} H^3\delta = \frac{FH^2}{6}$	$W_x = W_y = \frac{4}{3} H^2\delta$	$i_x = i_y = \frac{H}{\sqrt{6}} \approx 0{,}408H$ L'ellipse d'inertie est un cercle
$J_x = J_y = \frac{h^4 - a^4}{12} = \frac{h^2 + a^2}{12} F$	$W_x = W_y = \frac{h^4 - a^4}{6h}$	$i_x = i_y = \sqrt{\frac{h^2 + a^2}{12}} = 0{,}289 \sqrt{h^2 + a^2}$ L'ellipse d'inertie est un cercle

Forme de la section	Aire de la section F	Coordonnées des points extrêmes de la section
Carré reposant sur l'arête Tout axe central est principal	$F = a^2$	$x_1 = y_1 = \frac{h}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} a = 0{,}71a$
Carré creux reposant sur l'arête Tout axe central est principal	$F = a^2 - b^2$	$x_1 = y_1 = \frac{H}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} a = 0{,}71a$

Moments d'inertie: axiaux: J_x, J_y; centrifuge: J_{xy}: polaire: J_p; en torsion libre: J_t	**Moments résistants: axiaux: W_x, W_y; polaire: W_p et en torsion libre: W_t**	**Rayons d'inertie** $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = J_y = \frac{a^4}{12} = \frac{a^2 F}{12} = \frac{h^4}{48}$	$W_x = W_y = \frac{\sqrt{2}}{12} a^3 = \frac{h^3}{24} = 0{,}118 a^3 = 0{,}042\, h^3$ Lorsqu'on coupe les angles supérieur et inférieur de $b = \frac{1}{18} h$, W_x atteint le maximum $W_{x\,moy} = 0{,}124 a^3 = 0{,}044 h^3$	$i_x = i_y = 0{,}289 a$ L'ellipse d'inertie est un cercle
$J_x = J_y = \frac{a^4 - b^4}{12} = \frac{H^4 - h^4}{48} = \frac{a^2 + b^2}{12} \cdot F$	$W_x = W_y = \frac{\sqrt{2}}{12} \frac{a^4 - b^4}{a} = 0{,}118 \frac{a^4 - b^4}{a} = \frac{H^4 - h^4}{24H} = 0{,}042 \frac{H^4 - h^4}{H}$	$i_x = i_y = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{12}} = 0{,}289 \sqrt{a^2 + b^2}$ L'ellipse d'inertie est un cercle

Forme de la section	Aire de la section F	Coordonnées des points extrêmes de la section
Rectangle x-x et y-y sont des axes centraux principaux	$F = bh$	$x_1 = \frac{b}{2}$ $y_1 = \frac{h}{2}$

Moments d'inertie: axiaux: J_x, J_y; centrifuge: J_{xy}; polaire: J_p; en torsion libre J_t	Moments résistants: axiaux: W_x, W_y; polaire: W_p et en torsion libre: W_t	Rayons d'inertie $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = \frac{bh^3}{12} = \frac{Fh^2}{12}$ $J_y = \frac{hb^3}{12} = \frac{Fb^2}{12}$ $J_{x_2} = \frac{bh^3}{3} = \frac{Fh^2}{3}$ $J_{y_2} = \frac{hb^3}{3} = \frac{Fb^2}{3}$ $J_{x_2y_2} = \frac{b^2h^2}{4}$ $J_{x_3} = J_{x_4} = \frac{b^3h^3}{6d^2} = \frac{b^3h^3}{6(b^2 + h^2)} = \frac{d^4\sin^2\alpha}{48} = \frac{Fd^2\sin^2\alpha}{24}$ $J_p = \frac{bh}{12}(b^2 + h^2)$	$W_x = \frac{bh^2}{6} = \frac{Fh}{6}$ $W_y = \frac{hb^2}{6} = \frac{Fb}{6}$	$i_x = 0{,}289h$ $i_y = 0{,}289b$
$\frac{h}{b} = n > 1$		
$J_t = \eta b^4$	$W_t = \zeta b^3$ Au milieu des grands côtés la contrainte tangentielle maximale $\tau_{max} = M_t/W_t$; au milieu des petits côtés $\tau = \zeta\tau_{max}$; dans les angles $\tau = 0$	

Forme de la section	Aire de la section F	Coordonnées des points extrêmes de la section

n	1	1,5	2	3	4	6	8	10
ξ	0,208	0,346	0,493	0,801	1,150	1,789	2,456	3,123
η	0.1401	0,2936	0,4572	0,7899	1,1232	1,789	2,456	3,123
ζ	1,0	0,8588	0,7952	0,7533	0,7447	0,7426	0,7425	0,7425

Forme de la section	Aire de la section F	Coordonnées des points extrêmes de la section
Rectangle creux x-x et y-y sont des axes centraux principaux	$F = BH - bh$	$x_1 = \frac{B}{2}$ $y_1 = \frac{H}{2}$
Rectangle creux à parois minces x-x et y-y sont des axes centraux principaux	$F = 2\delta(B + H)$ $\delta < \frac{H}{15}$	$x_1 = \frac{B}{2}$ $y_1 = \frac{H}{2}$

Moments d'inertie: axiaux: J_x, J_y; centrifuge: J_{xy}; polaire: J_p; en torsion libre J_t	Moments résistants: axiaux: W_x, W_y; polaire: W_p et en torsion libre: W_t	Rayons d'inertie $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$\frac{h}{b} = n > 4$ $J_t = \frac{1}{3}(n - 0{,}63)b^4$	$W_t = \frac{1}{3}(n - 0{,}63)b^3 = \frac{J_t}{b}$ Au milieu des petits côtés, $\tau = 0{,}7425\tau_{max}$	
$J_x = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$ $J_y = \frac{HB^3 - hb^3}{12}$	$W_x = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$ $W_y = \frac{HB^3 - hb^3}{6B}$	$i_x = \sqrt{\frac{BH^3 - bh^3}{12(BH - bh)}}$ $i_y = \sqrt{\frac{HB^3 - hb^3}{12(BH - bh)}}$
$J_x = \frac{\delta H^3}{6}\left(3\frac{B}{H} + 1\right)$ $J_y = \frac{\delta B^3}{6}\left(3\frac{H}{B} + 1\right)$	$W_x = \frac{\delta H^2}{3}\left(3\frac{B}{H} + 1\right)$ $W_y = \frac{\delta B^2}{3}\left(3\frac{H}{B} + 1\right)$	$i_x = 0{,}289\,H \times$ $\times \sqrt{\frac{3B + H}{B + H}}$ $i_y = 0{,}289B \times$ $\times \sqrt{\frac{3H + B}{H + B}}$

Forme de la section	Aire de la section F	Coordonnées des points extrêmes de la section
Rectangle avec entaille *x-x* et *y-y* sont des axes centraux principaux	$F = b(H - h)$	$x_1 = \frac{b}{2}$ $y_1 = \frac{H}{2}$
Rectangle avec un orifice circulaire *x-x* et *y-y* sont des axes centraux principaux	$F = bh - \frac{\pi d^2}{4} = bh\left(1 - 0{,}785\frac{d^2}{bh}\right)$	$x_1 = \frac{b}{2}$ $y_1 = \frac{h}{2}$

Moments d'inertie: axiaux: J_x, J_y; centrifuge: J_{xy}; polaire: J_p; en torsion libre J_t	Moments résistants. axiaux: W_x, W_y; polaire: W'_p et en torsion libre: W_t	Rayons d'inertie $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = \frac{b}{12}(H^3 - h^3)$ $J_y = \frac{b^3}{12}(H - h)$	$W'_x = \frac{b}{6H}(H^3 - h^3)$ $W'_y = \frac{b^2}{6}(H - h)$	$i_x =$ $= \sqrt{\frac{H^2 + Hh + h^2}{12}} =$ $= 0{,}289\sqrt{H^2 + Hh + h^2}$ $i_y = 0{,}289\, b$
$J_x = \frac{1}{4}\left(\frac{bh^3}{3} - \frac{\pi d^4}{16}\right) =$ $= \frac{bh^3}{12}\left(1 - 0{,}59\frac{d^4}{bh^3}\right)$ $J_y = \frac{1}{4}\left(\frac{hb^3}{3} - \frac{\pi d^4}{16}\right) =$ $= \frac{hb^3}{12}\left(1 - 0{,}59\frac{d^4}{hb^3}\right)$	$W'_x = \frac{1}{2h}\left(\frac{bh^3}{3} - \frac{\pi d^4}{16}\right) =$ $= \frac{bh^2}{6}\left(1 - 0{,}59\frac{d^4}{bh^3}\right)$ $W'_y = \frac{1}{2b}\left(\frac{hb^3}{3} - \frac{\pi d^4}{16}\right) =$ $= \frac{hb^2}{6}\left(1 - 0{,}59\frac{d^4}{hb^3}\right)$	$i_x = 0{,}289h \times$ $\times \sqrt{\frac{1 - 0{,}59\frac{d^4}{bh^3}}{1 - 0{,}785\frac{d^2}{bh}}}$ $i_y = 0{,}289\, b \times$ $\times \sqrt{\frac{1 - 0{,}59\frac{d^4}{hb^3}}{1 - 0{,}785\frac{d^2}{bh}}}$

Forme de la section	Aire de la section F	Coordonnées des points extrêmes de la section
Rectangle avec deux orifices x-x et y-y sont des axes centraux principaux	$F = bh - \frac{\pi d^2}{2} =$ $= bh\left(1 - 1{,}57\ \frac{d^2}{bh}\right)$	$x_1 = \frac{b}{2}$ $y_1 = \frac{h}{2}$
Rectangle doté d'entailles demi-circulaires x-x et y-y sont des axes centraux principaux	$F = bh - \pi r^2$	$x_1 = \frac{b}{2}$ $y_1 = \frac{h}{2}$
Rectangle penché	$F = bh$	$y_1 = \frac{1}{2}(h\cos\alpha + b\sin\alpha)$ $x_1 = \frac{1}{2}(b\cos\alpha - h\sin\alpha)$

Moments d'inertie: axiaux: J_x, J_y; centrifuge: J_{xy}; polaire: J_p; en torsion libre J_t	Moments résistants: axiaux: W_x, W_y; polaire: W_p et en torsion libre: W_t	Rayons d'inertie $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = \frac{bh^3}{12}\left[1 - 1{,}18\frac{d^4}{bh^3}\left(1 + 16\frac{a^2}{d^2}\right)\right]$ $J_y = \frac{hb^3}{12}\left(1 - 1{,}18\frac{d^4}{hb^3}\right)$	$W_x = \frac{bh^2}{6}\left[1 - 1{,}18\frac{d^4}{bh^3}\left(1 + 16\frac{a^2}{d^2}\right)\right]$ $W_y = \frac{hb^2}{6}\left(1 - 1{,}18\frac{d^4}{hb^3}\right)$	$i_x = 0{,}289\,h \times \sqrt{\frac{1 - 1{,}18\frac{d^4}{bh^3} \times \left(1 + 16\frac{a^2}{d^2}\right)}{1 - 1{,}57\frac{d^2}{bh}}}$ $i_y = 0{,}289\,b \times \sqrt{\frac{1 - 1{,}18\frac{d^4}{hb^3}}{1 - 1{,}57\frac{d^2}{bh}}}$
$J_x = \frac{bh^3}{12} - \frac{\pi r^4}{4}$ $J_y = \frac{hb^3}{12} - 2\left[0{,}11r^4 + \frac{\pi r^2}{2}\left(\frac{b}{2} - \frac{4r}{3\pi}\right)^2\right]$	$W_x = \frac{bh^2}{6} - \frac{\pi r^4}{2h}$ $W_y = \frac{hb^2}{6} - \frac{4}{b}\left[0{,}11r^4 + \frac{\pi r^2}{2}\left(\frac{b}{2} - \frac{4r}{3\pi}\right)^2\right]$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = \frac{bh}{12}\left(h^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha\right)$ $J_y = \frac{bh}{12}\left((h^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha\right)$ $J_{xy} = \frac{bh}{24}(b^2 - h^2)\sin 2\alpha$	$W_x = \frac{bh}{6} \times \frac{h^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha}{h\cos\alpha + b\sin\alpha}$ $W_y = \frac{bh}{6} \times \frac{h^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}{b\cos\alpha - h\sin\alpha}$	$i_x = \sqrt{\frac{h^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha}{12}} = 0{,}289\sqrt{h^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha}$ $i_y = 0{,}289\sqrt{h^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}$

Forme de la section	Aire de la section F	Coordonnées des points extrêmes de la section
Bande rectangulaire mince	$F = lt$	$y_0 = \frac{a+b}{2}$ $y_1 = \frac{h}{2}$
Double T symétrique en rectangles x-x et y-y sont des axes centraux principaux	$F = ah + b(H - h)$	$x_1 = \frac{b}{2}$ $y_1 = \frac{H}{2}$

Moments d'inertie: axiaux: J_x, J_y; centrifuge: J_{xy}; polaire: J_p; en torsion libre: J_t	Moments résistants: axiaux: W_x, W_y; polaire: W_p et en torsion libre: W'_t	Rayons d'inertie $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = \frac{lth^3}{12} = \frac{Fh^2}{12}$ $J_{x_2} = \frac{lt}{3}(a^2 + ab + b^2)$	$W_x = \frac{lth}{6}$ $W'_{x_2} = \frac{lt}{3b}(a^2 + ab + b^2)$	$i_x = 0{,}289\ h$
$J_x = \frac{ah^3}{12} + \frac{b}{12}(H^3 - h^3)$ $J_y = \frac{a^3h}{12} + \frac{b^3}{12}(H - h)$	$W_x = \frac{ah^3}{6H} +$ $+ \frac{b}{6H}(H^3 - h^3)$ $W_y = \frac{a^2h}{6b} +$ $+ \frac{b^2}{6}(H - h)$	$i_x =$ $= \sqrt{\frac{ah^3 + b(H^3 - h^3)}{12[ah + b(H - h)]}}$ $i_y =$ $= \sqrt{\frac{a^3h + b^3(H - h)}{12[ah + b(H - h)]}}$

Forme de la section	Aire de la section F	Coordonnées des points extrêmes de la section
Double T x-x et y-y sont des axes centraux principaux	$F = aH + 2b(c + c_1)$ $b = \frac{1}{2}(B - a)$	$x_1 = \frac{B}{2}$ $y_1 = \frac{H}{2}$
Section symétrique faite de rectangles x-x est l'axe central principal	$F = BH - bh$	$y_1 = \frac{H}{2}$
Section symétrique en rectangles x-x est l'axe central principal	$F = BH + bh$	$y_1 = \frac{H}{2}$

Moments d'inertie: axiaux: J_x, J_y; centrifuge: J_{xy}; polaire: J_p; en torsion libre: J_t	Moments résistants: axiaux: W_x, W_y; polaire: W_p et en torsion libre: W_t	Rayons d'inertie $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = \frac{1}{12}\left[BH^3 - \frac{1}{4\alpha}\left(h^4 - h_1^4\right)\right]$ $J_y = \frac{1}{12}\left[B^3(H - h) + h_1 a^3 + \frac{\alpha}{4}(B^4 - a^4)\right]$ $\alpha = \frac{h - h_1}{2b}$ Pour les doubles T normalisés $\alpha \approx \frac{1}{6}$	$W_x = \frac{1}{6H}\left[BH^3 - \frac{1}{4\alpha}(h^4 - h_1^4)\right]$ $W_y = \frac{1}{6B}\left[B^3(H - h) + h_1 a^3 + \frac{\alpha}{4}(B^4 - a^4)\right]$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = \frac{BH^3 - bh^3}{12}$	$W_x = \frac{BH^3 - bh^3}{6H}$	$i_x = \sqrt{\frac{BH^3 - bh^3}{12(BH - bh)}}$
$J_x = \frac{BH^3 + bh^3}{12}$	$W_x = \frac{BH^3 + bh^3}{6H}$	$i_x = \sqrt{\frac{BH^3 + bh^3}{12(BH + bh)}}$

Forme de la section	Aire de la section F	Coordonnées des points extrêmes de la section
Croisillon x-x et y-y sont des axes centraux principaux	$F = Hb + (B - b)\,h$	$x_1 = \dfrac{B}{2}$ $y_1 = \dfrac{H}{2}$
Croisillon à parois minces x-x et y-y sont des axes centraux principaux	$F = h\delta + (b - \delta)\,\delta$	$x_1 = \dfrac{b}{2}$ $y_1 = \dfrac{h}{2}$

Moments d'inertie: axiaux: J_x, J_y; centrifuge: J_{xy}; polaire: J_p; en torsion libre: J_t	Moments résistants: axiaux: W_x, W_y; polaire: W_p et en torsion libre: W_t	Rayons d'inertie $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = \frac{bH^3 + (B-b)\,h^3}{12}$ $J_y = \frac{hB^3 + (H-h)\,b^3}{12}$	$W_x = \frac{bH^3 + (B-b)h^3}{6H}$ $W_y = \frac{hB^3(H-h)\,b^3}{6B}$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = \frac{1}{12}\,[h^3\delta + \delta^3(b-\delta)]$ $J_y = \frac{1}{12}\,[b^3\delta + \delta^3(h-\delta)]$	$W_x = \frac{h^3\delta + \delta^3\,(b-\delta)}{6h}$ $W_y = \frac{b^3\delta + \delta^3(h-\delta)}{6b}$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$

Forme de la section	Aire de la section F	Coordonnées des points extrêmes de la section
Double T asymétrique en rectangles x-x et y-y sont des axes centraux principaux	$F = bc_1 + a(h + h_1) +$ $+ Bc$	$b_1 = b - a$ $B_1 = B - a$ $x_1 = \frac{B}{2}$ $y_1 = \frac{1}{2} \times$ $\times \frac{aH^2 + B_1c^2 + b_1c_1(2H - c_1)}{aH + B_1c + b_1c_1}$ $y'_1 = H - y_1$ $h = y_1 - c$ $h_1 = y'_1 - c_1$

Moments d'inertie: axiaux: J_x, J_y; centrifuge: J_{xy}; polaire: J_p; en torsion libre J_t	Moments résistants: axiaux: W_x, W_y; polaire: W_p et en torsion libre: W_t	Rayons d'inertie $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = \frac{1}{3}\left(By_1^3 - B_1h^3 + by_1^3 - b_1h_1^3\right)$ $J_y = \frac{1}{12}\left[B^3c + b^3c_1 + a^3(h + h_1)\right]$	$W_{xs} = \frac{J_x}{y_1'}$ (pour les fibres supérieures) $W_{xi} = \frac{J_x}{y_1}$ (pour les fibres inférieures) $W_y = \frac{1}{6B}[B^3c + b^3c_1 + a^3(h + h_1)]$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$

Forme de la section	Aire de la section F	Coordonnées des points extrêmes de la section
Profilé en T symétrique en rectangles x-x et y-y sont des axes centraux principaux	$F = (B - b)\,c + bh$	$x_1 = \frac{B}{2}$ $y_1' = \frac{1}{2} \times$ $\times\ \frac{(B - b)\,c^2 + bh^2}{(B - b)\,c + bh}$ $y_1 = h - y_1'$

Moments d'inertie: axiaux: J_x, J_y; centrifuge: J_{xy}; polaire: J_p; en torsion libre J_t	Moments résistants: axiaux: W_x, W_y; polaire: W_p et en torsion libre: W_t	Rayons d'inertie $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = J_{x_2} - y_1'^2 F$ $J_{x_2} = \frac{1}{3}[(B-b)c^3 + bh^3]$ $J_y = \frac{1}{12}[B^3c + b^3(h-c)]$ Outre cela, $J_x = \beta \frac{Bh^3}{12}$, β étant déterminé à partir du graphique β 0,5 0,4 0,3 0,2 — 0,1 0,2 $c\,h$	$W_{x2} = \frac{J_x}{y_1'} = \frac{J_{x_2}}{y_1'} - y_1' F$ (pour les fibres supérieures) $W_{x1} = \frac{J_x}{y_1} = \frac{J_x}{h - y_1'}$ (pour les fibres inférieures) $W_y = \frac{1}{6B}[B^3c + b^3(h-c)]$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} = \frac{1}{2} \times \sqrt{\frac{(B^3-b^3)c + b^3h}{3[(B-b)c + bh]}}$

Forme de la section	Aire de la section F	Coordonnées des points extrêmes de la section
Section asymétrique en rectangles x-x est l'axe central	$F = aH + bc$	$y_1 = \frac{aH^2 + bc^2}{2(aH + bc)}$ $y_1' = H - y_1 = \frac{aH^2 + bc(2H - c)}{2(aH + bc)}$
Section en auge x-x et y-y sont des axes centraux principaux	$F = Bh + 2b(H - h)$	$x_1 = \frac{B}{2}$ $y_1 = \frac{Bh^2 + 2b(H^2 - h^2)}{2[Bh + 2b(H - h)]}$ $y_1' = H - y_1$
Culée aux murs en retour x-x et y-y sont des axes centraux principaux	$F = BH - \frac{a + b}{2} h$	$x_1 = \frac{B}{2}$ $y_1 = \frac{3BH^2 - h^2(b + 2a)}{6BH - 3h(a + b)}$ $y_1' = H - y_1$

Moments d'inertie: axiaux: J_x, J_y; centrifuge: J_{xy}; polaire: J_p; en torsion libre: J_t	Moments résistants: axiaux: W_x, W_y; polaire: W_p et en torsion libre: W_t	Rayons d'inertie $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = \frac{1}{3}(By_1^3 - bt^3 + ay_1'^3)$	$W_{x1} = \frac{J_x}{y_1}$ (pour les fibres inférieures) $W_{x2} = \frac{J_x}{y_1'} = \frac{J_x}{H - y_1}$ (pour les fibres supérieures) $W_{x1} > W_{x2}$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$
$J_x = \frac{Bh^3 + 2b(H-h)^3}{12} + Bh\left(y_1 - \frac{h}{2}\right)^2 + 2b(H-h)\left(\frac{H-h}{2} + h - y_1\right)^2$ $J_y = \frac{B^3H - (H-h)(B-2b)^3}{12}$	$W_x = \frac{J_x}{y_1}$ (pour les fibres inférieures) $W_x = \frac{J_x}{y_1'}$ (pour les fibres supérieures) $W_y = \frac{B^3H - (H-h)(B-2b)^3}{6B}$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = J_{x_2} - Fy_1^2$ $J_{x_2} = \frac{BH^3}{3} - \frac{h^3}{12}(b + 3a)$ $J_y = \frac{HB^3}{12} - \frac{h}{48} \times \frac{b^4 - a^4}{b - a}$	$W_x = \frac{J_x}{y_1}$ (pour les fibres inférieures) $W_x = \frac{J_x}{y_1'}$ (pour les fibres supérieures) $W_y = \frac{HB^2}{6} - \frac{h}{24B} \cdot \frac{b^4 - a^4}{b - a}$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$

Forme de la section	Aire de la section F	Coordonnées des points extrêmes de la section
Cornière à ailes égales	$F = t(2h - t)$	$x_1 = y_1 = \frac{h^2 + t(h - t)}{2(2h - t)}$ $x_1' = y_1' = h - x_1 = h - y_1$
Cornière à ailes égales	$F = t(2h - t)$	$y_1 = \frac{h + t - 2c}{\sqrt{2}}$ $y_1' = \frac{h^2 + ht - t^2}{(2h - t)\sqrt{2}}$ $c = y_1' \frac{\sqrt{2}}{2}$

Moments d'inertie: axiaux: J_x, J_y; centrifuge: J_{xy}; polaire: J_p; en torsion libre: J_t	Moments résistants: axiaux: W_x, W_y; polaire: W_p et en torsion libre: W_t	Rayons d'inertie $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = J_y = \frac{1}{3}[t(h - y_1)^3 + h y_1^3 - (h - t)(y_1 - t)^3]$ $J_{x_2} = \frac{t(2h - 3t)(h^2 + t^2)}{6}$ $J_{y_2} = \frac{7h^4 - 5(h - t)^4}{12} -$ $- 2h^2 y_1(h + y_1) +$ $+ 2(h - t)(h - y_1)(y_1 + t) -$ $- 4h y_1(h - t)^2$	$W_x = W_y = \frac{J_x}{y_1}$ (pour les fibres inférieures et les fibres gauches) $W'_x = W_y = \frac{J_x}{y'_1}$ (pour les fibres supérieures et les fibres droites)	$i_{min} = i_{y_2} =$ $= \sqrt{\frac{J_{y_2}}{F}}$
$J_x = \frac{1}{3}\left[2c^4 - 2(c - t)^4 + t\left(h - 2c + \frac{t}{2}\right)^3\right]$ $J_y = \frac{h^4 - (h - t)^4}{12}$	$W_{xs} = \frac{J_x}{y'_1}$ (pour les fibres supérieures) $W_{xi} = \frac{J_x}{y_1}$ (pour les fibres inférieures)	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$

Forme de la section	Aire de la section F	Coordonnées des points extrêmes de la section
Cornière à ailes inégales	$F = t(b + h_1) = t(h + b_1)$	$x_1 = \dfrac{b^2 + h_1 t}{2(b + h_1)}$ $x_1' = b - x_1 = \dfrac{b^2 + h_1(2b - t)}{2(b + h_1)}$ $y_1 = \dfrac{h^2 + b_1 t}{2(h + b_1)}$ $y_1' = h - y_1 = \dfrac{h^2 + b_1(2h - t)}{2(h + b_1)}$
Section en Z	$F = ht_1 + 2t(b - t_1)$	$x_1 = b - \dfrac{t_1}{2}$ $y_1 = \dfrac{h}{2}$

Moments d'inertie: axiaux: J_x, J_y; centrifuge: J_{xy}; polaire: J_p; en torsion libre: J_t	Moments résistants: axiaux: W_x, W_y; polaire: W_p et en torsion libre: W_t	Rayons d'inertie $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = \frac{1}{3}[t(h - y_1)^3 + b y_1^3 - b_1(y_1 - t)^3]$ $J_y = \frac{1}{3}\left[t(b - x_1)^3 + h x_1^3 - h_1(x_1 - t)^3\right]$ $J_{xy} = -\frac{b b_1 h h_1 t}{4(b + h_1)} = -\frac{b b_1 h h_1 t}{4(h + b_1)}$	$W_{xs} = \frac{J_x}{y_1'}$ (pour les fibres supérieures) $W_{xi} = \frac{J_x}{y_1}$ (pour les fibres inférieures) $W_{yd} = \frac{J_y}{x_1'}$ (pour les fibres droites) $W_{yg} = \frac{J_y}{x_1}$ (pour les fibres gauches)	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}} = 0{,}29\,h$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}} = 0{,}32b$
$J_x = \frac{bh^3 - (b - t_1)(h - 2t)^3}{12}$ $J_y = \frac{ht_1^3 + 6tb^2(b - t_1) + 2t(b - t_1)^3}{12}$ $J_{x_\alpha} = \frac{J_x \cos^2\alpha - J_y \sin^2\alpha}{\cos 2\alpha}$ $J_{y_\alpha} = \frac{J_y \cos^2\alpha - J_x \sin^2\alpha}{\cos 2\alpha}$ $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{bt(b - t_1)(h - t)}{J_x - J_y}$	$W_x = \frac{b\,h^3 - (b - t_1)(h - 2t)^3}{6h}$ $W_y = \frac{ht_1^3 + 6tb^2(b - t_1) + 2t(b - t_1)^3}{6(2b - t_1)}$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$

Forme de la section	Aire de la section F	Coordonnées des points extrême de la sections
Triangle	$F = \frac{1}{2} bh$	$y_1 = \frac{1}{3} h$ $y_1' = \frac{2}{3} h$ $d = \frac{1}{3} (x_1' - x_1)$

Moments d'inertie: axiaux: J_x, J_y; centrifuge: J_{xy}; polaire: J_p; en torsion libre: J_t	Moments résistants: axiaux: W_x, W_y; polaire: W_p et en torsion libre: W_t	Rayons d'inertie $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = \frac{bh^3}{36} = \frac{Fh^2}{18}$ $J_{x_2} = \frac{bh^3}{12} = \frac{Fh^2}{6}$ $J_{x_3} = \frac{bh^3}{4} = \frac{Fh^2}{2}$ $J_y = \frac{bh(b^2 - x_1' x_1)}{36} = \frac{F(b^2 - x_1' x_1)}{18}$ $J_{y_2} = \frac{h(x_1'^3 + x_1^3)}{12}$ $J_p = \frac{bh}{36}(h^2 + x_1'^2 + x_1' x_1 + x_1^2)$ $J_{pA} = \frac{h}{12}(3bh^2 + x_1'^3 + x_1^3)$	$W_{x_1} = \frac{bh^2}{12}$ (pour les fibres inférieures) $W_{x_2} = \frac{bh^2}{24}$ (pour les fibres supérieures) $W_{yd} = \frac{bh(b^2 - x_1' x_1)}{36 x_1}$ (pour les fibres droites) $W_{yg} = \frac{bh(b^2 - x_1' x_1)}{36 x_1'}$ (pour les fibres gauches)	$i_x = \frac{h}{3\sqrt{2}} = 0,2357\ h$ $i_y = \frac{1}{3\sqrt{2}} \times \sqrt{b^2 - x_1' x_1} =$ $= 0,2357\sqrt{b^2 - x_1' x_1}$
Pour un triangle équilatéral de côté b et de hauteur h		
$J_y = J_{y_2} = \frac{hb^3}{48} = \frac{Fb^2}{24}$; $J_t = \frac{h^4}{15\sqrt{3}} = \frac{h^4}{25,981} =$ $= \frac{3}{80}\,\frac{b^4}{\sqrt{3}} = \frac{b^4}{46,188}$	$W_{yd} = W_{yg} = \frac{hb^2}{12}$; $W_t = 0,05\ b^3 =$ $= \frac{h^3}{7,5\sqrt{3}} = \frac{h^3}{12,99} = \frac{2J_t}{h}$	$i_y = \frac{b}{6}\sqrt{\frac{3}{2}} =$ $= 0,204\ b$
Pour un triangle isocèle de base b, de hauteur h, avec un angle au sommet $\alpha < 15°$		
$J_t = \frac{1}{12} hb^3 - 0,105b^4$	$W_t = \frac{1}{12} hb^2 - 0,105b^3 =$ $= \frac{J_t}{h}$	

Forme de la section	Aire de la section F	Coordonnées des points extrêmes de la section
Triangle rectangle	$F = \frac{1}{2} bh$	$x_1' = \frac{1}{3} b$ $x_1 = \frac{2}{3} b$ $y_1 = \frac{1}{3} h$ $y_1' = \frac{2}{3} h$

Moments d'inertie: axiaux: J_x, J_y; centrifuge: J_{xy}; polaire: J_p; en torsion libre: J_t	Moments résistants: axiaux: W_x, W_y; polaire: W_p et en torsion libre: W_t	Rayons d'inertie $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = \frac{bh^3}{36} = \frac{Fh^2}{18}$ $J_{x_2} = \frac{bh^3}{12} = \frac{Fh^2}{6}$ $J_{x_3} = \frac{bh^3}{4} = \frac{Fh^2}{2}$ $J_y = \frac{b^3h}{36} = \frac{Fb^2}{18}$ $J_{y_2} = \frac{b^3h}{12} = \frac{Fb^2}{6}$ $J_{xy} = -\frac{b^2h^2}{72}$ $J_{x_2y_2} = \frac{b^2h^2}{24}$ $J_{x_3y_2} = -\frac{b^2h^2}{8}$ $J_p = \frac{bh}{36}(h^2 + b^2) = \frac{bhc^2}{36}$ $c^2 = h^2 + b^2$ $J_{pA} = \frac{bh}{12}(h^2 + b^2) = \frac{bhc^2}{12}$ $J_{pB} = \frac{bh}{12}(3h^2 + b^2)$	$W_{xi} = \frac{bh^2}{12}$ (pour les fibres inférieures) $W_{xs} = \frac{bh^2}{24}$ (pour les fibres supérieures) $W_{yg} = \frac{b^2h}{12}$ (pour les fibres gauches) $W_{yd} = \frac{b^2h}{24}$ (pour les fibres droites)	$i_x = \frac{h}{3\sqrt{2}} = 0{,}2357h$ $i_y = \frac{b}{3\sqrt{2}} = 0{,}2357b$

Forme de la section	Aire de la section F	Coordonnées des points extrêmes de la section
Trapèze x-x est l'axe central	$F = \frac{1}{2}(b_1 + b)\,h$	$y_1 = \frac{b + 2b_1}{3(b + b_1)}\,h$ $y_1' = \frac{2b + b_1}{3(b + b_1)}\,h$ Pour un trapèze isocèle $y_1' = \frac{3b_1 + 2b_c}{3(2b_1 + b_c)}\,h$ $x_1 = \frac{b}{2}$ Pour un trapèze sous forme

Moments d'inertie axiaux: J_x, J_y; centrifuge J_{xy}; polaire: J_p; en torsion libre: J_t	Moments résistants: axiaux: W_x, W_y; polaire: W_p et en torsion libre: W_t	Rayons d'inertie $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = \frac{h^3(b^2+4bb_1+b_1^2)}{36(b+b_1)} = \frac{Fh^2(b^2+4bb_1+b_1^2)}{18(b+b_1)^2}$ $J_{x_2} = \frac{h^3(b+3b_1)}{12} = \frac{Fh^2(b+3b_1)}{6(b+b_1)}$ $J_{x_3} = \frac{h^3(3b+b_1)}{12} = \frac{Fh^2(3b+b_1)}{6(b+b_1)}$	$W_{xi} = \frac{h^2(b^2+4bb_1+b_1^2)}{12(b+2b_1)}$ (pour les fibres inférieures) $W_{xs} = \frac{h^2(b^2+4bb_1+b_1^2)}{12(2b+b_1)}$ (pour les fibres supérieures)	$i_x = \frac{h}{6(b+b_1)} \times$ $\times \sqrt{2(b^2+4bb_1+b_1^2)}$
ayant pour base supérieure b_1 et pour base inférieure $b_1 + b_0 = b$		
$J_x = \frac{h^3(6b_1^2+6b_1b_0+b_0^2)}{36(2b_1+b_0)}$ $J_y = \frac{h}{48} \cdot \frac{b^4-b_1^4}{b-b_1}$	$W_{xs} = \frac{h^2(6b_1^2+6b_1b_0+b_0^2)}{12(3b_1+2b_0)}$ $W_y = \frac{h}{24} \cdot \frac{b^4-b_1^4}{b^2-bb_1}$	$i_x = \frac{h}{6(2b_1+b_0)} \times$ $\times \sqrt{2(6b_1^2+6b_1b_0+b_0^2)}$ $i_y = \sqrt{\frac{b^2+b_1^2}{24}}$
de coin avec pour grande base b, b_1 pour petite base et une hauteur $h > 4b$		
$J_t = \frac{h(b^4-b_1^4)}{12(b-b_1)} - 0{,}105(b^4+b_1^4)$	$W_t = \frac{J_t}{b} = \frac{h(b^4-b_1^4)}{12b(b-b_1)} - 0{,}105\,\frac{b^4+b_1^4}{b}$	

Forme de la section	Aire de la section F	Coordonnées des points extrêmes de la section
Losange creux	$F = \frac{1}{2}(ab - a_1b_1)$	$x_1 = \frac{a}{2}$ $y_1 = \frac{b}{2}$
Cercle Tout axe central est principal	$F = \frac{\pi d^2}{4} = \pi r^2 \approx$ $\approx 0{,}785\, d^2$	$x_1 = y_1 = \frac{d}{2} = r$

Moments d'inertie: axiaux: J_x, J_y; centrifuge: J_{xy}; polaire: J_p; en torsion libre: J_t	Moments résistants: axiaux: W_x, W_y; polaire: W_p et en torsion libre: W_t	Rayons d'inertie $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = \frac{ab^3 - a_1b_1^3}{48}$ $J_y = \frac{a^3b - a_1^3 b_1}{48}$	$W_x = \frac{ab^3 - a_1b_1^3}{24b}$ $W_y = \frac{a^3b - a_1^3 b_1}{24a}$	$i_x = \sqrt{\frac{ab^3 - a_1b_1^3}{24(ab - a_1b_1)}}$ $i_y = \sqrt{\frac{a^3b - a_1^3 b_1}{24(ab - a_1b_1)}}$
$J_x = J_y = \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi r^4}{4} =$ $= \frac{Fd^2}{16} = \frac{Fr^2}{4} \approx 0{,}05\ d^4 \approx$ $\approx 0{,}785\ r^4$ $J_p = J_t = 2J_x = 2J_y =$ $= \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi r^4}{2} \approx 0{,}1\ d^4 \approx$ $\approx 1{,}57\ r^4$	$W_x = W_y = \frac{\pi d^3}{32} = \frac{\pi r^3}{4} \approx$ $\approx 0{,}1 d^3 \approx 0{,}785\ r^3$ $W_p = W_t = \frac{\pi d^3}{16} = \frac{\pi r^3}{2} \approx$ $\approx 0{,}2 d^3 \approx 1{,}57\ r^3$	$i_x = i_y = \frac{d}{4} = \frac{r}{2}$ L'ellipse d'inertie est un cercle

Forme de la section	Aire de la section F	Coordonnées des points extrêmes de la section
Anneau Tout axe central est principal	$F = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{4} =$ $= \frac{\pi D^2}{4}(1 - \alpha^2) \approx$ $\approx 0{,}785\ D^2(1 - \alpha^2)$ $\alpha = \frac{d}{D}$	$x_1 = y_1 = \frac{D}{2}$
Disque doté d'une ouverture non concentrique y-y est l'axe central principal	$F = \frac{\pi D^2}{4}(1 - \alpha^2)$ $\alpha = \frac{d}{D}$	$x_1 = \frac{D}{2}$ $y_0 = \beta D \frac{\alpha^2}{1 - \alpha^2}$ $y_1 = \frac{D}{2}\,\frac{1 - \alpha^2(1 - 2\beta)}{1 - \alpha^2}$ $y_1' = \frac{D}{2}\,\frac{1 - \alpha^2(1 + 2\beta)}{1 - \alpha^2}$ $\beta = \frac{a}{D}$

Moments d'inertie: axiaux: J_x, J_y; centrifuge: J_{xy}; polaire: J_p; en torsion libre J_t	Moments résisttants: axiaux: W_x, W_y; polaire: W_p et en torsion libre: W_t	Rayons d'inertie $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = J_y = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{64} =$ $= \frac{\pi D^4}{64}(1 - \alpha^4) =$ $= \frac{F(D^2 + d^2)}{16} = \frac{FD^2}{16}(1+\alpha^2) \approx$ $\approx 0,05\ D^4(1 - \alpha^4)$ $J_p = J_t = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32} =$ $= \frac{\pi D^4}{32}(1 - \alpha^4) \approx$ $\approx 0,1 D^4(1 - \alpha^4)$	$W_x = W_y =$ $= \frac{\pi(D^4 - d^4)}{32D} =$ $= \frac{\pi D^3}{32}(1 - \alpha^4) \approx$ $\approx 0,1 D^3(1 - \alpha^4)$ $W_p = W_t =$ $= \frac{\pi(D^4 - d^4)}{16D} =$ $= \frac{\pi D^3}{16}(1 - \alpha^4) \approx$ $\approx 0,2\ D^3(1 - \alpha^4)$	$i_x = i_y =$ $= \frac{1}{4}\sqrt{D^2 + d^2} =$ $= \frac{D}{4}\sqrt{1 + \alpha^2}$ L'ellipse d'inertie est un cercle
$J_x = \frac{\pi D^4}{64}\left(1 - \alpha^4 - 16\frac{\alpha^2\beta^2}{1-\alpha^2}\right)$ $J_y = \frac{\pi D^4}{64}(1 - \alpha^4)$	$W_x = \frac{\pi D^3}{32} \times$ $\times \frac{(1-\alpha^2)(1 - \alpha^4) - 16\alpha^2\beta^2}{1 - \alpha^2(1 + 2\beta)}$ (pour les fibres supérieures) $W_x = \frac{\pi D^3}{32} \times$ $\times \frac{(1-\alpha^2)(1-\alpha^4) - 16\alpha^2\beta^2}{1 - \alpha^2(1 - 2\beta)}$ (pour les fibres inférieures) $W_y = \frac{\pi D^3}{32}(1 - \alpha^4)$	$i_x = \frac{D}{4} \times$ $\times \sqrt{1 + \alpha^2 - 16\left(\frac{\alpha\beta}{1-\alpha}\right)^2}$ $i_y = \frac{D}{4}\sqrt{1 + \alpha^2}$

Forme de la section	Aire de la section F	Coordonnées des points extrêmes de la section
Disque doté d'une entaille circulaire x-x est l'axe central principal	—	—
Anneau à paroi mince $\delta < 0{,}1\,d$ Tout axe central est principal	$F = \pi\delta d$	$x_1 = y_1 = \frac{d}{2} = r$

Moments d'inertie: axiaux: J_x, J_y; centrifuge J_{xy}; polaire: J_p; en torsion libre: J_t	Moments résistants: axiaux: W_x, W_y; polaire: W_p et en torsion libre: W_t	Rayons d'inertie $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_t = k_1 R^4$	$W_t = \frac{R^3}{k_2}$	—

$\frac{r}{R}$	0	0,005	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,5
k_1	1,57	1,56	1,56	1,46	1,22	0,92	0,63	0,38	0,07
k_2	0,64	1,22	1,22	1,23	1,31	1,52	1,91	2,63	7,14

$J_x = J_y = \frac{\pi\delta d^3}{8} =$ $= \pi\delta r^3 = \frac{Fd^2}{8} \approx 0{,}393\delta d^3$ $J_p = J_t = \frac{\pi\delta d^3}{4} = 2\pi\delta r^3 \approx$ $\approx 0{,}785\ \delta d^3$	$W_x = W_y = \frac{\pi\delta d^2}{4} =$ $= \pi\delta r^2 \approx 0{,}785\ \delta d^2$ $W_p = W_t \approx \frac{\pi\delta d^2}{2} =$ $= 2\pi\delta r^2 = 1{,}57\delta d^2$	$i_x = i_y = \frac{d}{2\sqrt{2}} =$ $= \frac{r}{\sqrt{2}} \approx 0{,}353\ d$ L'ellipse d'inertie est un cercle

Forme de la section	Aire de la section F	Coordonnées des points extrêmes de la section
Anneau circulaire à paroi mince, non fermé $\delta \ll d$ x-x est l'axe central principal	—	$x_1 = y_1 = \frac{d + \delta}{2}$
Demi-cercle $d = 2r$ y-y est l'axe central principa	$F = \frac{\pi d^2}{8} = \frac{\pi r^2}{2} \approx$ $\approx 0,393 d^2$	$x_1 = \frac{d}{2} = r$ $y_1 = \frac{2}{3} \frac{d}{\pi} =$ $= \frac{4}{3} \frac{r}{\pi} \approx 0,212\, d$ $y'_1 \approx 0,288\, d$
Quart de cercle	$F = \frac{\pi r^2}{4} \approx 0,785\, r^2$	$x_1 = y_1 = \frac{4r}{3\pi} \approx 0,424\, r$ $x'_1 = y'_1 \approx 0,576\, r$

Moments d'inertie: axiaux: J_x, J_y; centrifuge: J_{xy}; polaire: J_p; en torsion libre: J_t	Moments résistants: axiaux: W_x, W_y; polaire: W_p et en torsion libre: W_t	Rayons d'inertie $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_t = \frac{\pi d \delta^3}{3}$	$W_t = \frac{(\pi d \delta)^2}{3\pi d + 1{,}8\delta} \approx$ $\approx \frac{\pi d \delta^2}{3}$ Dans les points appartenant aux contours intérieur et extérieur de la section $\tau_{max} = \frac{3\pi d + 1{,}8\delta}{(\pi d \delta)^2} M_t$	–
$J_x \approx \frac{d^4}{16}\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) \approx$ $\approx 0{,}00686\ d^4 \approx 0{,}11 r^4$ $J_y = J_{x_2} = \frac{\pi d^4}{128} = \frac{\pi r^4}{8} =$ $= \frac{Fd^2}{16} = \frac{Fr^2}{4} \approx$ $\approx 0{,}0246\ d^4 = 0{,}393 r^4$	$W_x \approx 0{,}0324 d^3 \approx 0{,}259 r^3$ (pour les fibres inférieures) $W_x \approx 0{,}0239 d^3 \approx 0{,}191 r^3$ (pour les fibres supérieures) $W_y = \frac{\pi d^3}{64} = \frac{\pi r^3}{8} \approx$ $\approx 0{,}05 d^3 \approx 0{,}393 r^3$	$i_x \approx 0{,}132\ d$ $i_y = \frac{d}{4}$
$J_{x_{max}} \approx 0{,}0714 r^4$ $J_{y_{min}} \approx 0{,}0384\ r^4$ $J_{x_2} = J_{y_2} \approx 0{,}0549\ r^4$ $J_{x_3} = J_{y_3} = \frac{\pi r^4}{16} \approx$ $\approx 0{,}196\ r^4$ $J_{x_2 y_2} = -\ 0{,}0165\ r^4$ $J_{x_3 y_3} = \frac{r^4}{8}$	$W_{x_2} = W_{y_2} =$ $= \frac{\pi^2 r^3}{48} \cdot \frac{9\pi^2 - 64}{3\pi - 4} \approx$ $\approx 0{,}923\ r^3$ (pour les fibres supérieures et les fibres droites) $W_{x_2} = W_{y_2} =$ $= \frac{\pi^2 r^3}{192}(9\pi^2 - 64) \approx$ $\approx 1{,}245 r^3$ (pour les fibres inférieures et les fibres gauches)	$i_{x_{max}} \approx 0{,}302 r$ $i_{y_{min}} \approx 0{,}221 r$

Forme de la section	Aire de la section F	Coordonnées des points extrêmes de la section
Secteur circulaire y-y est l'axe central principal	$F = \frac{sr}{2} = \alpha r^2$ $s = 2r\alpha$ $\alpha = \frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ}$	$x_1 = \frac{b}{2} = r\sin\alpha$ $y_1 = \frac{2}{3}\cdot\frac{rb}{s} = \frac{2r\sin\alpha}{3\alpha} = 38{,}2\,\frac{r\sin\alpha}{\alpha^\circ}$ $y_1' = r\left(1 - \frac{2\sin\alpha}{3\alpha}\right)$ $b = 2r\sin\alpha$
Segment circulaire y-y est l'axe central principal	$F = \frac{r^2}{2}(2\alpha - \sin 2\alpha)$ $\alpha = \frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ}$	$x_1 = \frac{b}{2}$ $b = 2r\sin\alpha$ $y_0 = \frac{4r\sin^3\alpha}{3(2\alpha - \sin 2\alpha)}$ $y_1 = r\left(\frac{4}{3}\,\frac{\sin^3\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha} - \cos\alpha\right)$ $y_1' = r\left(1 - \frac{4}{3} \times \frac{\sin^3\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}\right)$

Moments d'inertie: axiaux: J_x, J_y; centrifuge: J_{xy}; polaire: J_p; en torsion libre: J_t	Moments résistants: axiaux: W_x, W_y; polaire: W_p et en torsion libre: W_t	Rayons d'inertie $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = \frac{r^4}{8}\left(2\alpha + \sin 2\alpha - \frac{32\sin^2\alpha}{9\alpha}\right) = \frac{Fr^2}{8\alpha}\left(2\alpha + \sin 2\alpha - \frac{32\sin^2\alpha}{9\alpha}\right)$ $J_{x_2} = \frac{r^4}{8}(2\alpha + \sin 2\alpha)$ $J_y = \frac{r^4}{8}(2\alpha - \sin 2\alpha) = \frac{Fr^2}{8\alpha}(2\alpha - \sin 2\alpha)$	$W_x = \frac{r^3}{8} \times \frac{2\alpha + \sin 2\alpha - \frac{32\sin^2\alpha}{9\alpha}}{1 - \frac{2\sin\alpha}{3\alpha}}$ (pour les fibres supérieures) $W_x = \frac{3r^3\alpha}{16\sin\alpha}\left(2\alpha + \sin 2\alpha - \frac{32\sin^2\alpha}{9\alpha}\right)$ (pour les fibres inférieures) $W_y = r^3\frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{\sin\alpha}$	$i_x = \frac{r}{2} \times \sqrt{1 + \frac{\sin^2\alpha}{2\alpha} - \frac{16\sin^2\alpha}{9\alpha^2}}$ $i_y = \frac{r}{2}\sqrt{1 - \frac{\sin 2\alpha}{2\alpha}}$
$J_x = \frac{r^4}{8}(2\alpha - \sin 2\alpha + 4\cos\alpha\sin^3\alpha) = \frac{Fr^2}{4}\left(1 + \frac{4\cos\alpha\sin^3\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}\right)$ $J_y = \frac{r^4}{8}\left(2\alpha - \sin 2\alpha - \frac{4}{3}\cos\alpha\sin^3\alpha\right) = \frac{Fr^2}{4}\left(1 - \frac{4}{3} \times \frac{\cos\alpha\sin^3\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}\right)$ $J_{x_2} = \frac{r^4}{8}(2\alpha - \sin 2\alpha\cos 2\alpha)$	$W_x = \frac{J_x}{y_1}$ (pour les fibres inférieures) $W_x = \frac{J_x}{y_1'}$ (pour les fibres supérieures) $W_y = \frac{r^3}{8\sin\alpha}\left(2\alpha - \sin 2\alpha - \frac{4}{3}\cos\alpha\sin^3\alpha\right)$	$i_x = \frac{r}{2} \times \sqrt{1 + \frac{4\cos\alpha\sin^3\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}}$ $i_y = \frac{r}{2} \times \sqrt{1 - \frac{4}{3}\frac{\cos\alpha\sin^3\alpha}{2\alpha - \sin 2\alpha}}$

Forme de la section	Aire de la section F	Coordonnées des points extrêmes de la section
Demi-anneau y-y est l'axe central principal	$F = \frac{\pi(D^2 - d^2)}{8} =$ $= \frac{\pi D^2}{8}(1 - \alpha^2) \approx$ $\approx 0{,}393D^2(1 - \alpha^2)$ $\alpha = \frac{d}{D}$	$x_1 = \frac{D}{2}$ $y_1 = \frac{2}{3\pi}\,\frac{D^2 + Dd + d^2}{D + d} =$ $= \frac{2}{3}\,\frac{D}{\pi}\,\frac{1 + \alpha + \alpha^2}{1 + \alpha} \approx$ $\approx 0{,}212\,D\,\frac{1 + \alpha + \alpha^2}{1 + \alpha}$ $y_1' \approx D\left(0{,}288 - 0{,}212\,\frac{\alpha^2}{1 + \alpha}\right)$
Secteur d'anneau y-y est l'axe central principal	$F = \gamma(R^2 - r^2) =$ $= \gamma R^2(1 - \alpha^2)$ $\gamma = \frac{\pi\gamma^\circ}{180^\circ}$ $\alpha = \frac{r}{R}$	$x_1 = R\sin\gamma$ $y_1 = \frac{2}{3}\cdot\frac{R^3 - r^3}{R^2 - r^2} \times \frac{\sin\gamma}{\gamma} =$ $= \frac{2}{3}\cdot\frac{R\sin\gamma}{\gamma}\cdot\frac{1 - \alpha^3}{1 - \alpha^2}$ $y_1' = R\left(1 - \frac{2}{3}\,\frac{\sin\gamma}{\gamma} \times \frac{1 - \alpha^3}{1 - \alpha^2}\right)$ $y_1'' = \frac{2R\sin\gamma}{3\gamma} \times \left(\frac{1 - \alpha^3}{1 - \alpha^2} - \frac{3}{2}\alpha\gamma\,\mathrm{cotg}\,\gamma\right)$

Moments d'inertie: axiaux: J_x, J_y; centrifuge: J_{xy}; polaire: J_p; en torsion libre J_t	Moments résistants: axiaux: W_x, W_y; polaire: W_p et en torsion libre: W_t	Rayons d'inertie $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x \approx 0{,}00686(D^4 - d^4) - \frac{0{,}0177 D^2 d^2 (D - d)}{D + d} = 0{,}00686\, D^4 \left(1 - \alpha^4 - 2{,}54\alpha^2 \frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)$ $J_y = \frac{\pi(D^4 - d^4)}{128} = \frac{\pi D^4}{128}(1 - \alpha^4) \approx 0{,}0246\, D^4(1 - \alpha^4)$	$W_x \approx 0{,}00686 D^3 \times \frac{(1-\alpha^4)(1+\alpha) - 2{,}54\alpha^2(1-\alpha)}{0{,}288(1+\alpha) - 0{,}212\alpha^2}$ (pour les fibres supérieures) $W_x \approx 0{,}0324\, D^3 \times \frac{(1-\alpha^4)(1+\alpha) - 2{,}54\alpha^2(1-\alpha)}{1+\alpha+\alpha^2}$ (pour les fibres inférieures) $W_y = \frac{\pi D^3}{64}(1-\alpha^4) \approx 0{,}05\, D^3(1-\alpha^4)$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \frac{1}{4}\sqrt{D^2 + d^2} = \frac{D}{4}\sqrt{1+\alpha^2}$
$J_x = \frac{R^4 - r^4}{8}\left(2\gamma + \sin 2\gamma - \frac{32\sin^2\gamma}{9\gamma}\right) = \frac{R^4}{8}(1-\alpha^4)\left(2\gamma + \sin 2\gamma - \frac{32\sin^2\gamma}{9\gamma}\right) = \frac{FR^2}{8\gamma}(1+\alpha^2)\left(2\gamma + \sin 2\gamma - \frac{32\sin^2\gamma}{9\gamma}\right)$ $J_{x_1} = \frac{R^4 - r^4}{8}(2\gamma + \sin 2\gamma) = \frac{R^4}{8}(1-\alpha^4)(2\gamma + \sin 2\gamma)$ $J_y = \frac{R^4 - r^4}{8}(2\gamma - \sin 2\gamma) = \frac{R^4}{8}(1-\alpha^4)(2\gamma - \sin 2\gamma) = \frac{FR^2}{8\gamma}(1+\alpha^2) \times (2\gamma - \sin 2\gamma)$	$W_x = \frac{J_x}{y'_1}$ (pour les fibres supérieures) $W_x = \frac{J_x}{y''_1}$ (pour les fibres inférieures) $W_y = \frac{R^3}{8}(1-\alpha^4) \times \frac{2\gamma - \sin 2\gamma}{\sin\gamma}$	$i_x = \frac{R}{2} \times \sqrt{(1+\alpha^2)\times\left(1 + \frac{\sin 2\gamma}{2\gamma} - \frac{16\sin^2\gamma}{9\gamma^2}\right)}$ $i_y = \frac{R}{2} \times \sqrt{(1+\alpha^2)\left(1 - \frac{\sin 2\gamma}{2\gamma}\right)}$

Forme de la section	Aire de la section F	Coordonnées des points extrêmes de la section
Secteur d'un anneau à paroi mince $\delta \ll 2r$ y-y est l'axe central principal	$F = 2\alpha r\delta$ $\alpha = \frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ}$	$x_1 = r \sin\alpha$ $y_1 = r\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ $y_1' = r\left(1 - \frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)$ $y_1'' = r\left(\frac{\sin\alpha}{\alpha} - \cos\alpha\right)$
Disque avec méplat $\alpha = \frac{h}{d} > 0{,}5$ y-y est l'axe central principal	—	—

Moments d'inertie: axiaux: J_x, J_y; centrifuge: J_{xy}; polaire: J_p; en torsion libre: J_t	Moments résistants: axiaux: W_x, W_y; polaire: W_p et en torsion libre: W_t	Rayons d'inertie $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = \frac{\delta r^3}{2}\left(2\alpha + \sin 2\alpha - \frac{4\sin^2\alpha}{\alpha}\right) = \frac{Fr^2}{4\alpha}\left(2\alpha + \sin 2\alpha - \frac{4\sin^2\alpha}{\alpha}\right)$ $J_y = \frac{\delta r^3}{2}(2\alpha - \sin 2\alpha) = \frac{Fr^2}{4\alpha}(2\alpha - \sin 2\alpha)$	$W_x \approx \frac{\delta r^2}{2} \times \frac{2\alpha + \sin 2\alpha - \frac{4\sin^2\alpha}{\alpha}}{1 - \frac{\sin\alpha}{\alpha}}$ (pour les fibres supérieures) $W_x \approx \frac{\delta r^2}{2} \times \frac{2\alpha + \sin 2\alpha - \frac{4\sin^2\alpha}{\alpha}}{\frac{\sin\alpha}{\alpha} - \cos\alpha}$ (pour les fibres inférieures) $W_y \approx \frac{\delta r^2}{2} \cdot \frac{2\alpha - \sin 2\alpha}{\sin\alpha}$	$i_x = \frac{r}{2} \times \sqrt{2 + \frac{\sin 2\alpha}{\alpha} - \frac{4\sin^2\alpha}{\alpha^2}}$ $i_y = \frac{r}{2}\sqrt{2 - \frac{\sin 2\alpha}{\alpha}}$
$J_t = \frac{d^4}{16}\left(2{,}6\frac{h}{d} - 1\right) = \frac{d^4}{16}(2{,}6\alpha - 1)$	$W_t = \frac{d^3(2{,}6\alpha - 1)}{8(0{,}3\alpha + 0{,}7)}$	—

Forme de la section	Aire de la section F	Coordonnées des points extrêmes de la section
Disque aux segments pratiqués en haut et en bas x-x et y-y sont des axes centraux principaux	a) $b = d\cos\alpha$ $h = d\sin\alpha$ $F = \frac{d^2}{4}(2\alpha + \sin 2\alpha)$ b) $b = \frac{d}{2}$; $h = 0{,}866d$ $F = 0{,}74\ d^2$ c) $b = \frac{d}{3}$; $h = 0{,}943d$ $F = 0{,}773d^2$	$x_1 = \frac{d}{2}$ $y_1 = \frac{d}{2}\sin\alpha$ $x_1 = \frac{d}{2}$ $y_1 = 0{,}433\ d$ $x_1 = \frac{d}{2}$ $y_1 = 0{,}471\ d$
Disque aux segments pratiqués des quatre côtés x-x et y-y sont des axes centraux principaux	$F = \frac{\pi d^2}{12}\left(1 + \frac{3\sqrt{3}}{\pi}\right) = 0{,}694\ d^2$	$x_1 = y_1 = 0{,}433\ d$

Moments d'inertie: axiaux: J_x, J_y; centrifuge: J_{xy}; polaire: J_p; en torsion libre: J_t	Moments résistants: axiaux: W_x, W_y; polaire: W_p et en torsion libre: W_t	Rayons d'inertie $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = \frac{d^4}{32}\left(\alpha - \frac{\sin 4\alpha}{4}\right)$ $J_y = \frac{d^4}{32}\left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha \cos^2 \alpha}{3}\right)$ $J_x = 0{,}0395 d^4$ $J_y = 0{,}0485\ d^4$ $J_x = 0{,}0461\ d^4$ $J_y = 0{,}049\ d^4$	$W_x = \frac{d^3}{16 \sin \alpha}\left(\alpha - \frac{\sin 4\alpha}{4}\right)$ $W_y = \frac{d^3}{16}\left(\alpha + \frac{\sin 2\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha \cos^2 \alpha}{3}\right)$ $W_x = 0{,}0912\ d^3$ $W_y = 0{,}097\ d^3$ $W_x = 0{,}0978\ d^3$ $W_y = 0{,}098\ d^3$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$ $i_x = 0{,}231\ d$ $i_y = 0{,}256\ d$ $i_x = 0{,}244\ d$ $i_y = 0{,}252\ d$
$J_x = J_y = 0{,}038 d^4$	$W_x = W_y = 0{,}087\ d^3$	$i_x = i_y = 0{,}234\ d$

Forme de la section	Aire de la section F	Coordonnées des points extrêmes de la section
Hexagone régulier *x-x* et *y-y* sont des axes centraux principaux	$F = 0{,}866\ d^2 =$ $= 2{,}598\ R^2$	$y_1 = \dfrac{d}{2}$
Octogone régulier *x-x* et *y-y* sont des axes centraux principaux	$F = 0{,}828\ d^2 =$ $= 4{,}828c^2$	$x_1 = y_1 = \dfrac{d}{2}$

Moments d'inertie: axiaux: J_x, J_y; centrifuge: J_{xy}; polaire: J_p; en torsion libre J_t	Moments résistants: axiaux: W_x, W_y; polaire: W_p et en torsion libre: W_t	Rayons d'inertie $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = J_y = \frac{5\sqrt{3}}{16} R^4 =$ $= 0{,}5413\ R^4 = 0{,}06 d^4$ $J_t = 0{,}533\ F \frac{d^2}{4}$	$W_x = \frac{5}{8} R^3 = 0{,}625\ R^3 =$ $= 0{,}12\ d^3$ $W_y = 0{,}5413\ R^3 = 0{,}06\ d^3$ $W_t = 0{,}436\ F \frac{d}{2}$	$i_x = i_y = 0{,}456\ R =$ $= 0{,}228\ d$
$J_x = J_y = J_{y_2} = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{6} R^4 =$ $= 0{,}638\ R^4 = 0{,}0547\ d^4$ $J_t = 0{,}52\ F \frac{d^2}{4}$	$W_x = W_y = 0{,}6906 R^3 =$ $= 0{,}1095\ d^3$ Par rapport à la diagonale $W_{y_2} = 0{,}638\ R^3 =$ $= 0{,}1012 d^3$ $W_t = 0{,}447\ F \frac{d}{2}$	$i_x = i_y = i_{y_2} =$ $= 0{,}257\ d$

Frome de la section	Aire de la section F	Coordonnées des points extrêmes de la section
Polygone régulier à n côtés	$F = \frac{1}{4} na^2 \operatorname{cotg} \alpha = nr^2 \operatorname{tg} \alpha = \frac{nar}{2}$	$R = \frac{a}{2 \sin \alpha}$ $r = \frac{a}{2 \operatorname{tg} \alpha}$
Disque doté d'une rainure de clavetage y-y est l'axe central principal	$F \approx \frac{\pi d^2}{4} - bt$	$x_1 = y_1 = \frac{d}{2}$

Moments d'inertie: axiaux: J_x, J_y; centrifuge: J_{xy}; polaire: J_p; en torsion libre: J_t	Moments résistants: axiaux: W_x, W_y; polaire: W_p et en torsion libre: W_t	Rayons d'inertie $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = J_{x_2} = \frac{F}{24}(6R^2 - a^2) = \frac{\pi ar}{48}(6R^2 - a^2)$ $J_x = J_{x_2} = \frac{F}{48}(12r^2 + a^2) = \frac{\pi ar}{96}(12r^2 + a^2)$	—	$i_x = \sqrt{\frac{6R^2 - a^2}{24}}$ $i_{x_2} = \sqrt{\frac{12r^2 + a^2}{48}}$
$J_x \approx \frac{\pi d^4}{64} - \frac{bt(d-t)^2}{4}$ $J_t \approx \frac{\pi d^4}{32} - \frac{bt(d-t)^2}{4}$	$W_x \approx \frac{\pi d^3}{32} - \frac{bt(d-t)^2}{2d}$ $W_t \approx \frac{\pi d^3}{16} - \frac{bt(d-t)^2}{2d}$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$

Forme de la section	Aire de la section F	Coordonnées des points extrêmes de la section
Disque doté de deux rainures de clavetage x-x et y-y sont des axes centraux principaux	$F \approx \frac{\pi d^2}{4} - 2bt$	$x_1 = \frac{d}{2}$ $y_1 \approx \frac{d}{2}$
Pile de pont aux arrondis x-x et y-y sont des axes centraux principaux	$F = bh + \pi r^2 =$ $= bh\left(1 + \frac{\pi}{4}\alpha\right)$ $r = \frac{h}{2}$ $\alpha = \frac{h}{b}$	$x_1 = \frac{b+h}{2} = \frac{b}{2}(1+\alpha)$ $y_1 = \frac{h}{2}$

Moments d'inertie: axiaux: J_x, J_y; centrifuge: J_{xy}; polaire: J_p; en torsion libre: J_t	Moments résistants: axiaux: W_x, W_y; polaire: W_p et en torsion libre: W_t	Rayons d'inertie $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x \approx \frac{\pi d^4}{64} - \frac{bt(d-t)^2}{2}$ $J_t \approx \frac{\pi d^4}{32} - \frac{bt(d-t)^2}{2}$	$W_x \approx \frac{\pi d^3}{32} - \frac{bt(d-t)^2}{d}$ $W_t \approx \frac{\pi d^3}{16} - \frac{bt(d-t)^2}{d}$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$
$J_x = \frac{bh^3}{12}\left(1 + \frac{3\pi}{16}\alpha\right)$ $J_y = \frac{hb^3}{12}[1 + 0{,}165\,\alpha^2 +$ $+ 3\pi\alpha(0{,}5 + 0{,}212\alpha)^2]$	$W_x = \frac{bh^2}{6}\left(1 + \frac{3\pi}{16}\alpha\right)$ $W_y = \frac{hb^2}{6(1+\alpha)}[1 +$ $+ 0{,}165\,\alpha^2 +$ $+ 3\pi\alpha\,(0{,}5 + 0{,}212\,\alpha)^2]$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$

Forme de la section	Aire de la section F	Coordonnées des points extrêmes de la section
Ellipse x-x et y-y sont des axes centraux principaux	$F = \pi ab$ $\frac{a}{b} > 1$	$x_1 = b$ $y_1 = a$
Demi-ellipse y-y est l'axe central principal	$F = \frac{\pi ab}{2}$	$x_1 = b$ $y_1 = \frac{4}{3\pi} a$ $y'_1 = \left(1 - \frac{4}{3\pi}\right) a$

Moments d'inertie: axiaux: J_x, J_y; centrifuge: J_{xy}; polaire: J_p; en torsion libre: J_t	Moments résistants: axiaux: W_x, W_y: polaire: W_p et en torsion libre: W_t	Rayons d'inertie $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = \frac{\pi a^3 b}{4} = \frac{Fa^2}{4} \approx 0{,}785\, a^3 b$ $J_y = \frac{\pi ab^3}{4} = \frac{Fb^2}{4} \approx$ $\approx 0{,}785\, ab^3$ $J_p = \frac{\pi ab}{4}(a^2 + b^2) =$ $= \frac{F}{4}(a^2 + b^2)$ $J_t = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2} =$ $= \frac{F^2}{\pi^2(a^2 + b^2)} = \frac{F^4}{4\pi^2 J_p}$	$W_x = \frac{\pi a^2 b}{4} \approx 0{,}785 a^2 b$ $W_y = \frac{\pi ab^2}{4} \approx 0{,}785\, ab^2$ $W_t = \frac{\pi b^2 a}{2}$ Aux extrémités du petit axe $\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{2M_t}{\pi b^2 a}$ Aux extrémités du grand axe $\tau = \frac{b\tau_{max}}{a}$	$i_x = \frac{a}{2}$ $i_y = \frac{b}{2}$
$J_x = ba^3\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right) =$ $= 2Fa^2\left(\frac{1}{8} - \frac{8}{9\pi^2}\right)$ $J_y = \frac{\pi ab^3}{8} = \frac{Fb^2}{4}$	$W_x = \frac{3}{4} ba^2\left(\frac{\pi^2}{8} - \frac{8}{9}\right)$ (pour les fibres inférieures) $W_x = \frac{ba^2\left(\frac{\pi}{8} - \frac{8}{9\pi}\right)}{1 - \frac{4}{3\pi}}$ (pour les fibres supérieures) $W_y = \frac{\pi ab^2}{8} \approx 0{,}329\, ab^2$	$i_x = \frac{a}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{8}{3\pi}\right)^2}$ $i_y = \frac{b}{2}$

Forme de la section	Aire de la section F	Coordonnées des points extrêmes de la section
Quart d'ellipse	$F = \frac{\pi ab}{4}$	$x_1 = \frac{4}{3\pi} b$ $y_1 = \frac{4}{3\pi} a$
Ellipse creux *x-x* et *y-y* sont des axes centraux principaux	$F = \pi(ab - a_1b_1)$	$x_1 = b$ $y_1 = a$ $a - a_1 = b - b_1 = \delta$ $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1} = n > 1$ $\frac{a_1}{a} = \frac{b_1}{b} = \alpha < 1$

Moments d'inertie: axiaux: J_x, J_y; centrifuge: J_{xy}; polaire: J_p; en torsion libre: J_t	Moments resistants: axiaux: W_x, W_y; polaire: W_p et en torsion libre: W_t	Rayons d'inertie $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = ba^3\left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) =$ $= 4Fa^2\left(\frac{1}{16} - \frac{4}{9\pi^2}\right)$ $J_y = ab^3\left(\frac{\pi}{16} - \frac{4}{9\pi}\right) =$ $= 4Fb^2\left(\frac{1}{16} - \frac{4}{9\pi^2}\right)$	$W_{x_{min}} =$ $= \frac{3}{4} ba^2\left(\frac{\pi^2}{16} - \frac{4}{9}\right)$ (pour les fibres inférieures) $W_{y_{min}} =$ $= \frac{3}{4} ab^2\left(\frac{\pi^2}{16} - \frac{4}{9}\right)$ (pour les fibres droites)	$i_x = \frac{a}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{8}{3\pi}\right)^2}$ $i_y = \frac{b}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{8}{3\pi}\right)^2}$
$J_x = \frac{\pi}{4}(a^3 b - a_1^3 b_1) \approx$ $\approx \frac{\pi}{4} a^2(a + 3b)\delta$ $J_y = \frac{\pi}{4}(ab^3 - a_1 b_1^3) \approx$ $\approx \frac{\pi}{4} b^2(b + 3a)\delta$	$W_x = \frac{\pi}{4}\,\frac{a^3 b - a_1^3 b_1}{a} \approx$ $\approx \frac{\pi}{4} a(a + 3b)\delta$ $W_y = \frac{\pi}{4}\,\frac{ab^3 - a_1 b_1^3}{b} \approx$ $\approx \frac{\pi}{4} b(b + 3a)\delta$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$ $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
Ces valeurs approximatives de J et W sont valables si les rapports $\delta : a_1$ et $\delta : b_1$ ne sont pas élevés		
$J_t = \frac{\pi b^4 n^3}{n^2 + 1}(1 - \alpha^4)$	$W_t = \frac{\pi b^3 n}{2}(1 - \alpha^4)$ A l'extrémité du petit demi-axe $\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t}$ A l'extrémité du grand demi-axe $\tau = \frac{\tau_{max}}{n}$ Si l'épaisseur est petite, on peut adopter une distribution uniforme des contraintes dans la section $\tau = \frac{M_t}{2F\delta}$	

Forme de la section	Aire de la section F	Coordonnées des points extrêmes de la section
Segment parabolique y-y est l'axe central principal	$F = \frac{2}{3} bh$	$x_1 = \frac{b}{2}$ $y_1 = \frac{2}{5} h$ $'_1 = \frac{3}{5} h$
Demi-segment parabolique	$F = \frac{bh}{3}$	$x_1 = \frac{3}{16} b$ $x'_1 = \frac{5}{16} b$ $y_1 = \frac{2}{5} h$ $y'_1 = \frac{3}{5} h$

Moments d'inertie: axiaux: J_x, J_y; centrifuge: J_{xy}; polaire: J_p; en torsion libre: J_t	Moments résistants: axiaux: W_x, W_y; polaire: W_p et en torsion libre: W_t	Rayons d'inertie $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = \frac{8}{175} bh^3 = \frac{12Fh^2}{175}$ $J_{x_2} = \frac{16}{105} bh^3 = \frac{8Fh^2}{35}$ $J_{x_3} = \frac{2}{7} bh^3 = \frac{3Fh^2}{7}$ $J_y = \frac{hb^3}{30} = \frac{Fb^2}{20}$	$W_x = \frac{4}{35} bh^2$ (pour les fibres inférieures) $W_x = \frac{8}{105} bh^2$ (pour les fibres supérieures) $W_y = \frac{hb^2}{15}$	$i_x = \frac{2}{5} h \sqrt{\frac{3}{7}}$ $i_y = \frac{b}{2\sqrt{5}}$
$J_x = \frac{4}{175} bh^3 = \frac{12Fh^2}{175}$	$W_{x_{min}} = \frac{2}{35} bh^2$ (pour les fibres inférieures)	$i_x = \frac{2}{5} h \sqrt{\frac{3}{7}}$

Forme de la section	Aire de la section F	Coordonnées des points extrêmes de la section
Triangle circulaire	$F = 0{,}215\ r^2$	$x_1 = y_1 = 0{,}223r$ $x_1' = y_1' = 0{,}777\ r$
Section creuse sous forme de lentille x-x et y-y sont des axes centraux principaux	$F = \alpha\left(1 + \text{cotg}^2\dfrac{\alpha}{2}\right)h\delta =$ $= \dfrac{\alpha\delta}{h}(h^2 + b^2) = 4\alpha r\delta$ $b = h\,\text{cotg}\,\dfrac{\alpha}{2}$ $r = \dfrac{h}{4}\left(1 + \text{cotg}^2\dfrac{\alpha}{2}\right)$	$x_1 =$ $= \sqrt{(\delta + h)\left(r + \dfrac{\delta - h}{4}\right)}$ $y_1 = \dfrac{\delta + h}{2}$

Moments d'inertie: axiaux: J_x, J_y; centrifuge: J_{xy}; polaire: J_p; en torsion libre: J_t	Moments résistants: axiaux: W_x, W_y: polaire: W_p et en torsion libre: W_t	Rayons d'inertie $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = J_y = 0{,}00755\ r^4$ $J_{x_2} = 0{,}003\ r^4$ $J_{x_3} = J_{y_3} = 0{,}0181\ r^4$ $J_{y_2} = 0{,}0121\ r^4$	$W_{x_{2\min}} = 0{,}0097\ r^3$	$i_{x_{2\min}} = 0{,}187\ r$
$J_x = r^3\delta[2\alpha(2+\cos 2\alpha) - 3\sin 2\alpha] = \frac{Fr^2}{4\alpha}[2\alpha(2+\cos 2\alpha) - 3\sin 2\alpha]$ $J_y = r^3\delta[2\alpha - \sin 2\alpha] = \frac{Fr^2}{4\alpha}(2\alpha - \sin 2\alpha)$	$W_x = \frac{J_x}{y_1} = \frac{2J_x}{\delta + h}$ $W_y = \frac{J_y}{x_1}$.	$i_x = r \times \sqrt{\frac{2+\cos 2\alpha}{2} - \frac{3}{4}\frac{\sin 2\alpha}{\alpha}}$ $i_y = r\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4\alpha}} = \frac{r}{2}\sqrt{2 - \frac{\sin 2\alpha}{\alpha}}$

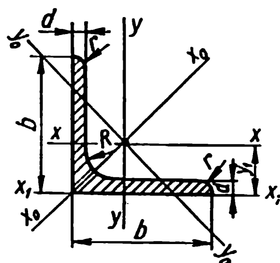
Forme de la section	Aire de la section F	Coordonnées des points extrêmes de la section
Tôle ondulée (les ondulations sont en forme de lignes paraboliques y-y est l'axe central principal	$F = 12{,}5\,\delta\,\frac{b}{h}\times$ $\times\left\{\frac{4h}{b}\sqrt{1+\left(\frac{4h}{b}\right)^2}+\right.$ $+\ln\left[\frac{4h}{b}+\right.$ $\left.\left.+\sqrt{1+\left(\frac{4h}{b}\right)^2}\right]\right\}\approx$ $\approx\frac{1}{3}\,\delta(2b+5{,}2h)$	$x_1 = \frac{b}{2}$ $y_1 = \frac{h+\delta}{2}$ $y_1' = \frac{h-\delta}{2}$ $b_1 = \frac{b+2{,}6\delta}{4}$ $b_2 = \frac{b-2{,}6\delta}{4}$
Profilé de laminage en U normalisé, reposant sur l'ailette Formules approximatives, h, cm x-x est l'axe central principal	—	$y_1 = \frac{h}{2}$
Tôle ondulée (les ondulations sont en forme d'arcs de cercle) y-y est l'axe central principal	$F = 2\delta\left(\frac{\pi b}{4}+h_1\right)$ $h_1 = h - \frac{b}{2}$	$x_1 = \frac{b}{2}$ $y_1 = \frac{h+\delta}{2}$

Moments d'inertie: axiaux: J_x, J_y; centrifuge: J_{yx}; polaire: J_p; en torsion libre: J_t	Moments résisatnts: axiaux: W_x, W_y; polaire: W_p et en torsion libre: W_t	Rayons d'inertie $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x = \frac{1280}{21} \cdot \frac{1}{b} (b_1 y_1^3 - b_2 y_1'^3) = \frac{64}{105} (b_1 y_1^3 - b_2 y_1'^3) = \frac{16}{105} [b(y_1^3 - y_1) + 2,6\delta(y_1^3 + y_1'^3)]$	$W_x = \frac{2J_x}{h + \delta}$	$i_x = \sqrt{\frac{3J_x}{\delta(2b + 5,2h)}} \approx 1,35 \times \sqrt{\frac{b_1 y_1^3 - b_2 y_1'^3}{\delta(2b + 5,2h)}}$
$J_x \approx \frac{h(h + 5)^3}{162}$	$W_x \approx \frac{(h + 5)^3}{81}$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$
$J_x = \frac{\delta}{4} \left(\frac{\pi b^3}{16} + b^2 h_1 + \frac{\pi b h_1^2}{2} + \frac{2}{3} h_1^3 \right)$	$W_x \; \frac{2J_x}{h + \delta}$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$

Forme de la section	Aire de la section F	Coordonnées des points extrêmes de la section
Profilé en double T, normalisé, reposant sur l'ailette y, x, x, y_1, y_1, h, y Formules approximatvies, h, cm x-x et y-y sont les axes centraux principaux	—	$y_1 = \frac{h}{2}$
Section d'un rail de chemin de fer (formules approximatives) y, x, x, y_1, y_1, h, y y-y est l'axe central principal	$F \approx 0{,}238\ h^2$	$y_1 \approx 0{,}5h$
Section de forme quelconque. Ces formules ne peuvent être employées que pour faire une estimation approximative de la valeur du moment d'inertie ainsi que du moment résistant par rapport à l'axe central	F — aire délimitée par le contour extérieur de la section	h et b — hauteur et longueur de la section s et t — périmètre et épaisseur (pour une section creuse)

Moments d'inertie: axiaux: J_x, J_y; centrifuge: J_{xy}; poplaire: J_p; en torsion libre: J_t	Moments résistants: axiaux: W_x, W_y; polaire: W_p et en torsion libre: W_t	Rayons d'inertie $i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$; $i_y = \sqrt{\frac{J_y}{F}}$
$J_x \approx \frac{h(h+2)^3}{102}$	$W_x \approx \frac{(h+2)^3}{51}$	$i_x = \sqrt{\frac{J_x}{F}}$
$J_x \approx 0{,}032h^4$	$W_x \approx 0{,}064h^3$	$i_x \approx 0{,}37h$
Pour une section pleine $J \approx \frac{F^2h}{12b}$	Pour une section pleine symétrique $W \approx \frac{F^2}{6b}$	—
Erreur ~ 15 %		
Pour une section creuse $J \approx \frac{Fh}{6b}\left[s + \frac{F(b-h)}{bh}\right]t$	Pour une section creuse symétrique $W \approx \frac{F}{3b}\left[s + \frac{F(b-h)}{bh}\right]t$	—
Erreur ~ 25 %		

Cornières à ailes égales (Acier laminé, à coin, à ailes égales. GOST



b — largeur de l'aile;
d — épaisseur de l'aile;
R — rayon de l'arrondi intérieur;
r — rayon de l'arrondi de l'aile;

No du profilé	Dimensions, mm				Aire de la section, cm²	Masse d'un mètre de longueur du profilé, kg
	b	*d*	*R*	*r*		
2	20	3 4	3,5	1,2	1,13 1,46	0,89 1,15
2,5	25	3 4	3,5	1,2	1,43 1,86	1,12 1,46
2,8	28	3	4	1,3	1,62	1,27
3,2	32	3 4	4,5	1,5	1,86 2,43	1,46 1,91
3,6	36	3 4	4,5	1,5	2,10 2,75	1,65 2,16
4	40	3 4	5	1,7	2,35 3,08	1,85 2,42
4,5	45	3 4 5	5	1,7	2,65 3,48 4,29	2,08 2,73 3,37
5	50	3 4 5	5,5	1,8	2,96 3,89 4,80	2,32 3,05 3,77
5,6	56	3,5 4 5	6	2	3,86 4,38 5,41	3,03 3,44 4,25

Tableau 2

8509-72)

J — moment d'inertie;
i — rayon d'inertie;
y_1 — distance du centre de gravité à l'aile.

Valeurs de référence, par axes							
x-x		x_0-x_0		y_0-y_0		x_1-x_1	y_1
J_x, cm^4	i_x, cm	J_{x_0}, cm^4 max	i_{x_0}, cm max	J_{y_0}, cm^4 min	i_{y_0}, cm min	J_{x_1}, cm^4	cm
0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60
0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64
0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73
1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76
1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80
1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89
2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94
2,56	1,10	4,06	1,39	1,06	0,71	4,64	0,99
3,29	1,09	5,21	1,38	1,36	0,70	6,24	1,04
3,55	1,23	5,63	1,55	1,47	0,79	6,35	1,09
4,58	1,22	7,26	1,53	1,90	0,78	8,53	1,13
5,13	1,39	8,13	1,75	2,12	0,89	9,04	1,21
6,63	1,38	10,50	1,74	2,74	0,89	12,10	1,26
8,03	1,37	12,70	1,72	3,33	0,88	15,30	1,30
7,11	1,55	11,3	1,95	2,95	1,00	12,4	1,33
9,21	1,54	14,6	1,94	3,80	0,99	16,6	1,38
11,20	1,53	17,8	1,92	4,63	0,98	20,9	1,42
11,6	1,73	18,4	2,18	4,80	1,12	20,3	1,50
13,1	1,73	20,8	2,18	5,41	1,11	23,3	1,52
16,0	1,72	25,4	2,16	6,59	1,10	29,2	1,57

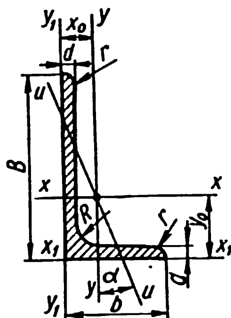
Nº du profilé	Dimensions, mm				Aire de la section, cm²	Masse d'un mètre de longueur du profilé, kg
	b	d	R	r		
6,3	63	4 5 6	7	2,3	4,96 6,13 7,28	3,90 4,81 5,72
7	70	4,5 5 6 7 8	8,0	2,7	6,20 6,86 8,15 9,42 10,70	4,87 5,38 6,39 7,39 8,37
7,5	75	5 6 7 8 9	9	3	7,39 8,78 10,10 11,50 12,80	5,80 6,89 7,96 9,02 10,10
8	80	5,5 6 7 8	9	3	8,63 9,38 10,80 12,30	6,78 7,36 8,51 9,65
9	90	6 7 8 9	10	3,3	10,6 12,3 13,9 15,6	8,33 9,64 10,90 12,20
10	100	6,5 7 8 10 12 14 16	12	4	12,8 13,8 15,6 19,2 22,8 26,3 29,7	10,1 10,8 12,2 15,1 17,9 20,6 23,3
11	110	7 8	12	4	15,2 17,2	11,9 13,5
12,5	125	8 9 10 12 14 16	14	4,6	19,7 22,0 24,3 28,9 33,4 37,8	15,5 17,3 19,1 22,7 26,2 29,6
14	140	9 10 12	14	4,6	24,7 27,3 32,5	19,4 21,5 25,5

Valeurs de référence, par axes							
x-x		x_0-x_0		y_0-y_0		x_1-x_1	y_1
J_x, cm⁴	i_x, cm	J_{x_0}, cm⁴ max	i_{x_0}, cm max	J_{y_0}, cm min	i_{y_0}, cm min	J_{x_1}, cm⁴	cm
18,9	1,95	29,9	2,45	7,81	1,25	33,1	1,69
23,1	1,94	36,6	2,44	9,52	1,25	41,5	1,74
27,1	1,93	42,0	2,43	11,2	1,24	50,0	1,78
29,0	2,16	46,0	2,72	12,0	1,39	51,0	1,88
31,9	2,16	50,7	2,72	13,2	1,39	56,7	1,90
37,6	2,15	59,6	2,71	15,5	1,38	68,4	1,94
43,0	2,14	68,2	2,69	17,8	1,37	80,1	1,99
48,2	2,13	76,4	2,68	20,0	1,37	91,9	2,02
39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02
46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06
53,3	2,29	84,0	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10
59,8	2,28	94,9	2,87	24,8	1,47	113,0	2,15
66,1	2,27	105,0	2,86	27,5	1,46	127,0	2,18
52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17
57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102,0	2,19
65,3	2,45	104,0	3,09	27,0	1,58	119,0	2,23
73,4	2,44	116,0	3,08	30,3	1,57	137,0	2,27
82,1	2,78	130	3,50	34,0	1,79	145	2,43
94,3	2,77	150	3,49	38,9	1,78	169	2,47
106,0	2,76	168	3,48	43,8	1,77	194	2,51
118,0	2,75	186	3,46	48,6	1,77	219	2,55
122	3,09	193	3,88	50,7	1,99	214	2,68
131	3,08	207	3,88	54,2	1,98	231	2,71
147	3,07	233	3,87	60,9	1,98	265	2,75
179	3,05	284	3,84	84,1	1,96	333	2,83
209	3,03	331	3,81	76,9	1,95	402	2,91
237	3,00	375	3,78	99,3	1,94	472	2,99
264	2,98	416	3,74	112	1,94	542	3,06
176	3,40	279	4,29	72,7	2,19	308	2,96
198	3,39	315	4,28	81,8	2,18	353	3,00
294	3,87	467	4,87	122	2,49	516	3,36
327	3,86	520	4,86	135	2,48	582	3,40
360	3,85	571	4,84	149	2,47	649	3,45
422	3,82	670	4,82	174	2,46	782	3,53
482	3,80	764	4,78	200	2,45	916	3,61
539	3,78	853	4,75	224	2,44	1051	3,68
466	4,34	739	5,47	192	2,79	818	3,78
512	4,33	814	5,46	211	2,78	911	3,82
602	4,31	957	5,43	248	2,76	1097	3,90

N° du profilé	Dimensions, mm				Aire de la section, cm^2	Masse d'un mètre de longueur du profilé, kg
	b	*d*	*R*	*r*		
16	160	10	16	5,3	31,4	24,7
		11			34,4	27,0
		12			37,4	29,4
		14			43,3	34,0
		16			49,1	38,5
		18			54,8	43,0
		20			60,4	47,4
18	180	11	16	5,3	38,8	30,5
		12			42,2	33,1
20	200	12	18	6	47,1	37,0
		13			50,9	39,9
		14			54,6	42,8
		16			62,0	48,7
		20			76,5	60,1
		25			94,3	74,0
		30			111,5	87,6
22	220	14	21	7	60,4	47,4
		16			68,6	53,8
25	250	16	24	8	78,4	61,5
		18			87,7	68,9
		20			97,0	76,1
		22			106,1	83,3
		25			119,7	94,0
		28			133,1	104,5
		30			142,0	111,4

Valeurs de référence, par axes							
x-x		x_0-x_0		y_0-y_0		x_1-x_1	y_1
J_x, cm⁴	i_x, cm	J_{x_0}, cm⁴ max	i_{x_0}, cm max	J_{y_0}, cm⁴ min	i_{y_0}, cm min	J_{x_1}, cm⁴	cm
774	4,86	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30
844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35
913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39
1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47
1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55
1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63
1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70
1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85
1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89
1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37
1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42
2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46
2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54
2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70
3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89
4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07
2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93
3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02
4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75
5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83
5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91
6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00
7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11
7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23
8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	15753	7,31

Cornières à ailes inégales (Acier laminé, à coin, à ailes inégales. GOST 8510-72)



B — largeur de la grande aile;
b — largeur de la petite aile;
R — rayon de l'arrondi intérieur;
r — rayon de l'arrondi de l'aile;

Numéro du profilé	Dimensions, mm					Aire de la section, cm²	Masse d'un mètre de longueur du profilé, kg	x-x	
	B	*b*	*d*	*R*	*r*			J_x, cm⁴	i_x, cm
2,5/1,6	25	16	3	3,5	1,2	1,16	0,91	0,70	0,78
3,2/2	32	20	3 4	3,5	1,2	1,49 1,94	1,17 1,52	1,52 1,93	1,01 1,00
4,2/5	40	25	3 4	4,0	1,3	1,89 2,47	1,48 1,94	3,06 3,93	1,27 1,26
4,5/2,8	45	28	3 4	5	1,7	2,14 2,80	1,68 2,20	4,41 5,68	1,43 1,42
5/3,2	50	32	3 4	5,5	1,8	2,42 3,17	1,90 2,49	6,17 7,98	1,60 1,59
5,6/3,6	56	36	3 4 5	6,0	2,0	3,16 3,58 4,41	2,48 2,81 3,46	10,1 11,4 13,8	1,79 1,78 1,77
6,3/4,0	63	40	4 5 6 8	7,0	2,3	4,04 4,98 5,90 7,68	3,17 3,91 4,63 6,03	16,3 19,9 23,3 29,6	2,01 2,00 1,99 1,96

J — moment d'inertie;
i — rayon d'inertie;
x_0, y_0 — distance du centre de gravité aux ailes.

Valeurs de référence, par axes								
y-y		x_1-x_1		y_1-y_1		u-u		Angle d'inclinaison de l'axe, tg α
J_y, cm⁴	i_y, cm	J_{x_1}, cm⁴	Distance du centre de gravité y_0, cm	J_{y_1}, cm⁴ min	Distance du centre de gravité x_0, cm	J_u, cm⁴ min	i_u, cm min	
0,22	0,44	1,56	0,86	0,43	0,42	0,13	0,34	0,392
0,46	0,55	3,25	1,08	0,82	0,49	0,28	0,43	0,382
0,57	0,54	4,38	1,12	1,12	0,53	0,35	0,43	0,374
0,93	0,70	6,37	1,32	1,58	0,59	0,56	0,54	0,385
1,18	0,69	8,53	1,37	2,15	0,63	0,71	0,54	0,381
1,32	0,79	9,02	1,47	2,20	0,64	0,79	0,61	0,382
1,69	0,78	12,1	1,51	2,98	0,68	1,02	0,60	0,379
1,99	0,91	12,4	1,60	3,26	0,72	1,18	0,70	0,403
2,56	0,90	16,6	1,65	4,42	0,76	1,52	0,69	0,401
3,30	1,02	20,3	1,80	5,43	0,82	1,95	0,79	0,407
3,70	1,02	23,2	1,82	6,25	0,84	2,19	0,78	0,406
4,48	1,01	29,2	1,86	7,91	0,88	2,66	0,78	0,404
5,16	1,13	33,0	2,03	8,51	0,91	3,07	0,87	0,397
6,26	1,12	41,4	2,08	10,80	0,95	3,73	0,86	0,396
7,28	1,11	49,9	2,12	13,10	0,99	4,36	0,86	0,393
9,15	1,09	65,9	2,20	17,90	1,07	5,58	0,85	0,386

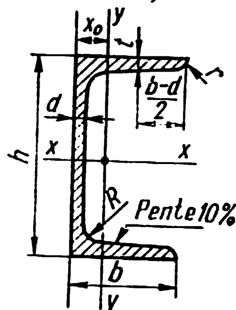
Numéro du profilé	Dimensions, mm					Aire de la section, cm²	Masse d'un mètre de longueur du profilé, kg	x-x	
	B	b	d	R	r			J_x, cm⁴	i_x, cm
7/4,5	70	45	4,5 5	7,5	2,5	5,07 5,59	3,98 4,39	25,3 27,8	2,23 2,23
7,5/5	75	50	5 6 8	8	2,7	6,11 7,25 9,47	4,79 5,69 7,43	34,8 40,9 52,4	2,39 2,38 2,35
8/5	80	50	5 6	8	2,7	6,36 7,55	4,99 5,92	41,6 49,0	2,56 2,55
9/5,6	90	56	5,5 6 8	9	3	7,86 8,54 11,18	6,17 6,70 8,77	65,3 70,6 90,9	2,88 2,88 2,85
10/6,3	100	63	6 7 8 10	10	3,3	9,59 11,10 12,60 15,50	7,53 8,70 9,87 12,10	98,3 113,0 127,0 154,0	3,20 3,19 3,18 3,15
11/7	110	70	6,5 7,0 8,0	10	3,3	11,4 12,3 13,9	8,98 9,64 10,90	142 152 172	3,53 3,52 3,51
12,5/8	125	80	7 8 10 12	11	3,7	14,1 16,0 19,7 23,4	11,0 12,5 15,5 18,3	227 256 312 365	4,01 4,00 3,98 3,95
14/9	140	90	8 10	12	4	18,0 22,2	14,1 17,5	364 444	4,49 4,47
16/10	160	100	9 10 12 14	13	4,3	22,9 25,3 30,0 34,7	18,0 19,8 23,6 27,3	606 667 784 897	5,15 5,13 5,11 5,08
18/11	180	110	10 12	14	4,7	28,3 33,7	22,2 26,4	952 1123	5,80 5,77

Valeurs de référence, par axes									
y-y		x_1-x_1		y_1-y_1		u-u			
J_y, cm^4	i_y, cm	J_{x_1}, cm^4	Distance du centre de gravité y_0, cm	J_{y_1}, cm^4 min	Distance du centre de gravité x_0, cm	J_u, cm^4 min	i_u, cm min	Angle d'inclinaison de l'axe, tg α
8,25	1,28	51,0	2,25	13,6	1,03	4,88	0,98	0,407
9,05	1,27	56,7	2,28	15,2	1,05	5,34	0,98	0,406
12,5	1,43	69,7	2,39	20,8	1,17	7,24	1,09	0,436
14,6	1,42	83,9	2,44	25,2	1,21	8,48	1,08	0,435
18,5	1,40	112	2,52	34,2	1,29	10,90	1,07	0,430
12,7	1,41	84,6	2,60	20,8	1,13	7,58	1,09	0,387
14,8	1,40	102	2,65	25,2	1,17	8,88	1,08	0,386
19,7	1,58	132	2,92	32,2	1,26	11,8	1,22	0,384
21,2	1,58	145	2,95	35,2	1,28	12,7	1,22	0,384
27,1	1,56	194	3,04	47,8	1,36	16,3	1,21	0,380
30,6	1,79	198	3,23	49,9	1,42	18,2	1,38	0,393
35,0	1,78	232	3,28	58,7	1,46	20,8	1,37	0,392
39,2	1,77	266	3,32	67,6	1,50	23,4	1,36	0,391
47,1	1,75	333	3,40	85,8	1,58	28,3	1,35	0,387
45,6	2,00	286	3,55	74,3	1,58	26,9	1,53	0,402
48,7	1,99	309	3,57	80,3	1,60	28,8	1,53	0,402
54,6	1,98	353	3,61	92,3	1,64	32,3	1,52	0,400
73,7	2,29	459	4,01	119	1,8	43,4	1,76	0,407
83,0	2,28	518	4,05	137	1,84	48,8	1,75	0,406
100,0	2,26	649	4,14	173	1,92	59,3	1,74	0,404
117,0	2,24	781	4,22	210	2	69,5	1,72	0,400
120	2,58	727	4,49	194	2,03	70,3	1,98	0,411
146	2,56	911	4,58	245	2,12	85,5	1,96	0,409
186	2,85	1221	5,19	300	2,23	110	2,20	0,391
204	2,84	1359	5,23	335	2,28	121	2,19	0,390
239	2,82	1634	5,32	405	2,36	142	2,18	0,388
272	2,80	1910	5,40	477	2,43	162	2,16	0,385
276	3,12	1933	5,88	444	2,44	165	2,42	0,375
324	3,10	2324	5,97	537	2,52	194	2,40	0,374

Numéro du profile	Dimensions, mm					Aire de la section, cm²	Masse d'un mètre de longueur du profilé, kg	x-x	
	B	b	d	R	r			J_x, cm⁴	i_x, cm
20/12,5	200	125	11	14	4,7	34,9	27,4	1449	6,45
			12			37,9	29,7	1568	6,43
			14			43,9	34,4	1801	6,41
			16			49,8	39,1	2026	6,38
25/16	250	160	12	18	6	48,3	37,9	3147	8,07
			16			63,6	49,9	4091	8,02
			18			71,1	55,8	4545	7,99
			20			78,5	61,7	4987	7,97

Valeurs de référence, par axes										
y-y		x_1-x_1		y_1-y_1		u-u				Angle d'inclinaison de l'axe, tg α
J_y, cm⁴	i_y, cm	J_{x_1}, cm⁴	Distance du centre de gravité y_0, cm	J_{y_1} cm⁴ min	Distance du centre de gravité x_0, cm	J_u, cm⁴ min	i_u, cm min			
446	3,58	2920	6,50	718	2,79	264	2,75			0,392
482	3,57	3189	6,54	786	2,83	285	2,74			0,392
551	3,54	3726	6,62	922	2,91	327	2,73			0,390
617	3,52	4264	6,71	1061	2,99	367	2,72			0,388
1032	4,62	6212	7,97	1634	3,53	604	3,54			0,410
1333	4,58	8308	8,14	2200	3,69	781	3,50			0,408
1475	4,56	9358	8,23	2487	3,77	866	3,49			0,407
1613	4,53	10410	8,31	2776	3,85	949	3,48			0,405

Profilés en U (avec une inclinaison des arêtes intérieures des ailes. GOST 8240-72)



h — hauteur;
b — largeur de l'aile;
s — épaisseur de l'âme;
t — épaisseur de l'aile;
R — rayon de l'arrondi intérieur;
r — rayon de l'arrondi de l'aile;

Numéro du profilé	Masse d'un m de longueur, kg	Dimensions, mm					
		h	*b*	*s*	*t*	*R*	*r*
5	4,84	50	32	4,4	7,0	6	2,5
6,5	5,90	65	36	4,4	7,2	6	2,5
8	7,05	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5
10	8,59	100	46	4,5	7,6	7	3
12	10,4	120	52	4,8	7,8	7,5	3
14	12,3	140	58	4,9	8,1	8	3
14a	13,3	140	62	4,9	8,7	8	3
16	14,2	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5
16a	15,3	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5
18	16,3	180	70	5,1	8,7	9	3,5
18a	17,4	180	74	5,1	9,3	9	3,5
20	18,4	200	76	5,2	9,0	9,5	4
20a	19,8	200	80	5,2	9,7	9,5	4
22	21,0	220	82	5,4	9,5	10	4
22a	22,6	220	87	5,4	10,2	10	4

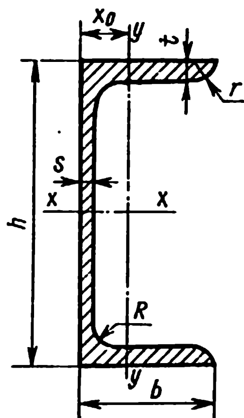
J — moment d'inertie;
W — module de résistance;
i — rayon d'inertie;
S — moment statique de demi-section;
x_0 — distance de l'axe y-y à l'arête extérieure de l'âme.

Aire de la section, cm²	Valeurs de référence, par axes							Coordonnée du centre de gravité x_0, cm
	x-x				y-y			
	J_x, cm⁴	W_x, cm³	i_x, cm	S_x, cm³	J_y, cm⁴	W_y, cm³	i_y, cm	
6,16	22,8	9,10	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
7,51	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,08	1,24
8,98	89,4	22,4	3,16	13,3	12,8	4,75	1,19	1,31
10,9	174	34,8	3,99	20,4	20,4	6,46	1,37	1,44
13,3	304	50,6	4,78	29,6	31,2	8,52	1,53	1,54
15,6	491	70,2	5,60	40,8	45,4	11,0	1,70	1,67
17,0	545	77,8	5,66	45,1	57,5	13,3	1,84	1,87
18,1	747	93,4	6,42	54,1	63,3	13,8	1,87	1,80
19,5	823	103	6,49	59,4	78,8	16,4	2,01	2,00
20,7	1090	121	7,24	69,8	86,0	17,0	2,04	1,94
22,2	1190	132	7,32	76,1	105	20,0	2,18	2,13
23,4	1520	152	8,07	87,8	113	20,5	2,20	2,07
25,2	1670	167	8,15	95,9	139	24,2	2,35	2,28
26,7	2110	192	8,89	110	151	25,1	2,37	2,21
28,8	2330	212	8,99	121	187	30,0	2,55	2,46

Numéro du profilé	Masse d'un m de longueur, kg	Dimensions, mm					
		h	*b*	*s*	*t*	*R*	*r*
24	24,0	240	90	5,6	10,0	10,5	4
24a	25,8	240	95	5,6	10,7	10,5	4
27	27,7	270	95	6,0	10,5	11	4,5
30	31,8	300	100	6,5	11,0	12	5
33	36,5	330	105	7,0	11,7	13	5
36	41,9	360	110	7,5	12,6	14	6
40	48,3	400	115	8,0	13,5	15	6

Aire de la section, cm^2	Valeurs de référence, par axes							Coordonnée du centre de gravité x_0, cm
	x-x				y − y			
	J_x, cm^4	W_x, cm^3	i_x, cm	S_x, cm^3	J_y, cm^4	W_y, cm^3	i_y, cm	
30,6	2900	242	9,73	139	208	31,6	2,60	2,42
32,9	3180	265	9,84	151	254	37,2	2,78	2,67
35,2	4160	308	10,9	178	262	37,3	2,73	2,47
40,5	5810	387	12,0	224	327	43,6	2,84	2,52
46,5	7980	484	13,1	281	410	51,8	2,97	2,59
53,4	10820	601	14,2	350	513	61,7	3,10	2,68
61,5	15220	761	15,7	444	642	73,4	3,23	2,75

Profilés en U à faces parallèles des ailes (GOST 8240-72)



h — hauteur;
b — largeur de l'aile;
s — épaisseur de l'âme;
t — épaisseur de l'aile;
R — rayon de l'arrondi intérieur;
r — rayon de l'arrondi de l'aile;

Numéro du profilé	Dimensions, mm						Aire de la section, cm²
	h	*b*	*s*	*t*	*R*	*r*	
5	50	32	4,4	7,0	6,0	3,5	6,16
6,5	65	36	4,4	7,2	6,0	3,5	7,51
8	80	40	4,5	7,4	6,5	3,5	8,98
10	100	46	4,5	7,6	7,0	4,0	10,9
12	120	52	4,8	7,8	7,5	4,5	13,3
14	140	58	4,9	8,1	8,0	4,5	15,6
14a	140	62	4,9	8,7	8,0	4,5	17,0
16	160	64	5,0	8,4	8,5	5,0	18,1
16a	160	68	5,0	9,0	8,5	5,0	19,5
18	180	70	5,1	8,7	9,0	5,0	20,7

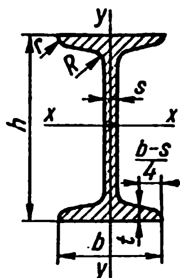
J — moment d'inertie ;
W — module de résistance;
i — rayon d'inertie;
S — moment statique d'une demi-section;
x_0 — distance de l'axe y - y à la face extérieure de l'aile.

Masse d'un mètre, kg	Données de référence pour axes							Coordonnée du centre de gravité x_0, cm
	x - x				y - y			
	J_x, cm[4]	W_x, cm[3]	i_x, cm	S_x, cm[3]	J_y, cm[4]	W_y, cm[3]	i_y, cm	
4,84	22,8	9,14	1,92	5,61	5,95	2,99	0,983	1,21
5,9	48,8	15,0	2,55	9,02	9,35	4,06	1,12	1,29
7,05	89,8	22,5	3,16	13,3	13,9	5,31	1,24	1,38
8,59	175	34,9	3,99	20,5	22,6	7,37	1,53	1,53
10,4	305	50,8	4,79	29,7	34,9	9,84	1,66	1,66
12,3	493	70,4	5,61	40,9	51,5	12,9	1,81	1,82
13,3	547	78,2	5,68	45,2	65,2	15,7	1,96	2,04
14,2	750	93,8	6,44	54,3	72,8	16,4	2,00	1,97
15,3	827	103	6,51	59,5	90,5	19,6	2,15	2,19
16,3	1090	121	7,26	70,0	100	20,6	2,2	2,14

Numéro du profilé	Dimensions, mm						Aire de la section, cm²
	h	*b*	*s*	*t*	*R*	*r*	
18a	180	74	5,1	9,3	9,0	5,0	22,2
20	200	76	5,2	9,0	9,5	5,5	23,4
20a	200	80	5,2	9,7	9,5	5,5	25,2
22	220	82	5,4	9,5	10	6,0	26,7
22a	220	87	5,4	10,2	10	6,0	28,8
24	240	90	5,6	10,0	10,5	6,0	30,6
24a	240	95	5,6	10,7	10,5	6,0	32,9
27	270	95	6,0	10,5	11,0	6,5	35,2
30	300	100	6,5	11,0	12,0	7	40,5
33	330	105	7,0	11,7	13	7,5	46,5
36	360	110	7,5	12,6	14	8,5	53,4
40	400	115	8,0	13,5	15	9	61,5

Masse d'un mètre, kg	Données de référence pour axes							Coordonée du centre de gravité x_0, cm
	x - x				*y - y*			
	J_x, cm^4	W_x, cm^4	i_x, cm	S_x, cm^3	J_y, cm^4	W_y, cm^3	i_y, cm	
17,4	1200	133	7,34	76,3	123	24,3	2,35	2,36
18,4	1530	153	8,08	88,0	134	25,2	2,39	2,3
19,8	1680	168	8,17	96,2	162	29,7	2,54	2,53
21,0	2120	193	8,90	111	178	31,0	2,58	2,47
22,6	2340	212	9,01	121	220	37,0	2,77	2,75
24,0	2910	243	9,75	139	248	39,5	2,85	2,72
25,8	3200	266	9,86	152	302	46,5	3,03	3,01
27,7	4180	310	10,9	178	314	46,7	2,99	2,78
31,8	5830	389	12,0	224	393	54,8	3,12	2,83
36,5	8010	486	13,1	281	491	64,6	3,25	2,9
41,9	10850	603	14,3	350	611	76,3	3,38	2,99
48,3	15260	763	15,8	445	760	89,9	3,51	3,05

Poutres en double T (GOST 8239-72)



h — hauteur de la poutre;
b — largeur de l'aile;
s — épaisseur de l'âme;
t — épaisseur moyenne de l'aile;
R — rayon de l'arrondi intérieur;

Numéro de la poutre	Masse d'un m de longueur, kg	Dimensions, mm					
		h	*b*	*s*	*t*	*R*	*r*
10	9,46	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5
12	11,5	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0
14	13,7	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0
16	15,9	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5
18	18,4	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5
18a	19,9	180	100	5,1	8,3	9,0	3,5
20	21,0	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0
20a	22,7	200	110	5,2	8,6	9,5	4,0
22	24,0	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0
22a	25,8	220	120	5,4	8,9	10,0	4,0
24	27,3	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0
24a	29,4	240	125	5,6	9,8	10,5	4,0
27	31,5	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5

r — rayon de l'arrondi de l'aile;
J — moment d'inertie;
W — module résistant;
S — moment statique de demi-section;
i — rayon d'inertie.

Aire de la section, cm²	Valeurs de référence, par axes						
	x-x				y-y		
	J_x, cm⁴	W_x, cm³	i_x, cm	S_x, cm³	J_y, cm⁴	W_y, cm³	i_y, cm
12,0	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
14,7	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
17,4	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,5	1,55
20,2	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,5	1,70
23,4	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,4	1,88
25,4	1430	159,0	7,51	89,8	114,0	22,8	2,12
26,8	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,1	2,07
28,9	2030	203,0	8,37	114,0	155,0	28,2	2,32
30,6	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,6	2,27
32,8	2790	254,0	9,22	143,0	206,0	34,3	2,50
34,8	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,5	2,37
37,5	3800	317,0	10,10	178,0	260,0	41,6	2,63
40,2	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,5	2,54

Numéro de la poutre	Masse d'un m de longueur, kg	Dimensions, mm					
		h	*b*	*s*	*t*	*R*	*r*
27a	33,9	270	135	6,0	10,2	11,0	4,5
30	36,5	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0
30a	39,2	300	145	6,5	10,7	12,0	5,0
33	42,2	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0
36	48,6	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0
40	57,0	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0
45	66,5	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0
50	78,5	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0
55	92,5	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0
60	108,0	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0

Aire de la section, cm^2	Valeurs de référence, par axes						
	x-x				*y-y*		
	J_x, cm^4	W_x, cm^3	i_x, cm	S_x, cm^3	J_y, cm^4	W_y, cm^3	i_y, cm
43,2	5500	407,0	11,30	229,0	337,0	50,0	2,80
46,5	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,9	2,69
49,9	7780	518,0	12,50	292,0	436,0	60,1	2,95
53,8	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,9	2,79
61,9	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,1	2,89
72,6	19062	953,0	16,2	545	667	86,1	3,03
84,7	27696	1231,0	18,1	708	808	101	3,09
100,0	39727	1589,0	19,9	919	1043	123	3,23
118,0	55962	2035,0	21,8	1181	1356	151	3,39
138,0	76806	2560,0	23,6	1491	1725	182	3,54

CHAPITRE 3

Forces intérieures et extérieures. Méthode des sections. Diagrammes des forces intérieures. Contraintes dans la section

§ 13. Classification des forces extérieures

On appelle *forces extérieures* ou *charges* les forces d'interaction entre un élément considéré de la structure et les corps qui sont en contact avec lui. Si les forces extérieures sont le résultat d'une interaction de contact direct entre un corps donné et d'autres corps, elles sont, dans ce cas, appliquées uniquement aux points appartenant à la surface de ce corps dans le lieu de contact et portent le nom de *forces de surface*. Les forces de surface peuvent être distribuées de façon continue sur toute la surface du corps tout comme sur sa partie. La valeur de la charge revenant à l'unité de l'aire porte le nom d'*intensité de la charge*, se désigne ordinairement par la lettre p et s'exprime en kgf/cm², kgf/m² ou tf/m². D'après la norme GOST 9867-61, c'est le newton (N) qui est l'unité de la force dans le Système International des unités des grandeurs physiques (SI). Le newton est la force qui communique à un corps en repos d'une masse d'un kg une accélération égale à 1 m/s². Le newton se mésure en kg · m/s².

$$1\ \text{kgf} = 9{,}81\ \text{N}; \quad 1\ \text{N} = 0{,}102\ \text{kgf}.$$

L'unité de pression est le newton par mètre carré (N/m²). Dans les calculs d'ingénieur, on peut poser 1 kgf/cm² ≈ 10^{-3} N/m² = 10 N/cm².

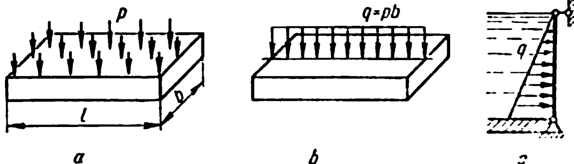


FIG. 26

Une charge répartie sur la surface (fig. 26, *a*) qu'on ramène au plan principal (fig. 26, *b*), c'est-à-dire une charge répartie sur une ligne, porte

le nom de *charge par unité de longueur*, se désigne ordinairement par la lettre q et se mésure en kgf/cm, kgf/m ou tf/m. D'ordinaire, le mode de variation de q suivant la longueur s'exprime sous forme de diagramme (graphique) de q.

Dans le cas d'une charge uniformément répartie (fig. 26, *a*), le diagramme de q est rectangulaire (fig. 26, *b*). S'il s'agit d'une pression hydrostatique, le diagramme de q est triangulaire (fig. 26, *c*).

La résultante d'une charge répartie est numériquement égale à l'aire de son diagramme et est appliquée au centre de gravité de ce dernier. Si la charge est répartie sur une partie peu importante de la surface du corps, on la remplace toujours par sa résultante appelée *force concentrée* P (kgf ou tf).

On rencontre des charges qui peuvent être représentées sous forme de moment concentré (couple). Les moments M (kgf · cm ou tf · m) se désignent ordinairement par l'une des façons montrées sur la fig. 27, *a*, *b* ou sous forme de vecteur perpendiculaire au plan d'action du couple. A la différence de vecteur d'une force, le vecteur d'un moment se représente sous forme de deux flèches ou d'une ligne ondulée (fig 27, *c*, *d*). Il est convenu de considérer le vecteur d'un moment comme une hélice de pas à droite.

Les forces qui ne sont pas le résultat d'un contact entre deux corps mais sont appliquées en chaque point du volume occupé par le corps (poids propre, forces d'inertie) s'appellent *forces volumiques* ou *massiques*.

En fonction du mode d'application des forces dans le temps, on distingue les charges *statiques* et *dynamiques*. Une charge est dite *statique* si, d'une façon relativement lente et continue (ne serait-ce qu'au cours de quelques secondes), elle croît de zéro à sa valeur finale pour rester ensuite inchangée. Avec cela, on est en droit de négliger les accélérations des masses en déformation et, par conséquent, les forces d'inertie.

Les charges *dynamiques* s'accompagnent d'accélérations sensibles aussi bien du corps en déformation que des corps en interaction avec lui. Dans ces conditions, on n'est plus autorisé à négliger les forces d'inertie. Les charges dynamiques sont les charges *instantanées*, *de choc* et *intermittentes*.

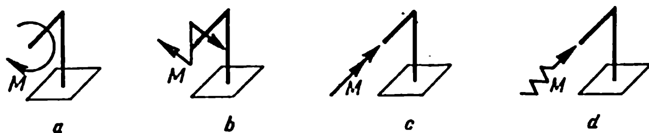


FIG. 27

Une force *instantanée* croît de zéro à son maximum en quelques fractions de seconde. De telles charges apparaissent lors de l'inflammation

du mélange air-essence dans les cylindres d'un moteur à combustion interne, lors du démarrage d'un train.

Une *charge de choc* se caractérise par le fait qu'au moment de son application le corps qui la communique possède une énergie cinétique déterminée. Pareille charge se réalise, par exemple, lors du battage des pieux au moyen d'une sonnette, dans les parties d'un marteau de forge.

Une *charge intermittente* se caractérise par sa périodicité continue. Les tiges, les essieux, les arbres des wagons, les parties vibrantes des structures, etc., sont soumis à de telles charges.

§ 14. Forces intérieures. Méthode des sections. Diagrammes des forces intérieures

Entre des particules avoisinantes de n'importe quel corps (cristaux, molécules, atomes) existent toujours des forces d'interaction ou *forces intérieures* qui tendent à maintenir le corps comme un tout entier en s'opposant à tout ce qui est susceptible de modifier la disposition intérieure des particules, c'est-à-dire de déformer le corps.

Les forces extérieures tendent, par contre, à provoquer une déformation du corps.

La valeur des forces intérieures agissant entre deux particules quelconques dans un corps sollicité ou non sera différente.

En résistance des matériaux, les forces intérieures agissant dans un corps non sollicité ne sont pas prises en considération, seules les forces intérieures supplémentaires qui apparaissent lors de l'application d'une charge entrent en ligne de compte. Ces forces intérieures supplémentaires d'interaction qui apparaissent lors de l'application d'une charge s'appellent souvent *efforts.*

Pour déterminer les forces intérieures qui apparaissent dans un corps soumis à une sollicitation, on se sert, en résistance des matériaux, de la *méthode des sections.*

Cette méthode consiste en ceci que, à l'aide d'un certain plan, on coupe mentalement le corps sollicité (fig. 28, *a*) en deux parties *A* et *B*. Pour que chacune de ces parties se trouve en équilibre sous l'action des charges extérieures qui lui sont appliquées, il faut remplacer l'action exercée par la partie enlevée par découpage par un système de forces intérieures agissant dans la section. Ces forces seront justement les forces d'interaction entre les parties du corps *A* et *B*. Les forces intérieures qui agissent dans la section du côté de la partie *A* seront, en accord avec la troisième loi de Newton, égales en valeur et de direction opposée aux forces intérieures agissant dans la section du côté de la partie *B* (fig. 28, *b*).

Tout comme n'importe quel système de forces, les forces intérieures réparties sur toute la section peuvent être rapportées à un point (par exemple, au centre de gravité de la section) et, de ce fait, sur chaque côté

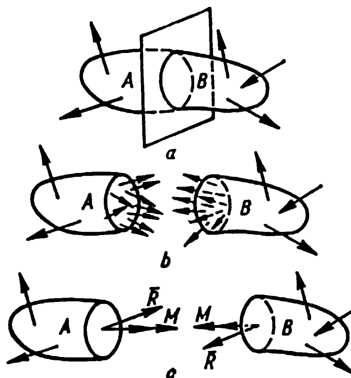


FIG. 28

de la section, l'on obtient le vecteur et le moment résultants des forces intérieures dans la section (fig. 28, *c*). Dans le cas d'une barre, on coupe d'ordinaire cette dernière au moyen d'un plan perpendiculaire à l'axe (fig. 29, *a*). Si l'on projette le vecteur et le moment résultants sur l'axe de la barre z ainsi que sur les axes centraux principaux y et x, on aura sur chaque côté de la section *six facteurs de forces intérieurs* (fig. 29, *b*):

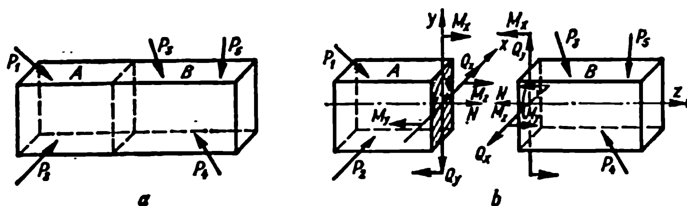


FIG. 29

trois forces (N, Q_y, Q_x) et trois moments (M_z, M_y, M_x). Ces grandeurs s'appellent *efforts* et *moments* agissant dans la section d'une barre.

Comme on le voit du dessin, N provoque une déformation longitudinale de la barre (traction ou compression); Q_y et Q_x, le cisaillement

des bords de la section respectivement dans la direction des axes y et x; M_z provoque la torsion de la barre; M_y et M_x la flexion de la barre dans les plans principaux xz et yz. Aussi est-il convenu d'adopter les dénominations suivantes pour les efforts et moments agissant dans une section:

N — *force longitudinale ou axiale* (dirigée le long de l'axe);

Q_y et Q_x — *forces transversales* (plus rarement *efforts tranchants*);

$M_z = M_t$ — *couple de torsion;*

M_y et M_x — *moments fléchissants.*

L'on peut proposer les définitions suivantes à ces composantes d'efforts internes qu'on vient d'énumérer: la **force longitudinale** *N représente la somme des projections de toutes les forces intérieures agissant dans la section sur la normale à cette dernière (ou sur l'axe de la barre)*; les **forces transversales** *Q_x et Q_y sont les sommes des projections de toutes les forces intérieures dans la section sur les axes centraux principaux de cette dernière, respectivement y et x*; le **couple de torsion** *M_z (ou M_t) est la somme des moments de toutes les forces intérieures dans la section par rapport à l'axe de la barre*; les **moments fléchissants** *M_x et M_y sont les sommes des moments de toutes les forces intérieures dans la section, par rapport aux axes d'inertie centraux principaux de cette dernière x et y respectivement.*

En pratique, quand il s'agit de calculer les efforts et moments dans la section, il faut tenir compte de ce que: la valeur numérique de N est égale à la somme algébrique des projections de toutes les forces extérieures agissant sur une des parties (gauche ou droite) de la barre sectionnée sur l'axe de cette dernière (sur la normale à la section); idem pour Q_y et Q_x mais, cette fois-ci, sur les axes y et x respectivement; M_t est numériquement égal à la somme algébrique des moments de toutes les forces extérieures agissant sur une des parties (gauche ou droite) de la barre sectionnée, par rapport à l'axe de cette dernière; idem pour M_y et M_x mais par rapport aux axes y et x respectivement.

Ainsi, la méthode des sections permet de trouver tous les efforts et moments dans n'importe quelle section de la barre sous l'action de n'importe quelle sollicitation.

Pour cela, il faut effectuer les opérations suivantes:

1. Trouver les axes centraux principaux de la section transversale de la barre.

2. Tracer mentalement une section transversale de la barre là où il faut trouver les efforts et les moments.

3. Calculer les efforts N, Q_y, Q_x et les moments M_t, M_y, M_x comme les sommes algébriques des projections et des moments des forces extérieures agissant sur une des parties (soit la partie gauche soit la partie droite par rapport à la section) de la barre sectionnée, d'ordinaire sur celle où les projections et moments se calculent plus facilement.

En général, les efforts et moments agissant dans différentes sections d'une même barre ne sont pas identiques. *Les graphiques (courbes) qui montrent comment changent les efforts et moments d'une section à une autre portent le nom de diagrammes des efforts et des moments.*

Quand on construit les diagrammes, il est recommandé d'observer les règles suivantes:

1. L'axe (base) sur lequel on construit le diagramme est choisi toujours de telle façon qu'il soit parallèle à l'axe de la barre (ou coïncide avec lui).

2. Les ordonnées des diagrammes qui expriment, dans l'échelle choisie, la valeur de l'effort ou du moment sont portées à partir de la base du diagramme perpendiculairement à ce dernier.

3. Il est convenu d'hachurer les diagrammes au moyen de lignes perpendiculaires à la base. Les valeurs positives des efforts ou des moments se portent en haut de la base, celles négatives, en bas.

4. Les chiffres qu'on porte sur les diagrammes montrent les valeurs des ordonnées caractéristiques. Les petits cercles renfermant le signe de l'effort figurent eux aussi sur le diagramme.

Quand on construit les diagrammes des forces longitudinales et des couples de torsion, il est recommandé, pour ce qui est de leurs signes, de s'en tenir aux règles suivantes:

1. *La force longitudinale N est considérée comme positive si elle provoque la traction, et comme négative, si elle provoque la compression.*

2. *Pour un observateur qui regarde du bout le long de l'axe de la partie en question, le couple de torsion M_t est considéré comme positif s'il agit dans le sens des aiguilles d'une montre* (fig. 30).

Les fig. 31, 32, 33 montrent des exemples de construction des diagrammes des forces longitudinales (α_1 |= arctg γF_1; α_2 = 'arctg γF_2; γ — poids volumique). La fig. 34, *b* montre le diagramme des couples de torsion d'un arbre de transmission dont le schéma est représenté sur la fig. 34, *a*. Sur la fig. 34, *c* on a montré la direction du couple maximal positif dans la section de l'arbre en question.

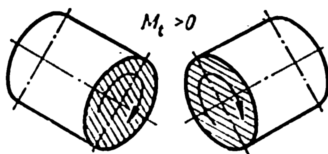


FIG. 30

Avant de passer à la construction des diagrammes des forces transversales et des moments fléchissants des poutres en flexion, chapitre de la résistance des matériaux ayant une importance capitale pour comprendre le comportement des éléments de structures sollicitées, rappelons quelques notions initiales principales relatives aux poutres.

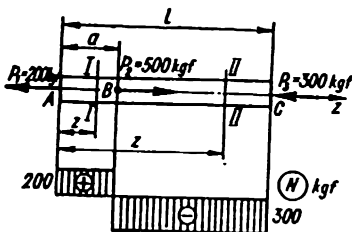


FIG. 31

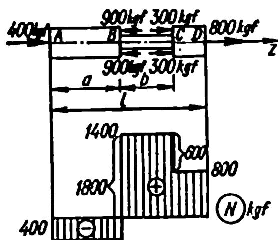


FIG. 32

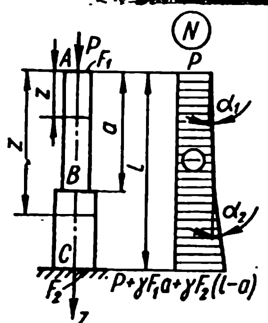


FIG. 33

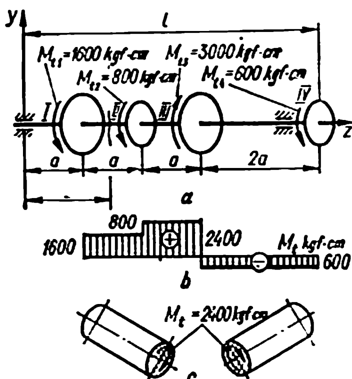


FIG. 34

§ 15. Les poutres et leurs appuis

On appelle *poutres* les barres rectilignes soumises à la flexion. On appelle *flexion plane* d'une poutre ce type de flexion pour lequel toutes les forces données se trouvent dans un même plan (le plan des forces) (fig. 35, *a*), ce plan étant confondu avec l'un des plans principaux de la poutre.

Pour les calculs, on remplace conventionnellement la poutre par son axe (fig. 35, *b*); toutes les charges doivent alors être ramenées à cet axe tandis que le plan des forces coïncidera avec le plan du dessin.

Tous les organes d'appui pour poutres qu'on rencontre peuvent être schématisés sous forme de trois types principaux d'appuis suivants:

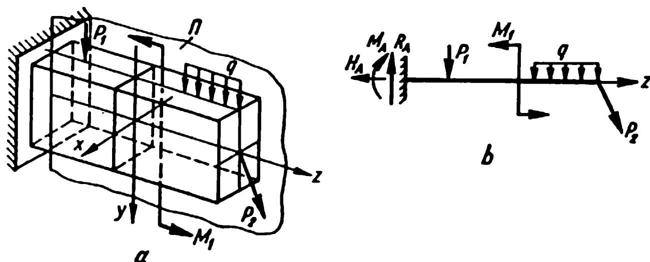


FIG. 35

Appui *articulé mobile* (fig. 36, *a*) dans lequel ne peut apparaître qu'une seule composante de réaction R_A, dirigée le long de la tige d'appui.

Appui *articulé immobile* (fig. 36, *b*) qui admet deux composantes de réaction: la réaction verticale R_A et la réaction horizontale H_A.

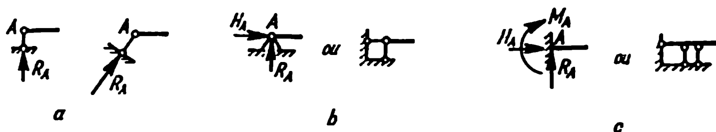


FIG. 36

Encastrement (ou encore *encastrement complet* ou *enchâssement*) où sont possibles trois composantes de réaction: les réactions verticale (R_A) et horizontale (H_A) ainsi que le moment d'appui M_A (fig. 36, *c*).

On suppose que tous les réactions et moments sont appliqués au point A, considéré comme le centre de gravité de la section d'appui.

La poutre représentée sur la fig. 37, *a* est dite *poutre simple* ou *poutre à une travée* ou encore *poutre à deux appuis* tandis que la distance l entre les appuis est dite *travée*.

On appelle *cantilever* une poutre encastrée à une extrémité et n'ayant pas d'autres appuis (fig. 35, *b*) ou une partie de la poutre qui ressort au-delà des appuis (la partie BC sur la fig. 37, *b* et les parties AC et BD sur la fig. 37, *c*). Les poutres dotées de parties faisant saillie portent le nom de *poutres en console*.

Une poutre est dite *isostatique* si le nombre de réactions d'appui inconnues ne dépasse pas trois; dans le cas contraire, la poutre sera dite *hyperstatique*. Les poutres représentées sur les fig. 35 et 37 sont isostatiques tandis que celle de la fig. 38, *a*, appelée *poutre continue*, est hyper-

statique puisqu'elle comporte cinq réactions d'appuis inconnues: trois à l'appui A et deux aux appuis B et C à raison d'une à chacun. En pratiquant

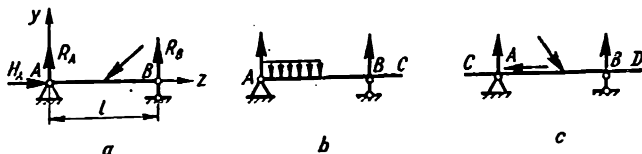


FIG. 37

des articulations, par exemple en deux sections quelconques de la première travée de la poutre (les poids D et E sur la fig. 38, b), nous obtenons

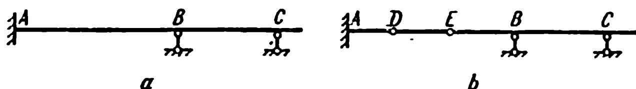


FIG. 38

une poutre articulée isostatique car chacune de ces articulations intermédiaires fait qu'aux trois équations fondamentales de la statique s'ajoute une équation supplémentaire: en effet, par rapport au centre de l'articulation, la somme des moments créés par toutes les forces situées d'un côté de cette dernière est égale à zéro.

16. Détermination des réactions

Pour pouvoir tracer les diagrammes, il est indispensable de connaître toutes les forces extérieures y compris les réactions qui doivent être préalablement déterminées.

Pour déterminer les réactions, il est recommandé de s'en tenir à l'ordre suivant que nous illustrerons sur l'exemple d'une poutre simple (fig. 37, a):

1. Désignons les appuis par les lettres A et B et déterminons les trois inconnues R_A, R_B et H_A à partir des équations d'équilibre suivantes:

la somme des projections de toutes les forces sur l'axe de la poutre est égale à zéro

$$\Sigma Z = 0,$$

d'où nous trouvons H_A;

la somme des moments créés par toutes les forces par rapport à l'articulation d'appui A est égale à zéro

$$\Sigma M_A = 0,$$

d'où nous trouvons R_B;

la somme des moments créés par toutes les forces par rapport à l'articulation d'appui B est égale à zéro

$$\Sigma M_B = 0,$$

d'où nous trouvons R_A.

2. En guise de contrôle, on peut se servir de la condition d'égalité à zéro de la somme des projections de toutes les forces sur l'axe y

$$\Sigma Y = 0$$

ou bien de la condition d'égalité à zéro de la somme des moments par rapport à n'importe quel point C différent de A et de B, c'est-à-dire

$$\Sigma M_C = 0.$$

3. Si au terme des calculs l'une ou l'autre réaction s'avère négative, il convient de changer sa direction sur le dessin contre une direction opposée à celle qui avait été adoptée au début des calculs.

4. Si les charges agissant sur la poutre sont perpendiculaires à l'axe de cette dernière $H_A = 0$ et on ne se sert plus de l'équation $\Sigma Z = 0$.

§ 17. Efforts et moments dans les sections d'une poutre. Tracé des diagrammes des Q et des M

En flexion plane, toute la charge est située dans le plan principal zy de la barre (fig. 35, *a*), aussi, ne peut-elle donner de projections sur l'axe x ni de moments par rapport aux axes z et y. Par conséquent, dans n'importe quelle section de la poutre

$$Q_x = M_z = M_t = M_y = 0$$

seront nulles également les trois grandeurs: N, Q_y et M_x qu'il est convenu de désigner par N, Q et M.

Ces efforts agissent dans les sections des portiques et des barres curvilignes. Mais dans les poutres, pour une charge perpendiculaire à l'axe, la force longitudinale N sera égale à zéro. Aussi a-t-on affaire, pour les poutres, à l'effort tranchant Q ainsi qu'au moment fléchissant M.

Quand on a à tracer les diagrammes des efforts tranchants Q et des moments fléchissants M, on observe les règles suivantes pour les signes:

L'effort tranchant *Q dans une section sera positif si ses vecteurs tendent à mettre en rotation, dans le sens des aiguilles d'une montre, les parties de la poutre sectionnée* (fig. 39, *a*).

Le moment fléchissant M dans une section est positif s'il provoque une compression des fibres supérieures de la poutre (fig. 39, *a*).

Les efforts tranchants et les moments que montre la fig. 39, *b* ont, évidemment, des signes négatifs. Les diagrammes des efforts tranchants

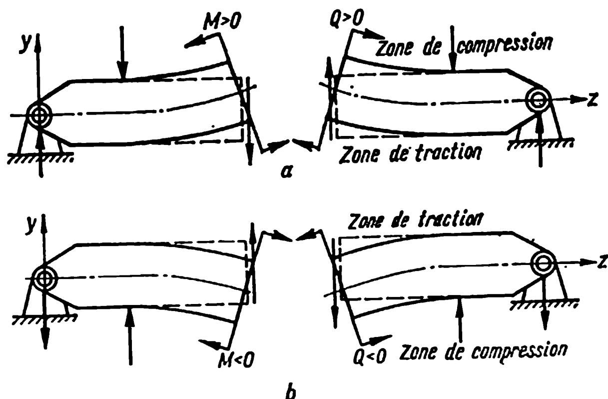


FIG. 39

et des moments fléchissants pour des poutres sollicitées selon différents schémas types, sont représentés sur les fig. 40-44.

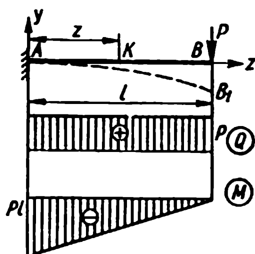


FIG. 40

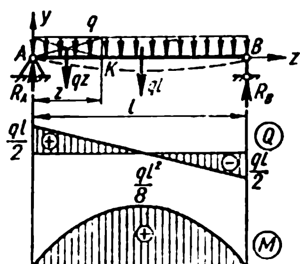


FIG. 41

La ligne en pointillé montre la position des poutres en leur état déformé.

Pour une poutre cantilever sollicitée à son extrémité libre par une charge concentrée P (fig. 40), l'effort tranchant et le moment fléchissant agissant

dans une section quelconque, ayant pour abscisse z, ont été déterminés, respectivement, au moyen des formules suivantes

$$Q(z) = P; \quad M(z) = -P \cdot KB = -P(l - z).$$

Pour une poutre à deux appuis sollicitée par une charge d'intensité q uniformément répartie sur la longueur (fig. 41), les réactions de butée sont $R_A = R_B = \frac{ql}{2}$, l'effort tranchant et le moment fléchissant ont été déterminés au moyen des formules

$$Q(z) = R_A - q \cdot AK = q\left(\frac{l}{2} - z\right);$$

$$M(z) = R_A z - qz \cdot \frac{z}{2} = \frac{ql^2}{2}\left(\frac{z}{l} - \frac{z^2}{l^2}\right).$$

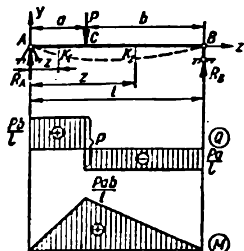


FIG. 42

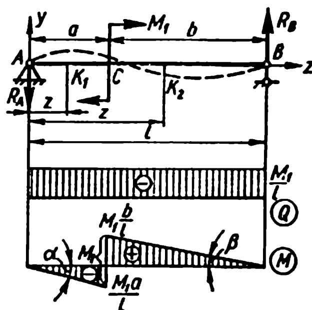


FIG. 43

Pour une poutre à deux appuis sollicitée par une force concentrée P appliquée dans la travée (fig. 42), les réactions de butée sont $R_A = \frac{Pb}{l}$, $R_B = \frac{Pa}{l}$; l'effort tranchant et le moment fléchissant ont été déterminés, sur l'intervalle $AC (0 \leqslant z \leqslant a)$, au moyen des formules

$$Q(z) = R_A = \frac{Pb}{l}; \quad M(z) = R_A \cdot AK_1 = \frac{Pb}{l} z$$

et sur l'intervalle CB $(a \leqslant z \leqslant l)$, d'après les formules

$$Q(z) = -R_B = -\frac{Pa}{l}; \quad M(z) = R_B \cdot K_2 B = \frac{Pa}{l}(l - z).$$

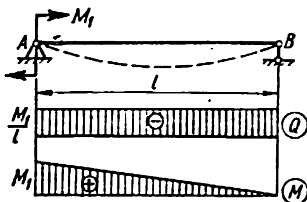


FIG. 44

Pour une poutre à deux appuis sollicitée par un moment concentré M_1 appliqué dans la travée (fig. 43), les réactions de butée sont $R_A = R_B = \frac{M_1}{l}$, l'effort tranchant et le moment fléchissant ont été déterminés, sur l'intervalle AC $(0 \leqslant z \leqslant a)$, d'après les formules

$$Q(z) = -R_A = -\frac{M_1}{l}; \quad M(z) = -R_A \cdot AK_1 = -\frac{M_1}{l}z,$$

et sur l'intervalle CB $(a \leqslant z \leqslant l)$ d'après les formules

$$Q(z) = -R_B = -\frac{M_1}{l}; \quad M(z) = R_B \cdot K_2B = \frac{M_1}{l}(l - z).$$

Pour le cas particulier quand le moment est appliqué dans la section d'appui, $Q(z)$ et $M(z)$ se déterminent au moyen des formules d'un des intervalles considérés. Par exemple, si le moment est appliqué dans la section A (fig. 44), $Q(z)$ et $M(z)$ se déterminent d'après les formules du second intervalle pour $a = 0$.

§ 18. Dépendances différentielles pour barres en flexion. Certaines particularités des diagrammes des Q et M

Considérons une poutre sollicitée par une charge arbitraire (fig. 45, *a*). Entre l'intensité q de la charge répartie, l'effort tranchant Q et le moment fléchissant M qui agissent dans une certaine section, existent les dépendances différentielles suivantes que l'on peut aisément déduire des conditions d'équilibre d'un élément de longueur dz prélevé de la poutre (fig. 45, *b*):

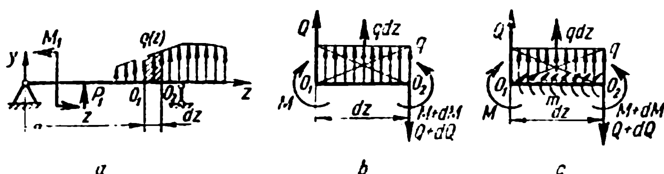
$$\frac{dQ}{dz} = q; \tag{3.1}$$

$$\frac{dM}{dz} = Q; \tag{3.2}$$

$$\frac{d^2M}{dz^2} = q. \tag{3.3}$$

Pour les cas où dans l'intervalle considéré agit un moment uniformément réparti d'intensité m kgf · cm/cm (fig. 45, *c*), la formule (3.2) prend la forme suivante

$$\frac{dM}{dz} = Q + m. \tag{3.4}$$



a *b* *c*

FIG. 45

Les relations (3.1)-(3.4) sont dites *dépendances différentielles en flexion*. Elles permettent d'établir certaines particularités des diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissants.

1. Sur les intervalles où il n'y a pas de charge répartie, le diagramme des Q est délimité par des droites parallèles à la base tandis que le diagramme des M l'est, dans le cas le plus général, par des droites obliques (fig. 46).

2. Sur les intervalles où la poutre supporte une charge répartie, le diagramme des Q est délimité par des droites obliques tandis que celui des M l'est par des paraboles carrées (fig. 47). Quand on trace le diagramme des M du côté des fibres comprimées, l'incurvation de la parabole

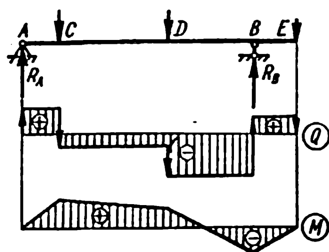


FIG. 46

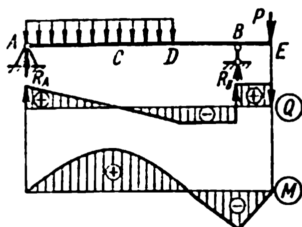
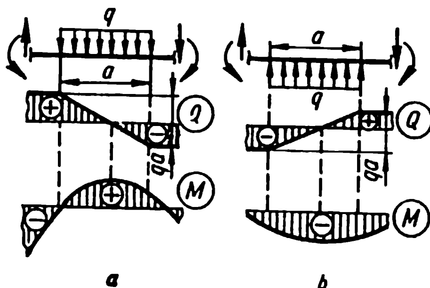


FIG. 47

est dirigée dans le sens opposé à celui dans lequel agit la charge q (fig. 48, *a*, *b*).

3. Dans les sections où $Q = 0$, la tangente au diagramme des M est parallèle à l'axe du diagramme (fig. 47, 48).

4. Sur les intervalles où $Q > 0$, M croît, c'est-à-dire les ordonnées positives du diagramme des M augmentent de gauche à droite tandis



a b

FIG. 48

que celles négatives diminuent (les intervalles AC et BE sur les fig. 46 et 47). Sur les intervalles où $Q < 0$, M diminue (les intervalles CD et DB sur les fig. 46 et 47).

5. Dans les sections où les charges concentrées sont appliquées à la poutre:

a) sur le diagramme des Q, il y aura des passages brusques d'une valeur proportionnelle aux forces appliquées et dirigés dans le même sens que la ligne d'action de ces dernières (sur les fig. 46 et 47 ces passages sont marqués par les traits forts munis de flèches);

b) sur le diagramme des M, il y aura des brisures (fig. 49) dont la pointe sera dirigée dans le sens opposé à celui de la ligne d'action de la force.

6. Dans les sections où des moments concentrés sont appliqués à la poutre, le diagramme des M sera marqué par des passages brusques d'une valeur proportionnelle à ces moments tandis que sur le diagramme des Q, il n'y aura aucune modification.

7. Si au bout d'une console ou dans un appui terminal est appliqué un moment concentré, le moment fléchissant dans cette section sera égal au moment extérieur (les sections C et B sur la fig. 50).

8. Le diagramme des Q n'est rien d'autre que la courbe représentant la dérivée de la courbe des M. C'est pourquoi, les ordonnées des Q sont

proportionnelles à la tangente de l'angle d'inclinaison de la ligne tangentielle à la courbe des M $\left(\text{sur la fig. 43 } \alpha = \beta = \text{arctg} \frac{M_1}{l}\right)$.

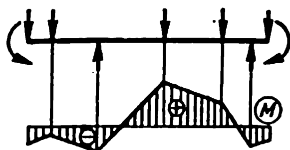


FIG. 49

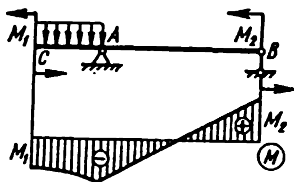


FIG. 50

Le tableau 7 donne les diagrammes des efforts tranchants et des moments fléchissants pour les poutres dont les bouts sont fixés de façons différentes.

19. Tracé de diagrammes pour portiques isostatiques

On appelle portique les systèmes faits de barres reliées entre elles par des nœuds rigides. Il est convenu d'appeler *montants* les barres verticales d'un portique tandis que celles horizontales, *sous-poutres*. La rigidité des nœuds élimine la possibilité de rotation mutuelle des barres fixées dans le nœud, en d'autres mots, au point nodal les angles entre les axes ne varient pas lors de la déformation.

L'axe d'un portique est une ligne brisée dont chacune des parties peut, cependant, être considérée comme une poutre. Aussi, le tracé du diagramme pour un portique se ramène-t-il au tracé des diagrammes pour chacune des barres qui le composent, tout comme pour une poutre. Cependant, à la différence des poutres ordinaires, outre les moments fléchissants M et les efforts tranchants Q, dans les sections des barres d'un portique agissent de plus les forces longitudinales N. C'est pourquoi, pour les portiques, il faut tracer les diagrammes des M, des Q et des N.

Pour les N et Q, les règles adoptées plus haut pour les signes restent en vigueur: $N > 0$, si la force longitudinale provoque la traction; $Q > 0$, si le vecteur de la force provoque une rotation de la partie sectionnée du portique dans le sens des aiguilles d'une montre.

Pour les moments fléchissants, il n'existe pas de règles spéciales établies pour les signes mais, lors de l'établissement des équations pour M, on prend à son gré l'un ou l'autre moment pour positif.

Lors du tracé des diagrammes, les ordonnées positives des N et des Q sont portées de façon à être dirigées vers le côté extérieur, tandis que celles négatives, vers l'intérieur du portique. Convenons-nous de tracer le diagramme des M sur les fibres comprimées. Le tracé des diagrammes doit être précédé par la détermination des réactions inconnues.

La fig. 51, *b*, *c*, *d* montre un exemple de tracé des diagrammes des N, des Q et des M pour un portique cantilever sollicité d'après le schéma représenté sur la fig. 51, *a*.

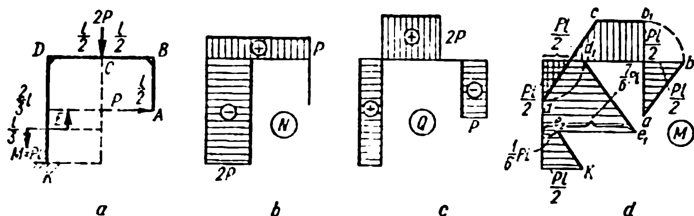


FIG. 51

Les valeurs des efforts intérieurs N, Q et M ont été déterminées pour les intervalles correspondants (voir fig. 51, *a*) à l'aide des formules suivantes:

Intervalle $AB \left(0 \leqslant z \leqslant \frac{l}{2}\right)$

$$N(z) = 0; \quad Q(z) = -P; \quad M(z) = Pz.$$

Intervalle $BC \left(0 \leqslant z \leqslant \frac{l}{2}\right)$

$$N(z) = P; \quad Q(z) = 0; \quad M(z) = P\frac{l}{2}.$$

Intervalle $CD \left(0 \leqslant z \leqslant \frac{l}{2}\right)$

$$N(z) = P; \quad Q(z) = 2P; \quad M(z) = P\frac{l}{2} - 2Pz = P\left(\frac{l}{2} - 2z\right).$$

Intervalle $DE \left(0 \leqslant z \leqslant \frac{2}{3}l\right)$

$$N(z) = -2P; \quad Q(z) = P; \quad M(z) = 2P\frac{l}{2} - P\left(\frac{l}{2} - z\right) = P\left(\frac{l}{2} + z\right).$$

Intervalle EK $\left(\frac{2}{3} l < z \leqslant l\right)$

$$N(z) = -2P; \quad Q(z) = P;$$

$$M(z) = P\left(\frac{l}{2} + z\right) - M = P\left(z - \frac{l}{2}\right).$$

§ 20. Tracé des diagrammes pour barres curvilignes

Les sections transversales d'une barre curviligne plane, tout comme dans les portiques, peuvent subir l'action de trois facteurs de force: N, Q et M. Dans le cas où l'axe d'une barre curviligne représente un arc de cercle, il est commode de déterminer la position de n'importe quelle section à l'aide d'un système polaire de coordonnées; les forces longitudinale et transversale ainsi que le moment fléchissant seront alors fonction de l'angle φ: $N(\varphi)$, $Q(\varphi)$, $M(\varphi)$.

Pour N et Q restent en vigueur les règles pour signes préalablement établies; les diagrammes des M, comme dans le cas des portiques, sont tracés du côté des fibres comprimées.

La fig. 52, *b*, *c*, *d* montre un exemple de tracé des diagrammes $N(\varphi)$, $Q(\varphi)$ et $M(\varphi)$ pour une poutre curviligne cantilever sollicitée d'après le schéma représenté sur la fig. 52, *a* pour $P_1 = 2P_2 = P$; on a alors

$$N(\varphi) = (\cos\varphi + 0{,}5\sin\varphi)P;$$

$$Q(\varphi) = (\sin\varphi - 0{,}5\cos\varphi)\,P;$$

$$M(\varphi) = (1 - \cos\varphi - 0{,}5\sin\varphi)\,PR.$$

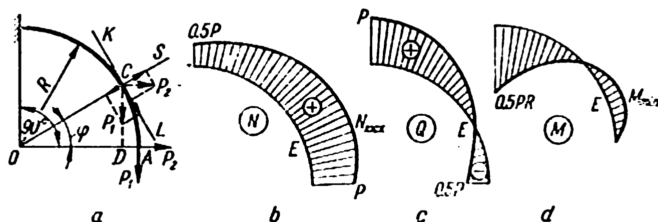


FIG. 52

Si une barre curviligne subit l'action d'une charge uniformément répartie, il n'est pas sans intérêt d'avoir en vue le théorème suivant pour

le calcul de N, Q et M: *la résultante d'une charge uniformément répartie appliquée à un arc au contour arbitraire est égale au produit de l'intensité de la charge par la longueur de la corde qui tend cet arc, perpendiculaire à cette corde et passe par son milieu.*

La fig. 53, *b*, *c*, *d* montre les diagrammes des $N(\varphi)$, $Q(\varphi)$ et $M(\varphi)$ pour une barre curviligne sollicitée d'après le schéma représenté sur la fig. 53, *a*.

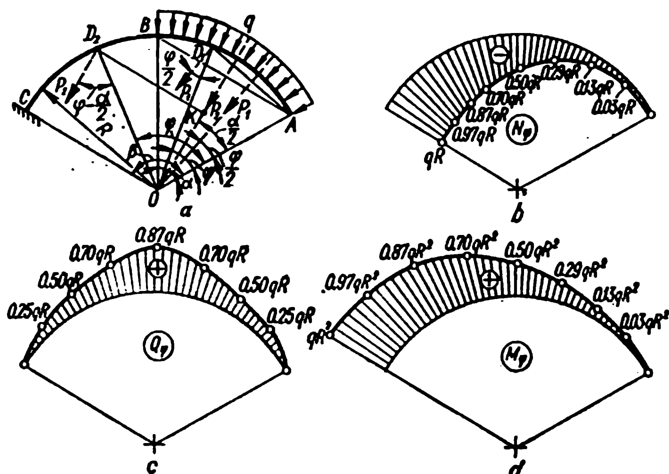


FIG. 53

Sur l'intervalle $0 < \varphi < \alpha$, $N(\varphi)$, $Q(\varphi)$ et $M(\varphi)$ ont été déterminés, respectivement, à l'aide des formules suivantes:

$$N(\varphi) = -P_1 \sin\frac{\varphi}{2} = -2qR\sin^2\frac{\varphi}{2} = -qR(1-\cos\varphi);$$

$$Q(\varphi) = P_1 \cos\frac{\varphi}{2} = 2qR\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} = qR\sin\varphi;$$

$$M(\varphi) = P_1\frac{AD_1}{2} = 2qR^2\sin^2\frac{\varphi}{2} = qR^2(1-\cos\varphi),$$

dans lesquelles la résultante de la charge répartie q agissant sur un arc correspondant à l'angle φ est $P_1 = 2qR\sin\frac{\varphi}{2}$.

Sur l'intervalle $\alpha < \varphi < \beta$

$$N(\varphi) = -P_2 \sin\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right) = -2qR \sin\frac{\alpha}{2} \sin\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right);$$

$$Q(\varphi) = P_2 \cos\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right) = 2qR \sin\frac{\alpha}{2} \cos\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right);$$

$$M(\varphi) = P_2 \cdot KD_2 = P_2 \cos\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right) = 2qR^2 \sin\frac{\alpha}{2} \sin\left(\varphi - \frac{\alpha}{2}\right),$$

ici, la résultante de la charge répartie q sur l'arc AB correspondant à l'angle α est $P_2 = 2qR \sin\frac{\alpha}{2}$.

§ 21. Dépendances différentielles pour barres curvilignes planes en flexion

Les relations différentielles entre q, Q, N et M que l'on peut déduire des conditions d'équilibre d'un élément de longueur ds prélevé d'une barre curviligne soumise à une sollicitation quelconque (fig. 54 et 55) ont la forme suivante

$$\frac{dN}{d\varphi} = -Q; \tag{3.5}$$

$$\frac{dQ}{d\varphi} = N + qr; \tag{3.6}$$

$$\frac{dM}{d\varphi} = Qr. \tag{3.7}$$

En posant $rd\varphi = ds$, on peut récrire ces équations sous la forme suivante

$$\frac{dN}{ds} = -\frac{Q}{r}; \tag{3.8}$$

$$\frac{dQ}{ds} = q + \frac{N}{r}; \tag{3.9}$$

$$\frac{dM}{ds} = Q. \tag{3.10}$$

Pour établir ces relations, on a supposé que le moment fléchissant est positif s'il provoque la compression des fibres intérieures de la barre (des fibres situées du côté concave) et la charge répartie l'est aussi si elle

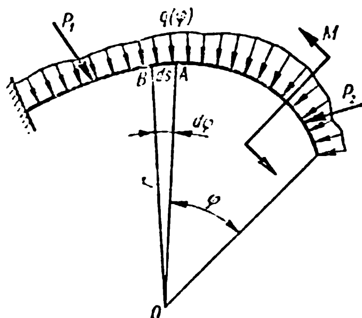


FIG. 54

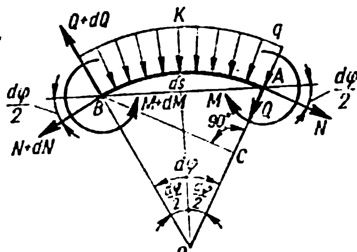


FIG. 55

est dirigée vers le centre de la courbure de la barre. Les relations (3.5)-(3.10) permettent de vérifier la justesse des équations pour $N(\varphi)$, $Q(\varphi)$ et $M(\varphi)$. Les tableaux 8 et 9 donnent les expressions pour les efforts internes dans une barre curviligne soumise à des sollicitations différentes (quant à leur mode).

§ 22. Tracé des diagrammes des efforts internes pour barres à trois dimensions

Dans les structures de type portique pour lesquelles les axes des barres qui les composent ne se trouvent pas dans un même plan, de même que dans les structures soumises à une charge tridimensionnelle, tous les six facteurs de force internes N_z, Q_y, Q_x, M_z, M_y, M_x (fig. 29, *b*) peuvent exercer leur influence dans les sections des barres. Dans ce cas, les diagrammes des moments fléchissants sont, comme auparavant, tracés du côté des fibres comprimées; ce faisant, *il convient de les orienter de façon que le plan du diagramme coïncide avec le plan d'action du couple du moment fléchissant pour lequel on trace ce diagramme.* Le choix du signe du moment fléchissant se fait de façon arbitraire et ce, dans le seul cas où il s'avère nécessaire d'écrire l'équation correspondante.

Pour les forces longitudinales et les couples de torsion, les règles données plus haut pour les signes restent en vigueur. Les diagrammes des N et des M_t peuvent être orientés arbitrairement, mais leurs ordonnées sont toujours portées selon la normale à l'axe de la barre.

Les efforts tranchants agissant dans les sections sont considérés comme positifs si leur direction coïncide avec la direction positive de y et de x.

En guise d'illustration, on a présenté (fig. 57) les résultats du tracé des diagrammes des facteurs de force internes pour une barre brisée (fig. 56, *a*).

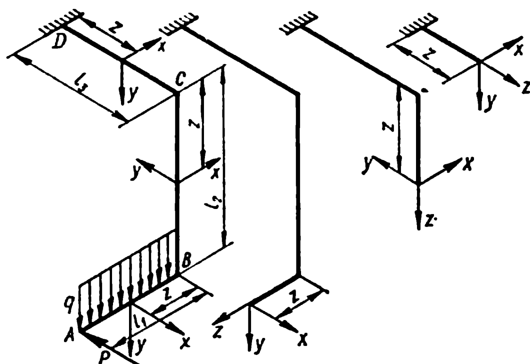


FIG. 56

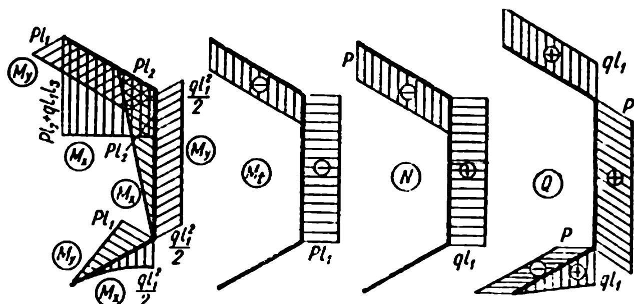


FIG. 57

La fig. 59 montre les diagrammes des efforts internes pour une barre curviligne soumise à une sollicitation tridimensionnelle (fig. 58); ces

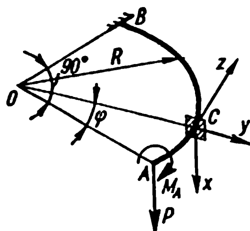


FIG. 58

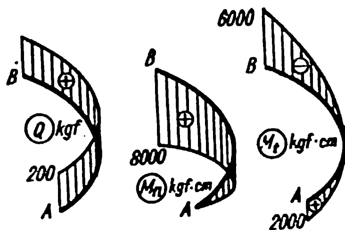


FIG. 59

diagrammes ont été tracés à partir des relations suivantes

$$M_{fl}(\varphi) = M_y(\varphi) = (PR + M_A)\sin\varphi;$$

$$M_t(\varphi) = M_z(\varphi) = (PR + M_A)\cos\varphi - PR,$$

avec $P = 200$ kgf; $M_A = 2000$ kgf·cm; $R = 30$ cm.

§ 23. Contraintes dans la section

Dans les sections d'une barre sollicitée apparaissent des efforts internes réparties de façon continue (fig. 60, *a*) dont le *vecteur principal* $\vec{R}$ et le *moment principal* $\vec{M}$ sont les résultantes appliquées au centre de gravité de la section. Les projections de $\vec{R}$ et $\vec{M}$ sur les axes centraux principaux x, y

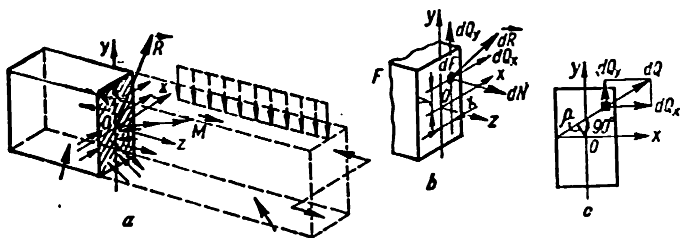


FIG. 60

et l'axe de la barre z donnent les valeurs des composantes des efforts internes N, Q_y, Q_x, M_y, M_x et M_z.

Considérons un élément infiniment petit dF de l'aire (fig. 60, b) ayant des coordonnées arbitraires x, y. Etant donné la petitesse de l'élément, on peut poser que les efforts internes y sont distribués uniformément tandis que leur résultante $\overrightarrow{dR}$ est appliquée à son centre de gravité. Par conséquent, quand on aura à ramener ces efforts au centre de gravité de l'élément, $\overrightarrow{dR}$ sera le vecteur principal de la force tandis que le moment principal sera, évidemment, nul.

Les forces élémentaires dN, dQ_y, dQ_x seront les projections de $\overrightarrow{dR}$ sur les axes z, y, x. En divisant ces grandeurs par l'aire dF, nous obtiendrons les expressions pour les efforts internes revenant à l'unité de surface qu'on appelle *contraintes* au point (y, x) de la section transversale de la barre:

$$\sigma = \frac{dN}{dF}; \qquad \tau_y = \frac{dQ_y}{dF}; \qquad \tau_x = \frac{dQ_x}{dF}, \tag{3.11}$$

σ étant la *contrainte normale*, τ_y et τ_x, les *contraintes tangentielles.*

Les contraintes ont pour unité de mésure la force divisée par la longueur prise au carré (kgf/mm², kgf/cm², etc.).

Ainsi, on appelle *contrainte la force intérieure ramenée à l'unité de l'aire en un point donné de la section considérée.*

La *contrainte totale* en un point peut être exprimée par l'intermédiaire des contraintes normales et tangentielle:

$$p = \frac{dR}{dF} = \sqrt{\sigma^2 + \tau_y^2 + \tau_x^2}. \tag{3.12}$$

Tenant compte de (3.11), on peut aisément établir les relations générales existant entre, d'une part, les contraintes σ et τ et, d'autre part, les composantes des efforts internes:

$$N = \int_F \sigma \, dF; \tag{3.13}$$

$$Q_y = \int_F \tau_y \, dF; \tag{3.14}$$

$$Q_x = \int_F \tau_x dF; \tag{3.15}$$

$$M_y = \int_F x \sigma \, dF; \tag{3.16}$$

$$M_x = \int_F y \sigma \, dF; \tag{3.17}$$

$$M_z = M_t = \int_F (y\tau_x + x\tau_y) \, dF = \int_F \rho\tau \, dF, \tag{3.18}$$

avec

$$\tau = \frac{dQ}{dF} = \sqrt{\left(\frac{dQ_y}{dF}\right)^2 + \left(\frac{dQ_x}{dF}\right)^2} = \sqrt{\tau_y^2 + \tau_x^2};$$

ρ étant la distance du centre de gravité de la section à la ligne d'action de dQ (fig. 60, *c*).

Les relations (3.13)-(3.18) sont dites *équations statiques*. En calcul, quand, dans le cas le plus général, on ignore la loi de distribution des contraintes dans la section, il est impossible de s'en servir. Par exemple, connaissant le moment fléchissant M dans la section, il est impossible de trouver les contraintes normales en se servant de la formule (3.16). Cependant, si en se basant sur l'une ou l'autre considération on parvient à établir la loi de distribution de σ ou τ, dans la section on peut trouver aussi les valeurs mêmes de ces contraintes à partir des formules (3.13)-(3.18).

Lors de l'établissement des formules pour déterminer les contraintes, on aura intérêt à observer l'ordre suivant:

1. Considérer l'*aspect statique du problème:* des équations (3.13)-(3.18), on choisit celles qui seront nécessaires pour la résolution du problème.

2. Considérer l'*aspect géométrique du problème:* en se basant sur les données expérimentales, on écrit les équations géométriques qui établissent la dépendance entre les déplacements des points de la barre et leur position dans la section.

3. Considérer l'*aspect physique du problème:* en se basant sur les données expérimentales, on écrit les équations qui établissent la dépendance entre les contraintes et les déformations (ou déplacements).

4. On passe alors à la synthèse, c'est-à-dire les équations établies aux points 1-3 se résolvent ensemble et, en éliminant les déformations (ou déplacements), on obtient des formules exprimant les contraintes par l'intermédiaire des efforts ou des moments dans la section.

§ 24. Conditions de solidité et de rigidité

Le problème fondamental de la résistance des matériaux consiste en la détermination des dimensions fiables de la section transversale d'une pièce soumise à l'action de force quelconque, effet thermique ou toute autre sollicitation. Ces dimensions doivent être déterminées à partir du calcul de résistance, rigidité ou stabilité. Le rôle principal revient au calcul de résistance.

Du point de vue physique, il est clair que le matériau ne puisse pas supporter des contraintes aussi grandes qu'on veut. Aussi, les valeurs des contraintes maximales doivent-elles, en partant de la condition de fiabilité de la pièce au cours de l'exploitation, être limitées par certaines quantités permises. Ces quantités sont dites *contraintes admissibles* et désignées par $[\sigma]$ ou par $[\tau]$.

Si sont connues les contraintes admissibles et que l'on dispose en plus des formules exprimant les contraintes au moyen des efforts et des moments agissant dans une section, on peut, en principe (en choisissant les dimensions nécessaires pour que la contrainte ne dépasse pas la contrainte admissible), calculer la résistance de n'importe quelle pièce.

En pratique, on rencontre trois cas de calcul de résistance:

1. Les sollicitations étant connues, l'on demande de trouver, pour le matériau choisi, les dimensions correspondantes de la section transversale d'une pièce, capable d'assurer une exploitation fiable de cette dernière (calcul de projet).

2. Les dimensions de la pièce et le matériau sont connus. L'on demande de vérifier si la pièce pourra supporter une sollicitation donnée (calcul de contrôle).

3. Sont connus le matériau, les dimensions de la pièce ainsi que la façon dont elle est chargée. L'on demande de déterminer la valeur admissible de cette charge.

A la base de tous ces calculs est posée la *condition de résistance*

$$\sigma_{max} \leqslant [\sigma] \quad \text{ou} \quad \tau_{max} \leqslant [\tau]$$

exprimant le fait que les contraintes maximales — normale, tangentielle ou une contrainte équivalente (voir chap. VI) — agissant en un point présentant du danger, ne doivent pas dépasser la contrainte admissible.

Le calcul de rigidité se fait de façon analogue avec cette différence-ci qu'au lieu de la condition de résistance on se sert de la *condition de rigidité* qui impose des limites à la valeur des déformations (ou déplacements). Néanmoins, même le calcul à la rigidité étant fait, il faut toujours effectuer le calcul de vérification de résistance et, s'il donne un résultat négatif, il convient d'adopter les dimensions obtenues à partir du calcul à la solidité.

Réactions d'appuis, efforts tranchants et moments fléchissants pour poutres isostatiques

Schéma de mise en charge de la poutre, diagrammes des Q et des M	Réactions d'appuis	Effort tranchant Q
	$R_B = 0$ $M_B = M_0$	$0 \leqslant z \leqslant l$ $Q = 0$
	$R_B = 0$ $M_B = M_1 + M_2$	$0 \leqslant z \leqslant l$ $Q = 0$
	$R_B = 0$ $M_B = M_1 - M_2$	$0 < z < l$ $Q = 0$
	$R_D = 0$ $M_B = ml$	$0 < z < l$ $Q = 0$

Tableau 7

Moment fléchissant M	Coordonnée de la section dangereuse z_0 et moment maximal M_{max}
$0 \leqslant z \leqslant l$ $M = -M_0$	—
$0 \leqslant z \leqslant a$ $M = 0$ $a \leqslant z \leqslant a + b$ $M = -M_1$ $a + b \leqslant z \leqslant l$ $M = -(M_1 + M_2)$	$a + b \leqslant z_0 \leqslant l$ $M_{max} = -(M_1 + M_2)$
$0 \leqslant z \leqslant a$ $M = 0$ $a \leqslant z \leqslant a + b$ $M = -M_1$ $a + b \leqslant z \leqslant$ $M = -(M_1 - M_2)$	I $M_1 > M_2$ $a \leqslant z_0 \leqslant b$ $M_{max} = -M_1$ II $M_2 > 2M_1$ $a + b \leqslant z_0 \leqslant l$ $M_{max} = M_2 - M_1$
$0 \leqslant z \leqslant$ $M = -mz$	$z_0 = l$ $M_{max} = -ml$

Schéma de mise en charge de la poutre, diagrammes des Q et des M	Réactions d'appuis	Effort tranchant Q
	$R_B = P$ $M_B = Pl$	$0 \leq z \leq l$ $Q = -P$
	$R_B = \sum_{i=1}^{n} P_i$ $M_B = \sum_{i=1}^{n} P_i b_i$ $b_i = l - a_i$	$a_i \leq z \leq a_{i+1}$ $Q = -\sum_{j=1}^{i} P_j$
	$R_B = ql$ $M_B = \frac{ql^2}{2}$	$0 \leq z \leq l$ $Q = -qz$
	$R_B = qa$ $M_B = qa\left(l - \frac{a}{2}\right)$	$0 \leq z \leq a$ $Q = -qz$ $a \leq z \leq l$ $Q = -qa$

Moment fléchissant M	Coordonnée de la section dangereuse z_0 et moment maximal M_{max}
$0 < z < l$ $M = -Pz$	$z_0 = l$ $M_{max} = -Pl$
$a_i < z < a_{i+1}$ $M = -\sum_{j=1}^{i} P_j(z - a_j)$	$z_0 =$ $M_{max} = -\sum_{i=1}^{n} P_i b_i$
$0 < z < l$ $M = -\frac{qz^2}{2}$	$z_0 = l$ $M_{max} = -\frac{ql^2}{2}$
$0 < z < a$ $M = -\frac{qz^2}{2}$ $a < z < l$ $M = -qa\left(z - \frac{a}{2}\right)$	$z_0 = l$ $M_{max} = -qa\left(l - \frac{a}{2}\right)$

Schéma de mise en charge de la poutre, diagrammes des Q et des M	Réactions d'appuis	Effort tranchant Q
A, B, q, R_B, M_B, z, l; (Q) $\frac{ql}{2}$; (M) $\frac{ql^2}{6}$	$R_B = \frac{ql}{2}$ $M_B = \frac{ql^2}{6}$	$0 < z < l$ $Q = -\frac{qz^2}{2l}$
A, B, q, R_B, M_B, z, l; (Q) $\frac{ql}{2}$; (M) $\frac{ql^2}{3}$	$R_B = \frac{ql}{2}$ $M_B = \frac{ql^2}{3}$	$0 < z < l$ $Q = -ql\left(\frac{z}{l} - \frac{1}{2}\frac{z^2}{l^2}\right)$
A, B, a, q, R_B, M_B, z, l; (Q) $\frac{qa}{2}$; (M) $\frac{qa}{2}\left(l - \frac{2}{3}a\right)$	$R_B = \frac{qa}{2}$ $M_B = \frac{qa}{2}\left(l - \frac{2}{3}a\right)$	$0 < z < a$ $Q = -\frac{qz^2}{2a}$ $a < z < l$ $Q = -\frac{qa}{2}$
A, B, a, q, R_B, M_B, z, l; (Q) $\frac{qa}{2}$; (M) $\frac{qa}{2}\left(l - \frac{1}{3}a\right)$	$R_B = \frac{qa}{2}$ $M_B = \frac{qa}{2}\left(l - \frac{a}{3}\right)$	$0 < z < a$ $Q = -\frac{qa}{2}\left(2\frac{z}{a} - \frac{z^2}{a^2}\right)$ $a < z < l$ $Q = -\frac{qa}{2}$

Moment fléchissant M	Coordonnée de la section dangereuse z_0 et moment maximal M_{max}
$0 \leqslant z \leqslant l$ $M = -\frac{qz^3}{6l}$	$z_0 = l$ $M_{max} = -\frac{ql^2}{6}$
$0 \leqslant z \leqslant l$ $M = -\frac{ql^2}{2}\left(\frac{z^2}{l^2} - \frac{1}{3}\frac{z^3}{l^3}\right)$	$z_0 = l$ $M_{max} = -\frac{ql^2}{3}$
$0 \leqslant z \leqslant a$ $M = -\frac{qz^3}{6a}$ $a \leqslant z \leqslant l$ $M = -\frac{qa}{2}\left(z - \frac{2}{3}a\right)$	$z_0 = l$ $M_{max} = -\frac{qa}{2}\left(l - \frac{2}{3}a\right)$
$0 \leqslant z \leqslant a$ $M = -\frac{qa^2}{2}\left(\frac{z^2}{a^2} - \frac{1}{3}\frac{z^3}{a^3}\right)$ $a \leqslant z \leqslant l$ $M = -\frac{qa}{2}\left(z - \frac{a}{3}\right)$	$z_0 = l$ $M_{max} = -\frac{qa}{2}\left(l - \frac{a}{3}\right)$

Schéma de mise en charge de la poutre, diagrammes des Q et des M	Réactions d'appuis	Effort tranchant Q
$\frac{l}{2}$, q, R_B, A, B, z, l, M_B, Q, $\frac{ql}{2}$, M, $\frac{ql^2}{4}$	$R_B = \frac{ql}{2}$ $M_B = \frac{ql^2}{4}$	$0 \leqslant z \leqslant \frac{l}{2}$ $Q = -\frac{qz^2}{2}$ $\frac{l}{2} \leqslant z \leqslant l$ $Q = -ql\left[\frac{1}{4} + \left(\frac{z}{l} - \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{z}{l} - \frac{1}{2}\right)^2\right]$
q_1, q_2, R_B, A, B, z, l, M_B, Q, $(q_1+q_2)\frac{l}{2}$, M, $(2q_1+q_2)\frac{l^2}{6}$	$R_B = \frac{q_1 + q_2}{2} l$ $M_B =$ $= (2q_1 + q_2)\frac{l^2}{6}$	$0 \leqslant z \leqslant l$ $Q = -q_1 z - \frac{q_2 - q_1}{2l} z^2$
$q_z = q\frac{z^2}{l^2}$, q_z, q, R_B, A, B, z, l, M_B, Q, $\frac{ql}{3}$, M, $\frac{ql^2}{12}$	$R_B = \frac{ql}{3}$ $M_B = \frac{ql^2}{12}$	$0 \leqslant z \leqslant l$ $Q = -\frac{qz^3}{3l^2}$
$q_z = \frac{qz(2l-z)}{l^2}$, q_z, q, R_B, A, B, z, l, M_B, Q, $\frac{2}{3}ql$, M, $\frac{ql^2}{4}$	$R_B = \frac{2}{3} ql$ $M_B = \frac{ql^2}{4}$	$0 \leqslant z \leqslant l$ $Q = -ql\left(\frac{z^2}{l^2} - \frac{1}{3}\frac{z^3}{l^3}\right)$

Moment fléchissant M	Coordonnée de la section dangereuse z_0 et moment maximal M_{max}
$0 < z < \frac{l}{2}$ $M = -\frac{qz^3}{3l}$ $\frac{l}{2} < z < l$ $M = -\frac{ql^2}{4}\left[\left(\frac{z}{l}-\frac{1}{3}\right)+2\left(\frac{z}{l}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{4}{3}\left(\frac{z}{l}-\frac{1}{2}\right)^3\right]$	$z_0 = l$ $M_{max} = -\frac{ql^2}{4}$
$0 < z < l$ $M = -\frac{q_1z^2}{2} - \frac{q_2-q_1}{6l}z^3$	$z_0 =$ $M_{max} = -(2q_1+q_2)\frac{l^2}{6}$
$0 < z < l$ $M = -\frac{qz^4}{12l^2}$	$z_0 = l$ $M_{max} = -\frac{ql^2}{12}$
$0 < z < l$ $M = -\frac{ql^2}{3}\left(\frac{z^3}{l^3}-\frac{z^4}{4l^4}\right)$	$z_0 =$ $M_{max} = -\frac{ql^2}{4}$

Schéma de mise en charge de la poutre, diagrammes des Q et des M	Réactions d'appuis	Effort tranchant Q
$q_z = \frac{4qz(l-z)}{l^2}$; q_z, q, R_B, M_B, z, l, Q, $\frac{2}{3}ql$, M, $\frac{ql^2}{3}$	$R_B = \frac{2}{3} ql$ $M_B = \frac{ql^2}{3}$	$0 < z < l$ $Q = -2ql\left(\frac{z^2}{l^2} - \frac{2}{3}\frac{z^3}{l^3}\right)$
R_A, M_0, R_B, A, B, z, l, $\frac{M_0}{l}$, Q, M_0, M	$R_A = R_B = \frac{M_0}{l}$	$0 < z < l$ $Q = -\frac{M_0}{l}$
M_1, M_2, R_B, A, B, z, l, R_A, $\frac{M_1-M_2}{l}$, Q, M_1, M, M_2	$R_A = R_B =$ $= \frac{M_1 - M_2}{l}$	$0 < z < l$ $Q = -\frac{M_1 - M_2}{l}$
M_1, R_B, M_2, A, B, R_A, z, l, $\frac{M_1+M_2}{l}$, Q, M_1, M, M_2	$R_A = R_B =$ $= \frac{M_1 + M_2}{l}$	$0 < z < l$ $Q = -\frac{M_1 + M_2}{l}$

Moment fléchissant M	Coordonnée de la section dangereuse z_0 et moment maximal M_{max}
$0 \leqslant z < l$ $M = -\frac{ql^2}{3}\left(2\frac{z^3}{l^3} - \frac{z^4}{l^4}\right)$	$z_0 = l$ $M_{max} = -\frac{ql^2}{3}$
$0 < z < l$ $M = \frac{M_0}{l}(l - z)$	$z_0 = 0$ $M_{max} = M_0$
$0 < z < l$ $M = M_1 - \frac{M_1 - M_2}{l}z$	I $M_1 > M_2$ $z_0 = 0;\ M_{max} = M_1$ II $M_1 < M_2$ $z_0 = l;\ M_{max} = M_2$
$0 < z < l$ $M = M_1 - \frac{M_1 + M_2}{l}z$	I $M_1 > M_2$ $z_0 = 0;\ M_{max} = M_1$ II $M_1 < M_2$ $z_0 = l;\ M_{max} = -M_2$

Schéma de mise en charge de la poutre, diagrammes des Q et des M	Réactions d'appuis	Effort tranchant Q
	$R_A = R_B = \frac{M_0}{l}$	$0 < z < l$ $Q = -\frac{M_0}{l}$
	$R_A = R_B =$ $= \frac{M_1 + M_2}{}$	$0 < z < l$ $Q = -\frac{M_1 + M_2}{l}$
	$R_A = P\frac{b}{l}$ $R_B = P\frac{a}{l}$	$0 < z < a$ $Q = P\frac{b}{l}$ $a < z < l$ $Q = -P\frac{a}{l}$

Moment fléchissant M	Coordonnée de la section dangereuse z_0 et moment maximal M_{max}
$0 \leqslant z \leqslant a$ $M = -\frac{M_0}{l} z$ $a \leqslant z \leqslant l$ $M = \frac{M_0}{l} (l - z)$	I $\quad a < \frac{l}{2}$ $z_0 = a; \; M_{max} = M_0 \frac{l-a}{l}$ II $\quad a > \frac{l}{2}$ $z_0 = a; \; M_{max} = -M_0 \frac{a}{l}$
$0 \leqslant z \leqslant a$ $M = -\frac{M_1 + M_2}{l} z$ $a \leqslant z \leqslant a + b$ $M = -\frac{M_1 + M_2}{l} z + M_1$ $a + b \leqslant z \leqslant$ $M = \frac{M_1 + M_2}{l} (l - z)$	M_{max} — la valeur maximale absolue du moment dans les sections C et D
$0 \leqslant z \leqslant a$ $M = P \frac{bz}{l}$ $a \leqslant z \leqslant l$ $M = P \frac{a}{l} (l - z)$	$z_0 = a$ $M_{max} = P \frac{ab}{l}$

Schéma de mise en charge de la poutre, diagrammes des Q et des M	Réactions d'appuis	Effort tranchant Q
	$R_A = R_B = P$	$0 \leqslant z \leqslant a$ $Q = P$ $a \leqslant z \leqslant l - a$ $Q = 0$ $l - a \leqslant z \leqslant l$ $Q = -P$
	$R_A = R_B = \dfrac{ql}{2}$	$0 \leqslant z \leqslant l$ $Q = ql\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{z}{l}\right)$
	$R_A = \dfrac{qb(2c + b)}{2l}$ $R_B = \dfrac{qb(2a + b)}{2l}$	$0 \leqslant z \leqslant a$ $Q = \dfrac{qb(2c + b)}{2l}$ $a \leqslant z \leqslant a + b$ $Q = qb\left(\dfrac{2c + b}{2l} - \dfrac{z - a}{b}\right)$ $a + b \leqslant z \leqslant l$ $Q = -\dfrac{qb(2a + b)}{2l}$

Moment fléchissant M	Coordonnée de la section dangereuse z_0 et moment maximal M_{max}
$0 \leqslant z \leqslant a$ $M = Pz$ $a \leqslant z \leqslant l - a$ $M = Pa$ $l - a \leqslant z \leqslant l$ $M = P(l - z)$	$a \leqslant z_0 \leqslant l - a$ $M_{max} = Pa$
$0 \leqslant z \leqslant l$ $M = \frac{ql^2}{2}\left(\frac{z}{l} - \frac{z^2}{l^2}\right)$	$z_0 = \frac{l}{2}$ $M_{max} = \frac{ql^2}{8}$
$0 \leqslant z \leqslant a$ $M = qb\frac{2c + b}{2l}z$ $a \leqslant z \leqslant a + b$ $M = \frac{qb^2}{2}\left[\frac{2c + b}{l} \cdot \frac{z}{b} - \frac{(z - a)^2}{b^2}\right]$ $a + b \leqslant z \leqslant l$ $M = qb\frac{2a + b}{2l}(l - z)$	$z_0 = a + \frac{b(2c + b)}{2l}$ $M_{max} = qb\frac{2c + b}{2l}\left[a + \frac{b(2c + b)}{4l}\right]$

Schéma de mise en charge de la poutre, diagrammes des Q et des M	Réactions d'appuis	Effort tranchant Q
a, b, q, R_A, R_B, A, B, z, z', l, z_0, Ⓠ, Ⓜ, $\frac{qa^2}{8}\left(2-\frac{a}{l}\right)^2$	$R_A = \frac{qa}{l}\left(\frac{a}{2}+b\right)$ $R_B = \frac{qa^2}{2l}$	$0 \leqslant z \leqslant a$ $Q = qa\left(\frac{a}{2l}+\frac{b}{l}-\frac{z}{a}\right)$ $a \leqslant z \leqslant l$ $Q = -\frac{qa^2}{2l}$
a, b, c, q_1, q_2, R_A, R_B, A, B, z, z', l, z_0, M_{max}, Ⓠ, Ⓜ	$R_A = q_1a - R$ $R_B = q_2c + R$, où $R = \frac{q_1a^2 - q_2c^2}{l}$	$0 \leqslant z \leqslant a$ $Q = q_1(a - z) - R$ $a \leqslant z \leqslant a + b$ $Q = -R$ $a+b \leqslant z \leqslant l$ $Q = q_1(a + b - z) - R$
q, R_A, R_B, A, B, z, l, z_0, $\frac{ql}{6}$, $\frac{ql}{3}$, $\frac{ql^2}{9\sqrt{3}}$, Ⓠ, Ⓜ	$R_A = \frac{ql}{6}$ $R_B = \frac{ql}{3}$	$0 \leqslant z \leqslant l$ $Q = \frac{ql}{6}\left(1 - 3\frac{z^2}{l^2}\right)$

Moment fléchissant M	Coordonnée de la section dangereuse z_0 et moment maximal M_{max}
$0 \leqslant z \leqslant a$ $M = qa^2\left[\left(\frac{a}{2l}+\frac{b}{l}\right)\frac{z}{a}-\frac{z^2}{2a^2}\right]$ $a \leqslant z \leqslant l$ $M = \frac{qa^2}{2}\left(1-\frac{z}{l}\right)$	$z_0 = \frac{a}{2}\left(2-\frac{a}{l}\right) = \frac{a}{l}\left(\frac{a}{2}+b\right)$ $M_{max} = \frac{qa^2}{8}\left(2-\frac{a}{l}\right)^2$
$0 \leqslant z \leqslant a$ $M = q_1a^2\left(\frac{z}{a}-\frac{R}{q_1a}\frac{z}{a}-\frac{z^2}{2a^2}\right)$ $a \leqslant z \leqslant a+b$ $M = q_1\frac{a^2}{2} - Rz$ $a+b \leqslant z \leqslant l$ $M = q_2c(l-z)\left(1+\frac{R}{q_2c}-\frac{l-z}{2c}\right)$	I $R > 0$ $z_0 = a - \frac{R}{q_1}$ $M_{max} = \frac{q_1}{2}\left(a-\frac{R}{q_1}\right)^2$ II $R < 0$ $z_0 = c + \frac{R}{q_2}$ $M_{max} = \frac{q_2}{2}\left(c+\frac{R}{q_2}\right)^2$
$0 \leqslant z \leqslant l$ $M = \frac{ql^2}{6}\left(\frac{z}{l}-\frac{z^3}{l^3}\right)$	$z_0 = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0{,}5774l$ $M_{max} = \frac{ql^2}{9\sqrt{3}} = 0{,}0642ql^2$

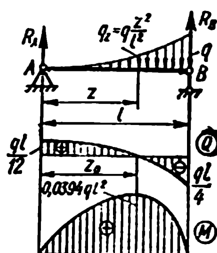
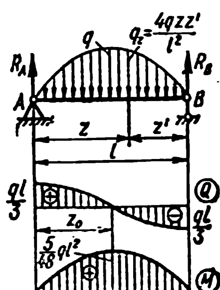
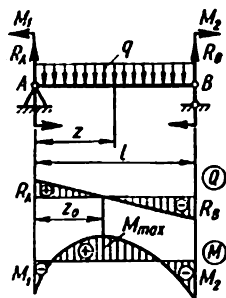
Schéma de mise en charge de la poutre, diagrammes des Q et des M	Réactions d'appuis	Effort tranchant Q
R_A, R_B, q_1, q_2, A, B, z, l, z_0, M_{max}, (Q), (M)	$R_A = \frac{2q_1 + q_2}{6} l$ $R_B = \frac{q_1 + 2q_2}{6} l$	$0 < z < l$ $Q = R_A - q_1 z + \frac{q_1 - q_2}{2l} z^2$
a, c, R_A, R_B, q, A, B, z, l, z_0, $\frac{qc^2}{6l}$, $\frac{qc}{6}\left(3-\frac{c}{l}\right)$, (Q), (M), $\frac{qc^2}{6l}\left(a+\frac{2}{3}c\sqrt{\frac{c}{3l}}\right)$	$R_A = \frac{qc^2}{6l}$ $R_B = \frac{qc}{6}\left(3 - \frac{c}{l}\right)$	$0 < z < a$ $Q = \frac{qc^2}{6l}$ $a < z < l$ $Q = \frac{qc}{6}\left[\frac{c}{l} - 3\frac{(z-a)^2}{c^2}\right]$
a, c, R_A, R_B, q, A, B, z, z', l, z_0, $\frac{qa}{6}\left(3-\frac{2a}{l}\right)$, $\frac{qa^2}{3l}$, $\frac{qa^2}{3}\left(1-\frac{2a}{3l}\right)^2$, (Q), (M)	$R_A = \frac{qa}{6}\left(3 - 2\frac{a}{l}\right)$ $R_B = \frac{qa^2}{3l}$	$0 < z < a$ $Q = \frac{qa}{6}\left(3 - 2\frac{a}{l} - 3\frac{z^2}{a^2}\right)$ $a < z < l$ $Q = -\frac{qa^2}{3l}$

Moment fléchissant M	Coordonnée de la section dangereuse z_0 et moment maximal M_{max}
$0 \leqslant z \leqslant l$ $M = R_A z - \frac{q_1 z^2}{2} + \frac{q_1 - q_2}{6l} z^3$	$z_0 = \frac{1 - R}{1 - k} l$ $M_{max} = \frac{q_1 l^2}{6} \frac{2R^3 - k(1 + k)}{(1 - k)^2}$, où $k = \frac{q_2}{q_1}$ $R = \sqrt{\frac{1 + k + k^2}{3}}$
$0 \leqslant z \leqslant a$ $M = \frac{qc^2}{6l} z$ $a \leqslant z \leqslant l$ $M = \frac{qc^2}{6} \left[\frac{z}{l} - \frac{(z - a)^3}{c^3} \right]$	$z_0 = a + c \sqrt{\frac{c}{3l}}$ $M_{max} = \frac{qc^2}{6l} \left(a + \frac{2}{3} c \sqrt{\frac{c}{3l}} \right)$
$0 \leqslant z \leqslant a$ $M = \frac{qa^2}{6} \left[\left(3 - 2\frac{a}{l} \right) \frac{z}{a} - \frac{z^3}{a^3} \right]$ $a \leqslant z \leqslant l$ $M = \frac{qa^2}{3} \left(1 - \frac{z}{l} \right)$	$z_0 = a \sqrt{1 - \frac{2a}{3l}}$ $M_{max} = \frac{qa^2}{3} \left(1 - \frac{2}{3} \frac{a}{l} \right)^{3/2}$

Schéma de mise en charge de la poutre, diagrammes des Q et des M	Réactions d'appuis	Effort tranchant Q
	$R_A = \frac{q(l+c)}{6}$ $R_B = \frac{q(l+a)}{6}$	$0 \leqslant z \leqslant a$ $Q = \frac{qa}{6}\left(\frac{l+c}{a} - 3\frac{z^2}{a^2}\right)$ $a \leqslant z \leqslant l$ $Q = -\frac{qc}{6}\left[\frac{l+a}{c} - 3\frac{(l-z)^2}{c^2}\right]$
	$R_A = \frac{q_1 a}{2} - R$ $R_B = \frac{q_2 b}{2} + R$ $R = \frac{q_1 a^2 - q_2 b^2}{6l}$	$0 \leqslant z \leqslant a$ $Q = R_A - \frac{q_1 z}{2}\left(2 - \frac{z}{a}\right)$ $a \leqslant z \leqslant l$ $Q = -R_B + \frac{q_2(l-z)}{2} \times$ $\times \left(2 - \frac{l-z}{b}\right)$

Suite

Moment fléchissant M	Coordonnée de la section dangereuse z_0 et moment maximal M_{max}
$0 \leq z \leq a$ $M = \frac{qaz}{6}\left(\frac{l+c}{a} - \frac{z^2}{a^2}\right)$ $a \leq z \leq l$ $M = \frac{qc(l-z)}{6}\left[\frac{l+a}{c} - \frac{(l-z)^2}{c^2}\right]$	I $\quad a > c$ $z_0 = \sqrt{\frac{a(l-c)}{3}}$ $M_{max} = \frac{q(l+c)}{9}\sqrt{\frac{a(l-c)}{3}}$ II $\quad a < c$ $z_0 = l - \sqrt{\frac{c(l-a)}{3}}$ $M_{max} = \frac{q(l+a)}{9}\sqrt{\frac{c(l-a)}{3}}$
$0 \leq z \leq a$ $M = R_A \cdot z - \frac{q_1 z^2}{6}\left(3 - \frac{z}{a}\right)$ $a \leq z \leq l$ $M = R_B(l-z) - \frac{q_2(l-z)^2}{6}\left(3 - \frac{l-z}{b}\right)$	I $\quad R > 0$ $z_0 = a - \sqrt{\frac{2Ra}{q_1}}$ $M_{max} = \overset{*}{M} + \frac{2}{3}R\sqrt{\frac{2Ra}{q_1}}$ II $\quad R < 0$ $z_0 = a + \sqrt{-\frac{2Rb}{q_2}}$ $M_{max} = \overset{*}{M} - \frac{2}{3}R\sqrt{-\frac{2Rb}{q_2}}$ $\overset{*}{M} = \frac{q_1 a^2}{6} - Ra = \frac{q_2 b^2}{6} + Rb$

Schéma de mise en charge de la poutre, diagrammes des Q et des M	Réactions d'appuis	Effort tranchant Q
	$R_A = \frac{ql}{12}$ $R_B = \frac{ql}{4}$	$0 \leqslant z \leqslant l$ $Q = \frac{ql}{12}\left(1 - 4\frac{z^3}{l^3}\right)$
	$R_A = \frac{ql}{3}$ $R_B = \frac{ql}{3}$	$0 \leqslant z \leqslant l$ $Q = \frac{ql}{3}\left(1 - 6\frac{z^2}{l^2} + 4\frac{z^3}{l^3}\right)$
	$R_A = \frac{ql}{2} - \frac{\Delta M}{l}$ $R_B = \frac{ql}{2} + \frac{\Delta M}{l}$ $\Delta M = M_2 - M_1$	$0 \leqslant z \leqslant l$ $Q = \frac{ql}{2}\left(1 - 2\frac{z}{l}\right) - \frac{\Delta M}{l}$

Moment fléchissant M	Coordonnée de la section dangereuse z_0 et moment maximal M_{max}
$0 \leqslant z \leqslant l$ $M = \frac{ql^2}{12}\left(\frac{z}{l} - \frac{z^4}{l^4}\right)$	$z_0 = 0{,}63\ l$ $M_{max} = 0{,}0394\ ql^2$
$0 \leqslant z \leqslant l$ $M = \frac{ql^2}{3}\left(\frac{z}{l} - 2\frac{z^3}{l^3} + \frac{z^4}{l^4}\right)$	$z_0 = \frac{l}{2}$ $M_{max} = \frac{5}{48} ql^2$
$0 \leqslant z \leqslant l$ $M = \frac{ql^2}{2}\left(\frac{z}{l} - \frac{z^2}{l^2}\right) - \Delta M \frac{z}{l} - M_1$	$z_0 = \frac{l}{2} - \frac{\Delta M}{ql}$ $M_{max} = \frac{ql^2}{8} + \frac{(\Delta M)^2}{2ql^2} - \frac{M_2 + M_1}{2}$

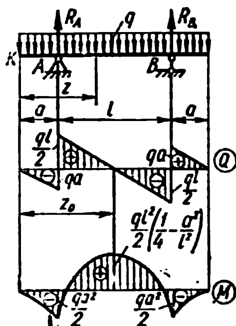
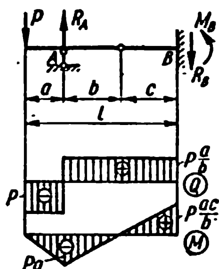
Schéma de mise en charge de la poutre, diagrammes des Q et des M	Réactions d'appuis	Effort tranchant Q
R_A, R_B, M, A, B, z, l, a, $\frac{M}{l}$, (Q), (M), M	$R_A = R_B = \frac{M}{l}$	$0 \leqslant z \leqslant l$ $Q = -\frac{M}{l}$ $l \leqslant z \leqslant l + a$ $Q = 0$
R_A, R_B, P, A, B, z, l, a, P, $\frac{Pa}{l}$, (Q), (M), Pa	$R_A = P\frac{a}{l}$ $R_B = P\left(1 + \frac{a}{l}\right)$	$0 \leqslant z \leqslant l$ $Q = -P\frac{a}{l}$ $l \leqslant z \leqslant l + a$ $Q = P$
R_A, R_B, q, A, B, z, l, a, $\frac{q}{2l}(l^2-a^2)$, qa, z_0, $\frac{q}{2l}(l^2+a^2)$, (Q), (M), $q\frac{(l^2-a^2)^2}{8l^2}$, $\frac{qa^2}{2}$	$R_A = q\frac{l^2 - a^2}{2l}$ $R_B =$ $= q\frac{l^2 + a^2}{2l} + qa$	$0 \leqslant z \leqslant l$ $Q = \frac{ql}{2}\left(1 - \frac{a^2}{l^2} - 2\frac{z}{l}\right)$ $l \leqslant z \leqslant l + a$ $Q = q(l + a - z)$

Suite

Moment fléchissant M	Coordonnée de la section dangereuse z_0 et moment maximal M_{max}
$0 \leqslant z \leqslant l$ $M = -M\dfrac{z}{l}$ $l \leqslant z \leqslant l + a$ $M = -M$	$l \leqslant z_0 \leqslant l + a$ $M_{max} = -M$
$0 \leqslant z \leqslant l$ $M = -P\dfrac{a}{l}z$ $l \leqslant z \leqslant l + a$ $M = -P(l + a - z)$	$z_0 =$ $M_{max} = -Pa$
$0 \leqslant z \leqslant l$ $M = \dfrac{ql^2}{2}\left[\left(1 - \dfrac{a^2}{l^2}\right)\dfrac{z}{l} - \dfrac{z^2}{l^2}\right]$ $l \leqslant z \leqslant l + a$ $M = -\dfrac{1}{2}q(l + a - z)^2$	I $\quad l < a(1 + \sqrt{2})$ $z_0 = l$ $M_{max} = -\dfrac{qa^2}{2}$ II $\quad l > a(1 + \sqrt{2})$ $z_0 = \dfrac{l}{2}\left(1 - \dfrac{a^2}{l^2}\right)$ $M_{max} = \dfrac{q(l^2 - a^2)^2}{8l^2}$

Schéma de mise en charge de la poutre, diagrammes des Q et des M	Réactions d'appuis	Effort tranchant Q
	$R_A = \frac{qa^2}{2l}$ $R_B =$ $= \frac{qa^2}{2l}\left(1 + 2\frac{l}{a}\right)$	$0 \leqslant z \leqslant l$ $Q = -\frac{qa^2}{2l}$ $l \leqslant z \leqslant l + a$ $Q = q(l + a - z)$
	$R_A = R_B = P$	$0 \leqslant z \leqslant a$ $Q = -P$ $a \leqslant z \leqslant a + l$ $Q = 0$ $a + l \leqslant z \leqslant l + 2a$ $Q = P$

Moment fléchissant M	Coordonnée de la section dangereuse z_0 et moment maximal M_{max}
$0 \leqslant z \leqslant l$ $M = -\frac{qa^2}{2}\frac{z}{l}$ $l \leqslant z \leqslant l + a$ $M = -\frac{q(l + a - z)^2}{2}$	$z_0 = l$ $M_{max} = -\frac{qa^2}{2}$
$0 \leqslant z \leqslant a$ $M = -Pz$ $a \leqslant z \leqslant a + l$ $M = -Pa$ $a + l \leqslant z \leqslant l + 2a$ $M = -P(l + 2a - z)$	$a \leqslant z_0 \leqslant l + a$ $M_{max} = -Pa$

Schéma de mise en charge de la poutre, diagrammes des Q et des M	Réactions d'appuis	Effort tranchant Q
	$R_A = R_B =$ $= q\left(\frac{l}{2} + a\right)$	$0 \leqslant z \leqslant a$ $Q = -qz$ $a \leqslant z \leqslant a + l$ $Q = \frac{ql}{2}\left(1 + 2\frac{a}{l} - 2\frac{z}{l}\right)$ $a + l \leqslant z \leqslant l + 2a$ $Q = q(l + 2a - z)$
	$R_A =$ $= P\left(1 + \frac{a}{b}\right)$ $R_B = P\frac{a}{b}$ $M_B = P\frac{ac}{b}$	$0 \leqslant z \leqslant a$ $Q = -P$ $a \leqslant z \leqslant l$ $Q = P\frac{a}{b}$

Moment fléchissant M	Coordonnée de la section dangereuse z_0 et moment maximal M_{max}
$0 \leqslant z \leqslant a$ $M = -\frac{qz^2}{2}$ $a \leqslant z \leqslant a + l$ $M = \frac{ql^2}{2}\left[\left(1 + 2\frac{a}{l}\right)\left(\frac{z}{l} - \frac{a}{l}\right) - \frac{z^2}{l^2}\right]$ $a + l \leqslant z \leqslant l + 2a$ $M = -\frac{1}{2} q(l + 2a - z)^2$	I $l > 2\sqrt{2a}$ $z_0 = a + \frac{l}{2}$ $M_{max} = \frac{ql^2}{2}\left[\frac{1}{4} - \frac{a^2}{l^2}\right]$ II $l < 2\sqrt{2a}$ $z_0 = a;\ z_0 = a + l$ $M_{max} = -\frac{qa^2}{2}$
$0 \leqslant z \leqslant a$ $M = -Pz$ $a \leqslant z \leqslant l$ $M = -Pa\left(1 - \frac{z - a}{b}\right)$	I $c > b$ $z_0 = l$ $M_{max} = P\frac{ac}{b}$ II $c < b$ $z_0 = a$ $M_{max} = -Pa$

Schéma de mise en charge de la poutre, diagrammes des Q et des M	Réactions d'appuis	Effort tranchant Q
R_A, q, R_B, M_A, A, B, a, b, c, l, qa, $q\left(c+\frac{b^2-a^2}{2b}\right)$, z_0, $\frac{1}{2}qa^2$, $\frac{qc}{2}\left(c+\frac{b^2-a^2}{b}\right)$, ⊕, ⊖, Q, M	$R_A = q\frac{(l-c)^2}{2b}$ $R_B = q\left[l - \frac{(l-c)^2}{2b}\right]$ $M_B = \frac{q}{2}\left[c^2 + (b^2-a^2)\frac{c}{b}\right]$	$0 \leqslant z \leqslant a$ $Q = -qz$ $a \leqslant z \leqslant l$ $Q = q\left[\frac{(l-c)^2}{2b} - z\right]$
R_A, R_B, R_C, P, A, B, C, a, b, c, d, l, $P\frac{bd}{ac}$, P, $P\frac{d}{c}$, $Pd\frac{b}{c}$, Pd, ⊕, ⊖, Q, M	$R_A = P\frac{bd}{ac}$ $R_B = P\frac{d}{c}\left(1+\frac{b}{a}\right)$ $R_C = P\left(1+\frac{d}{c}\right)$	$0 \leqslant z \leqslant a$ $Q = P\frac{bd}{ac}$ $a \leqslant z \leqslant a+b+c$ $Q = -P\frac{d}{c}$ $l-d \leqslant z \leqslant l$ $Q = P$

Moment fléchissant M	Coordonnée de la section dangereuse z_0 et moment maximal M_{max}
$0 \leqslant z \leqslant a$ $M = -\frac{1}{2} qz^2$ $a \leqslant z \leqslant l$ $M = -\frac{1}{2} q \left[z^2 - l - c)^2 \frac{z-a}{b} \right]$	$\overset{*}{z}_0 = \frac{(l-c)^2}{2b}$ $\overset{*}{M}_{max} = -\frac{q}{2} \left[z_0^2 - (l-c)^2 \frac{\overset{*}{z}_0 - a}{b} \right]$
$0 \leqslant z \leqslant a$ $M = P \frac{bd}{ac} z$ $a \leqslant z \leqslant l - d$ $M = P \frac{d}{c} (a + b - z)$ $l - d \leqslant z \leqslant l$ $M = -P(l - z)$	I $\quad c > b$ $z_0 = l - d$ $M_{max} = -Pd$ II $\quad b > c$ $z_0 = a$ $M_{max} = Pd \frac{b}{c}$

Moment fléchissant M, forces longitudinale N et transversale Q agissant dans une barre curviligne cantilever sollicitée dans son plan

Schéma	N	Q	M
	$P\sin\varphi + T\cos\varphi$	$P\cos\varphi - T\sin\varphi$	$M_0 + PR\sin\varphi - TR(1-\cos\varphi)$
	$P\cos(\alpha-\varphi) + T\sin(\alpha-\varphi)$	$P\sin(\alpha-\varphi) - T\cos(\alpha-\varphi)$	$M_0 + PR[\cos(\alpha-\varphi) - \cos\alpha] - TR[\sin\alpha - \sin(\alpha-\varphi)]$
	$qR(1-\cos\varphi)$	$qR\sin\varphi$	$qR^2(1-\cos\varphi)$

Suite

Schéma	N	Q	M
q=const	$qR\sin\varphi$	$-qR(1-\cos\varphi)$	$-qR^2(\varphi-\sin\varphi)$
m=const	0	0	$mR\varphi$

Moment fléchissant M_{fl} et couple de torsion M_t agissant dans une barre circulaire cantilever soumise à une sollicitation perpendiculaire à son plan

Schéma	M_{fl} (perpendiculairement au plan yz)	M_t
	$PR\sin\varphi$	$PR(1-\cos\varphi)$
	$M_0\sin\varphi$	$-M_0\cos\varphi$
	$M_0\cos\varphi$	$M_0\sin\varphi$

Suite

Schéma	M_{f1} (perpendiculairement au plan yz)	M_t
y, z, q=const, R, φ	$qR^2(1 - \cos\varphi)$	$qR^2(\varphi - \sin\varphi)$

CHAPITRE 4

Caractéristiques mécaniques des matériaux en traction et en compression. Concentration des contraintes. Contraintes admissibles

§ 25. Contraintes et déformations en traction et en compression

L'état de contrainte lors de la traction ou de la compression axiales se caractérise par le fait que des six composantes des contraintes internes seule la force longitudinale N n'est pas égale à zéro. Considérons une barre sollicitée par des forces axiales (fig. 61). Pour une section quelconque n-n l'aspect statique du problème est donné par l'équation:

$$N = \int_F \sigma \, dF. \tag{4.1}$$

L'aspect géométrique en est défini par l'*hypothèse des sections planes (hypothèse de Bernoulli)* basée sur les données expérimentales et selon laquelle les sections transversales de la barre, planes avant la déformation, le restent après la déformation tout en se déplaçant le long de l'axe de la barre. Par conséquent, toutes les fibres d'un élément de longueur l s'allongent d'une longueur Δl et leurs allongements relatifs ε sont les mêmes:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \text{const.} \tag{4.2}$$



FIG. 61

L'aspect physique du problème considéré est défini par la *loi de Hooke* qui traduit la dépendance linéaire des déformations par rapport

aux contraintes

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad \text{ou} \quad \sigma = E\varepsilon, \tag{4.3}$$

où E est le coefficient de proportionnalité appelé *module d'élasticité en traction* ou *module de Young*. E a la dimension de la tension (kgf/cm², kgf/mm², etc.) et représente une des constantes physiques du matériau (v. tabl. 10). Considérant que $E = \text{const}$ et que d'après (4.2), (4.3) $\sigma = E\varepsilon = \text{const}$, on obtient de (4.1)

$$\sigma = \frac{N}{F}. \tag{4.4}$$

σ est positif en traction et négatif en compression. La formule (4.4) est valable pour les sections suffisamment éloignées des endroits où sont appliquées des charges concentrées. A proximité de ces charges la loi de distribution des contraintes a une forme plus compliquée.

Lors du calcul des contraintes en traction ou en compression, tout comme des contraintes résultant d'autres formes de déformation, il convient de tenir compte du principe établi expérimentalement et appelé **principe de Saint-Venant** d'après lequel *si un corps est sollicité par un système de forces statiquement équivalentes, c'est-à-dire par des forces dont le vecteur et le moment principal sont égaux, et que d'autre part la zone d'application des charges soit peu étendue, par rapport aux dimensions du corps, les tensions dans les sections suffisamment éloignées de la zone d'application des forces dépendent peu de la manière dont la charge est appliquée.*

Ce principe peut être illustré à l'aide de l'exemple d'application de charges équivalentes représenté à la fig. 62. Une même barre, dont l'extrémité supérieure est fixe, est sollicitée sur son extrémité libre par des charges statiquement équivalentes dont les résultantes sont exprimées par la valeur du vecteur P. Les recherches montrent que les contraintes dans les sections suffisamment éloignées de l'endroit où sont appliquées les forces sont pratiquement égales dans les trois cas considérés.

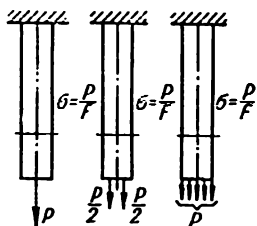


FIG. 62

La déformation relative est exprimée comme fonction de la force longitudinale conformément à (4.3) et (4.4) par la formule

$$\varepsilon = \frac{N}{EF} \tag{4.5}$$

tandis que la déformation totale d'une barre, de longueur l, pour un matériau homogène ($E = \text{const}$) et pour une même force N identique sur

toute la longueur est donnée par la formule:

$$\Delta l = \varepsilon l = \frac{Nl}{EF}. \qquad (4.6)$$

La formule (4.6) exprime la *loi de Hooke pour les allongements absolus.* Le produit EF qui figure dans le dénominateur de la formule est appelé *rigidité de la section transversale de la barre en traction (compression)* et a la dimension de la force, tandis que la grandeur $c = \frac{EF}{l}$ appelée *rigidité de la barre en traction (compression)* a la dimension de la force divisée par la longueur.

Pour le cas où la force longitudinale et la section transversale de la barre varient le long de l'axe (fig. 63), l'allongement total de la barre est donné par la formule

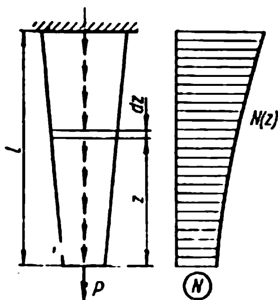


FIG. 63

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N(z)}{EF(z)}\,dz. \qquad (4.7)$$

La traction et la compression s'accompagnent d'une modification des sections transversales de la barre (fig. 64, *a*, *b*). Les *déformations transversales absolues* de la barre sont données par les formules

$$\Delta a = a_1 - a;$$

$$\Delta b = b_1 - b.$$

Les *déformations transversales relatives* (négatives en traction et positives en compression) se déterminent par la formule

$$\varepsilon' = \frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b}.$$

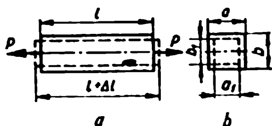


FIG. 64

Il existe entre la déformation transversale relative et la déformation longitudinale relative en traction ou en compression simples et dans les limites de la validité de la loi de Hooke, un rapport constant dont la valeur absolue est dite *coefficient de Poisson* qu'on désigne par la lettre μ

$$\mu = \left|\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right|. \qquad (4.8)$$

Le coefficient de Poisson est une grandeur adimensionnelle; pour tous les matériaux isotropes (v. tabl. 10) sa valeur est comprise entre 0 et 0,5 (pour le liège il est proche du zéro, pour la gomme, de 0,5, pour l'acier, $\mu \approx 0{,}3$).

Considérant que ε et ε' ont toujours des signes opposés, on obtient

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon = -\mu \frac{\sigma}{E}. \tag{4.9}$$

Lors du calcul des barres qui travaillent à la traction ou à la compression on doit écrire la condition de résistance pour la *section dangereuse* caractérisée par la valeur maximale de $N_{\max}$ sur le diagramme des forces axiales

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{\max}}{F} \leqslant [\sigma], \tag{4.10}$$

$[\sigma]$ étant la contrainte admissible en traction $[\sigma_+]$ (pour le calcul de traction) ou la contrainte admissible en compression $[\sigma_-]$ (pour le calcul de compression).

La formule (4.10) permet de résoudre les problèmes de trois types: le choix des dimensions de la section transversale de la barre; la vérification de la résistance; la détermination de la charge admissible.

Dans certains cas, les barres sont calculées à part de la *condition de rigidité*

$$\Delta l = \sum \int \frac{N(z)}{EF(z)}\, dz \leqslant [\Delta l], \tag{4.11}$$

où Δl est la variation des dimensions de la pièce; $[\Delta l]$ la valeur admise de la variation des dimensions.

Le calcul à partir d'une condition de rigidité doit toujours être complété par un calcul de résistance. S'il s'avère que la condition de résistance n'est pas satisfaite, on doit choisir les dimensions de la barre à partir de la condition de résistance.

§ 26. Essais de traction et de compression

Essais de traction. L'essai de traction constitue le type principal des essais des propriétés mécaniques des matériaux. Il se fait à l'aide de machines d'essai spéciales qui permettent d'appliquer une charge croissante sur

l'éprouvette et d'enregistrer au cours de l'essai les efforts appliqués sur l'éprouvette et les déformations de celle-ci.

On utilise le plus souvent les éprouvettes de forme cylindrique (fig. 65, *a*); pour les tôles, on utilise les plaques d'essais (fig. 65, *b*). Dans le cas des éprouvettes cylindriques on doit respecter un certain rapport entre la longueur théorique l_0 et le diamètre de l'éprouvette d_0. Généralement, on prend $l_0 = 10\,d_0$ (éprouvettes longues); plus rarement on pose $l_0 = 5d_0$ (éprouvettes courtes).

FIG. 65

Etant donné que le diamètre d_0 est lié à l'aire de l'éprouvette F_0 par l'expression

$$d_0 = \sqrt{\frac{4F_0}{\pi}} = 1{,}13\sqrt{F_0},$$

on peut exprimer le rapport entre la longueur théorique et l'aire de la section transversale de l'éprouvette F_0 (pour l'éprouvette longue) par

$$l_0 = 11{,}3\sqrt{F_0}, \qquad (4.12)$$

et pour l'éprouvette courte

$$l_0 = 5{,}65\sqrt{F_0}.$$

Pour les essais de traction on utilise le plus souvent les *éprouvettes cylindriques* de diamètre $d_0 = 10$ mm, de longueur théorique $l_0 = 100$ mm et $l_0 = 50$ mm. On peut utiliser d'autres éprouvettes proportionnelles pour lesquelles les rapports des dimensions doivent être respectés conformément à la formule (4.12).

Diagramme de traction. Lors de l'essai de traction d'un matériau l'emploi de machines modernes permet d'obtenir un diagramme enregistré automatiquement à l'échelle choisie donnant la déformation en fonction de l'effort, ce diagramme est appelé *diagramme de traction.* L'aspect courant de ce diagramme en coordonnées $P - \Delta l$ pour acier à bas carbone est reproduit sur la fig. 66.

Le diagramme présente une série de zones et de points caractéristiques qui correspondent à diverses étapes de déformation de l'éprouvette.

Le point A caractérise la charge limite P_{pr}; tant que la charge n'a pas encore atteint cette valeur le rapport entre la charge et l'allongement reste linéaire. Le point B correspond à la charge maximum $P_{él}$ pour laquelle l'éprouvette conserve encore ses propriétés élastiques, c'est-à-dire lors de la suppression de la charge il n'y a pas de déformations résiduelles.

Le point C correspond à la charge $P_{éc}$ pour laquelle les déformation de l'éprouvette se poursuivent sans l'augmentation de la charge: on dit que le matériau «commence à couler», ce qui se traduit, sur le diagramme,

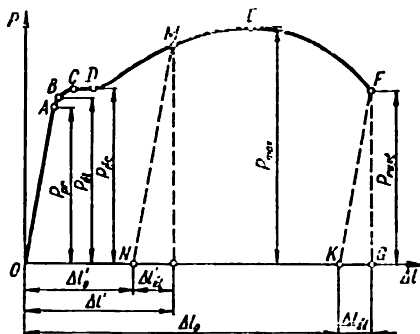


FIG. 66

par une *zone d'écoulement CD*. Passé par le stade d'écoulement, le matériau retrouve de nouveau la capacité d'augmenter sa résistance à une déformation ultérieure. Le point E correspond à la charge maximum (limite) P_{max} après laquelle l'éprouvette commence à accuser un rétrécissement local sous forme de gorge (fig. 67), ce qui conduit à une diminution de la charge. Le point F correspond à la charge P_{rupt} qui provoque la rupture de l'éprouvette.

C'est à partir des charges caractéristiques que donne le diagramme de traction et de l'aire de la section de l'éprouvette F_0 qu'on détermine les caractéristiques essentielles de la résistance d'un matériau:

$\sigma_{pr} = \frac{P_{pr}}{F_0}$ — *limite de proportionnalité*;

$\sigma_{él} = \frac{P_{él}}{F_0}$ — *limite d'élasticité*;



FIG. 67

$\sigma_{éc} = \frac{P_{éc}}{F_0}$ — *limite d'écoulement*;

$\sigma_{rés} = \frac{P_{max}}{F_0}$ — *limite de résistance ou résistance temporaire*;

$\sigma_{rupt} = \frac{P_{rupt}}{F_0}$ — *contrainte au moment de la rupture.*

σ_{end}, $\sigma_{écr}$ *sont des résistances temporaires* (σ_t).

Étant donné qu'en traction la section de l'éprouvette varie constamment, surtout au cours d'application de la charge représentée sur le diagramme par le segment *DEF*, les valeurs de σ_t et σ_{cr} sont assez conventionnelles. C'est surtout le cas de la contrainte σ_{cr} étant donné qu'à partir de la charge P_{max} une *gorge* commence à apparaître, ce qui fait qu'au moment de la rupture la section de l'éprouvette dans la gorge F_g est nettement inférieure à l'aire initiale de la section de l'éprouvette F_0.

Pour les matériaux dont le diagramme de traction ne présente pas de zones d'écoulement bien nettes, la limite d'écoulement est déterminée d'une façon conventionnelle comme étant la contrainte pour laquelle la déformation résiduelle a une valeur prévue par les normes GOST ou par d'autres normes techniques. La norme GOST 1497-61 fixe comme valeur de cette déformation résiduelle 0,2% de la longueur calculée de l'éprouvette, la *limite d'écoulement* $\sigma_{éc}$ étant désignée par $\sigma_{0,2}$.

Comme il est difficile en pratique d'établir le moment exact de l'écart à la loi de la proportionnalité ainsi que le début des premières déformations résiduelles, on a introduit également la notion de limite de proportionnalité conventionnelle et celle de limite d'élasticité conventionnelle.

On entend par *limite de proportionnalité conventionnelle* la contrainte minimale pour laquelle l'écart à la dépendance linéaire entre la contrainte et la déformation atteint une valeur donnée (de l'ordre de 0,002%).

On entend par *limite d'élasticité conventionnelle* la contrainte minimale pour laquelle la déformation résiduelle atteint une valeur donnée (ordinairement de 0,001% à 0,05%). La limite d'élasticité conventionnelle est affectée d'un indice correspondant à la valeur donnée de la déformation résiduelle. Exemples: $\sigma_{0,001}$ ou $\sigma_{0,05}$.

Lors de l'essai de traction d'une éprouvette on détermine aussi les caractéristiques de plasticité telles que l'*allongement relatif*

$$\delta = \frac{\Delta l_0}{l_0} \cdot 100, \%$$

et le *rétrécissement relatif*

$$\psi = \frac{\Delta F_0}{F_0} \cdot 100, \%,$$

où

$$\Delta F_0 = F_0 - F_{min}.$$

Outre les caractéristiques énumérées des propriétés mécaniques des matériaux (résistance et élasticité) dont les valeurs sont données dans l'*Appendice 1*, on détermine également les propriétés énergétiques du matériau. On a pu constaté que le diagramme de traction fournit aussi des

données relatives à ces propriétés. Ainsi, l'aire du diagramme caractérise le travail effectué pour l'allongement de l'éprouvette. Le travail de traction qu'il faut réaliser pour obtenir la déformation λ_1 (fig. 68) est égal à

$$A_1 = \int_0^{\lambda_1} (P + dP)\, d\lambda \approx \int_0^{\lambda_1} P d\lambda,$$

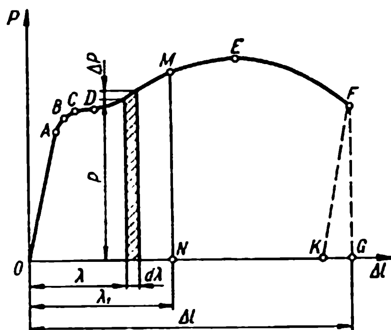


FIG. 68

ce qui correspond à l'aire *OABCDMN* du diagramme; le travail nécessaire pour provoquer la rupture de l'éprouvette est représenté par l'aire totale du diagramme *OABCDEFG*.

Dans les limites d'élasticité, le *travail de déformation* est fourni par l'aire du triangle hachuré (fig. 69, *a*); pour l'allongement de l'éprouvette à Δl et la force P qui correspond à cet allongement, le travail est donné par la formule

$$A_{\acute{e}l} = \frac{P\Delta l}{2},$$

tandis que le *travail spécifique de déformation*

$$a_{\acute{e}l} = \frac{A_{\acute{e}l}}{V} = \frac{P\Delta l}{2F_0 l_0} = \frac{\sigma\varepsilon}{2}$$

s'exprime par l'aire du triangle hachuré du diagramme en coordonnées σ-ε (fig. 69, *b*).

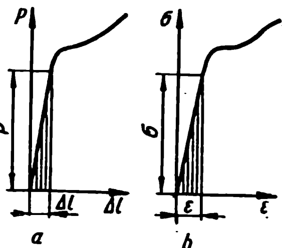


FIG. 69

Diagramme des contraintes. Comme la courbe de traction caractérise non seulement les propriétés des métaux mais aussi les dimensions de l'éprouvette on la trace ordinairement en coordonnées relatives σ-ε. Un tel diagramme tracé à partir de la courbe de traction (fig. 66) et appelé *diagramme des contraintes* est reproduit sur la fig. 70. Sur ce

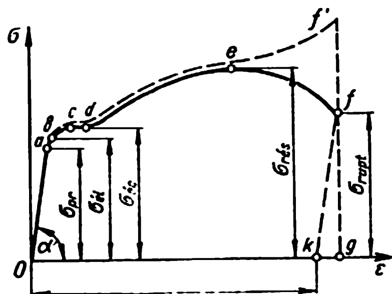


FIG. 70

diagramme les points O, a, b, c, d, e, f correspondent aux points O, A, B, C, D, E, F de la *courbe de traction initiale* (fig. 66).

Sur le diagramme des contraintes (fig. 70) on voit que

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma}{\varepsilon} = E,$$

c'est-à-dire que le module d'élasticité pour la traction est numériquement égal à la tangente de l'angle d'inclinaison du segment rectiligne du diagramme des contraintes par rapport à l'axe des abscisses. C'est là la signification géométrique du module d'élasticité en traction.

Notons que le tronçon en pente *ef* du diagramme des contraintes (fig. 70) a un caractère conventionnel en raison d'une grande différence qui existe entre la section de la gorge et l'aire initiale de la section de l'éprouvette F_0 par laquelle on divise les efforts respectifs tirés de la courbe de traction pour obtenir les ordonnées du diagramme des contraintes sur le tronçon *ef*.

La fig. 71 donne l'allure approximative du diagramme des contraintes pour divers matériaux. Les courbes *1*, *2*, *3*, *4* caractérisent respectivement les propriétés mécaniques du bronze ($\sigma_{rés} = 2470$ kgf/cm², $\delta = 36\%$),

de l'acier au carbone ($\sigma_{rés}$ = 3580 kgf/cm², δ=38 %); de l'acier au nickel ($\sigma_{rés}$=7150 kgf/cm , δ=54%), de l'acier au manganèse ($\sigma_{rés}$=9160 kgf/cm², δ = 30%).

Le diagramme des contraintes de la fonte, un diagramme type pour les matières fragiles, est donné sur la fig. 72.

Si l'on rapporte les efforts agissant à chaque moment donné sur l'éprouvette à la valeur réelle de la section transversale existant à ce moment, on obtient le diagramme des contraintes réelles (fig. 70, courbe en pointillé).

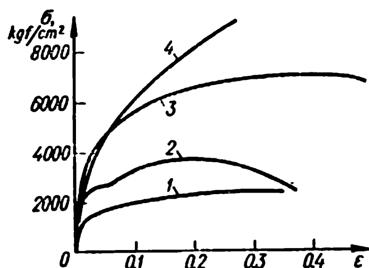


FIG. 71

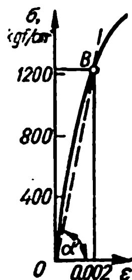


FIG. 72

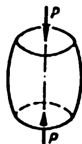


FIG. 73

Essais de compression. L'essai de compression d'un matériau s'effectue au moyen de presses ou de machines d'essai spéciales. Pour effectuer ces essais on fait recours à des éprouvettes en forme cylindrique de faible hauteur (généralement la hauteur vaut trois à quatre fois le diamètre) ou cubique. Lors de l'essai de compression, le frottement engendré entre les dispositifs compresseurs des machines d'essai et les faces de l'éprouvette exerce une influence notable sur les résultats des essais et le mode de destruction de l'éprouvette.

Une éprouvette en acier doux, de forme cylindrique, soumise à la compression, prend la forme d'un tonneau (fig. 73). Le diagramme de compression obtenu pour ce matériau est montré sur la fig. 74.

La fig. 75, *a* montre le schéma de destruction d'une éprouvette en pierre soumise à la compression, lorsqu'il existe les forces de frottement entre les dispositifs compresseurs de la machine et les faces de l'éprouvette. Si l'on réduit les forces de frottement par l'application d'une couche de paraffine sur les surfaces de l'éprouvette, on obtient le schéma de destruction représenté sur la fig. 75, *b*.

La fig. 76 montre le caractère d'une destruction due à la compression d'une éprouvette en fonte et la fig. 77 reproduit le diagramme de compression correspondant.

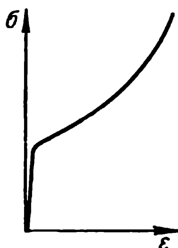


FIG. 74

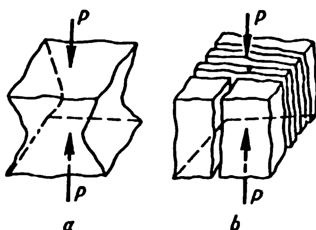


FIG. 75

Les diagrammes de compression obtenus lors des essais d'un cube en bois sont reproduits sur la fig. 78 (la courbe *1* représente la compression le long des fibres, la courbe *2*, dans le sens perpendiculaire aux fibres).

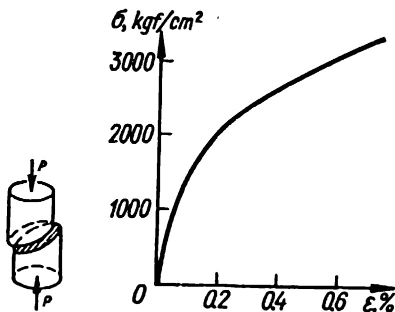


FIG. 76

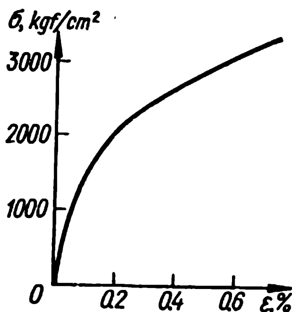


FIG. 77

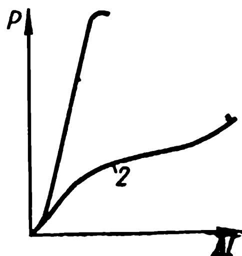


FIG. 78

§ 27. Concentration des contraintes

La *concentration des contraintes* est un accroissement local des contraintes dans les éléments des structures, dû à de fortes variations des sections

transversales, par suite de la présence d'orifices, de conges, de rainures, d'entailles, etc., qu'on appelle *concentrateurs*. La fig. 79 représente les diagrammes de distribution des contraintes dans la section d'une bande en traction, section affaiblie par la présence d'un orifice rond (fig. 79, *a*) et de conges semi-circulaires (fig. 79, *b*).

Le degré de concentration des contraintes est caractérisé par le *coefficient de concentration*

$$\alpha = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{nom}}, \tag{4.13}$$

σ_{max} étant la contrainte maximum au niveau de la concentration, σ_{nom}, la contrainte nominale donnée par la formule

$$\sigma_{nom} = \frac{N}{F_{min}}, \tag{4.14}$$

où N est la force normale dans la section affaiblie; F_{min} l'aire de la section affaiblie, dite *aire nette*.

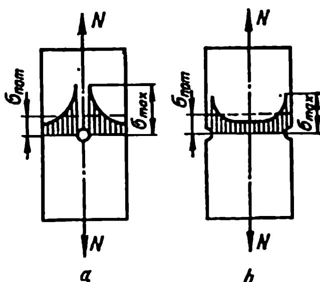


FIG. 79

Parfois on détermine la contrainte nominale à l'aide de la formule

$$\sigma_{nom} = \frac{N}{F_{br}}, \tag{4.15}$$

où F_{br} est l'aire de la section pleine (sans tenir compte de son affaiblissement par un concentrateur) ou *aire brute*.

Pour les concentrateurs occupant une fraction faible de la section totale (par exemple, les orifices de faible diamètre) les contraintes nominales déterminées à l'aide des formules (4.14) et (4.15) sont pratiquement identiques.

Dans les cas où l'on a à déterminer par calculs les contraintes maximales dans la zone des concentrateurs, on appelle le coefficient de concentration obtenu à l'aide de (4.13) *coefficient théorique de concentration*. Par exemple, pour un orifice rond de faible diamètre (fig. 79, *a*) $\alpha = 3$, pour les entailles semi-circulaires (fig. 79, *b*) $\alpha \approx 2$. En pratique, le coefficient de concentration des éléments de structures réels, dit *coefficient de concen-*

tration effectif k et déterminé expérimentalement, est plus faible que le coefficient théorique ($\alpha > k$). D'une manière générale, c'est à partir des valeurs connues des coefficients théoriques de concentration et compte tenu de la concentration des contraintes que s'effectuent les calculs de résistance; les valeurs de ces coefficients pour le cas des barres rondes soumises à la traction et ayant des concentrateurs de formes diverses sont données sur la fig. 80 et plus bas

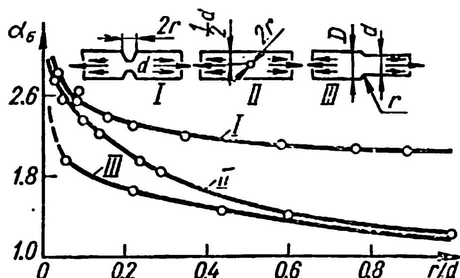


FIG. 80

Forme du concentrateur des contraintes		α
Rainure demi-ronde, rapport de son rayon au diamètre de la barre	0,1	2,0
	0,5	1,6
	1,0	1,2
	2,0	1,1
Congé de raccordement, rapport de son rayon au diamètre de la barre	0,0625	1,75
	0,125	1,50
	0,25	1,20
	0,5	1,10
Coude rectangulaire		2,0
Entaille en V		3,0
Filet anglais		2,0
Filet métrique		2,5
Ouverture, rapport du diamètre de l'ouverture au diamètre de la barre de 0,1 à 0,33		2,0
Stries sur la surface de la pièce		1,2-1,4

L'*Appendice 2* contient des données plus amples relatives aux coefficients de concentration.

Une forte concentration des contraintes est surtout dangereuse pour les éléments en matières fragiles, car si dans la zone de concentration les contraintes atteignent la limite de résistance du matériau, cela provoque

sa destruction. Dans le cas d'un matériau plastique, la concentration présente moins de risque; ceci est dû au fait que lorsque la concentration atteint, dans la zone du concentrateur, la limite d'écoulement $\sigma_{éc}$ il se produit une redistribution des contraintes d'après le schéma indiqué en pointillé sur la fig. 81.

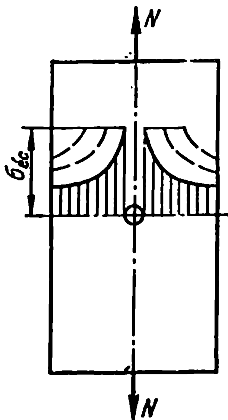


FIG. 81

§ 28. Contraintes admissibles

Une fois les propriétés mécaniques d'un matériau déterminées à l'aide d'essais correspondants des éprouvettes, on peut trouver les contraintes que la construction peut supporter sans danger, c'est-à-dire les contraintes admissibles. Il est évident que la contrainte admissible doit être plus faible que la contrainte limite pour le matériau considéré et n'en constituer qu'une certaine fraction.

Posons

$$[\sigma] = \frac{\sigma_d}{n}, \qquad (4.16)$$

où $[\sigma]$ est la contrainte admissible, σ_d, la contrainte dangereuse, n, le *facteur de sécurité.*

Il convient de considérer comme contrainte dangereuse pour les éléments en matériaux plastiques la limite d'écoulement $\sigma_d = \sigma_{éc}$ *tandis que pour les éléments en matières fragiles ce sera la limite de résistance* $\sigma_d = \sigma_{rés}$.

Le choix du facteur de sécurité n indiquant combien de fois la contrainte admissible est plus faible que la contrainte dangereuse dépend de la nature du matériau (fragile ou plastique), du mode d'application de la charge (charges statique, dynamique, intermittente) ainsi que de facteurs d'ordre général tels que la non-homogénéité du matériau, l'imprécision dans la fixation des charges extérieures, le caractère approximatif des schémas de calcul et des formules, etc.

La valeur du facteur de sécurité dépend également de ce qu'on considère comme contrainte dangereuse ($\sigma_{éc}$ ou $\sigma_{rés}$).

Pour les matériaux plastiques et pour une charge statique quand $\sigma_d = \sigma_{éc}$); $n = n_{éc}$,

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{éc}}{n_{éc}},$$

on pose le facteur de sécurité égal à $n_{éc} = 1{,}4$ -1,6.

Pour les charges statiques sollicitant des matières fragiles, quand $\sigma_d = \sigma_{rés}$; $n = n_{rés}$,

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{rés}}{n_{rés}}$$

on adopte le coefficient de sécurité égal à

$$n_{rés} = 2{,}5\text{-}3{,}0.$$

Parfois, pour les matériaux plastiques aussi, on détermine les contraintes admissibles à partir de la résistance temporaire dont il est plus facile de déterminer la valeur. On a alors

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{rés}}{n_{rés}}.$$

Tenant compte de ce que $\sigma_{éc} = (0{,}5\text{-}0{,}7)\,\sigma_{rés}$; $n_{rés} = 2{,}4\text{-}2{,}6$.

Parfois on désigne les contraintes admissibles en traction par $[\sigma_+]$ et celles en compression par $[\sigma_-]$. Les matières fragiles résistent mieux à la compression qu'à la traction; pour eux, $[\sigma_+] < [\sigma_-]$.

Pour les charges statiques sollicitant des matières fragiles homogènes, il convient de tenir compte de la concentration des contraintes et de faire les calculs en considérant les contraintes locales maximales

$$\sigma_{max} = \alpha\sigma_{nom} \leqslant [\sigma].$$

Les valeurs approximatives des contraintes admissibles pour des charges statiques sollicitant divers matériaux sont présentées au tableau 11.

Les données concernant les propriétés physico-mécaniques des principaux matériaux de construction sont réunies dans l'*Appendice 1.*

Tableau 10

Modules d'élasticité et coefficients de Poisson

Matériau	Module d'élasticité $E \cdot 10^{-6}$ kgf/cm²	Module d'élasticité $G \cdot 10^{-5}$ kgf/cm²	Coefficient de Poisson μ
Fonte blanche, grise	1,15–1,60	4,5	0,23–0,27
Fonte malléable	1,55	—	—
Aciers au carbone	2,0–2,1	8,0–8,1	0,24–0,28
Aciers alliés	2,1–2,2	8,0–8,1	0,25–0,30
Cuivre laminé	1,1	4,0	0,31–0,34
Cuivre étiré à froid	1,3	4,9	—
Cuivre de fonderie	0,84	—	—
Bronze au phosphore, laminé	1,15	4,2	0,32–0,35
Laiton étiré à froid	0,91–0,99	3,5–3,7	0,32–0,42
Laiton de marine, étiré	1,0	—	0,36
Bronze au manganèse, laminé	1,1	4,0	0,35
Aluminium laminé	0,69	2,6–2,7	0,32–0,36
Fil d'aluminium étiré	0,7	—	—
Bronze d'aluminium, de fonderie	1,05	4,2	—
Duralumin laminé	0,71	2,7	—
Zinc laminé	0,84	3,2	0,27
Plomb	0,17	0,70	0,42
Glace	0,1	0,28–0,3	—
Verre	0,56	2,2	0,25
Granit	0,49	—	—
Calcaire	0,42	—	—
Marbre	0,56	—	—
Grès	0,18	—	—
Maçonnerie			
en granit	0,09–0,1	—	—
en calcaire	0,06	—	—
en briques	0,027–0,030	—	—
Béton, limite de résistance	—	—	0,16–0,18
100 kgf/cm²	0,146–0,196	—	—
150 kgf/cm²	0,164–0,214	—	—
200 kgf/cm²	0,182–0,232	—	—
Bois, le long des fibres	0,1–0,12	0,055	—
Bois, au travers des fibres	0,005–0,01	—	—
Caoutchouc	0,00008	—	0,47
Textolite	0,06–0,1	—	—
Pertinax	0,1–0,17	—	—
Bakélite	0,02–0,03	—	0,36
Viskhomlite (ИМ-44)	0,040–0,042	—	0,37
Celluloïde	0,014–0,028	—	0,33–0,38

Tableau 11

Valeurs approximatives des contraintes admissibles principales en traction et en compression

Matériau	Contraintes admissibles, kgf/cm²	
	en traction	en compression
Pièces en fonte grise moulées	280–800	1200–1500
Acier OC et Acier Cт 2	1400	1400
Acier Cт 3	1600	1600
Acier Cт 3 (dans les éléments des ponts)	1400	1400
Acier au carbone dans les constructions mécaniques)	600–2500	600–2500
Acier allié (dans les constructions mécaniques)	1000–4000 et plus	1000–4000 et plus
Cuivre	300–1200	300–1200
Laiton	700–1400	700–1400
Bronze	600–1200	600–1200
Aluminium	300–800	300–800
Bronze d'aluminium	800–1200	800–1200
Duralumin	800–1500	800–1500
Textolite	300–400	300–400
Pertinax	500–700	500–700
Contre-plaqués bakélisés	400–500	400–500
Pin, le long des fibres	70–100	100–120
Pin, au travers des fibres	–	15–20
Chêne, le long des fibres	90–130	130–150
Chêne, au travers des fibres	–	20–35
Maçonnerie en pierre	moins de 3	4–40
Maçonnerie en briques	moins de 2	6–25
Béton	1–7	10–90

CHAPITRE 5

Etat de contrainte et de déformation

§ 29. Etat de contrainte en un point. Plans et contraintes principaux

Les contraintes sont la conséquence de l'interaction des particules d'un corps sollicité par des forces extérieures. A l'effet des forces extérieures qui tendent à modifier la position des particules du corps ou à les déplacer s'opposent les contraintes que ces forces engendrent dans le corps. Les contraintes contribuent à limiter ce déplacement à une faible valeur. Dans un même point les contraintes orientées dans divers sens sont en règle générale différentes; ce n'est que dans certains cas particuliers qu'elles se trouvent identiques.

Considérant la contrainte en un point A d'un corps sollicité, point rapporté à de petits plans (fig. 82) appartenant à deux parties différentes du corps séparé par un plan sécant *1-1* passant par ce point, on peut facilement démontrer que si, sous l'effet de forces extérieures les plans tendent soit à s'éloigner soit à se rapprocher, ce sont des *contraintes normales* σ, de traction ou de compression respectivement, qui apparaîtront entre eux. Si ces plans tendent à glisser l'un sur l'autre, ce sont les *contraintes tangentielles* τ qui vont se manifester; par contre si l'un des plans se déplace dans une direction quelconque par rapport à l'autre tout en lui restant parallèle, on assistera à l'apparition simultanée dans ce plan de contraintes normales σ et tangentielles τ ayant pour résultante la *contrainte totale* p dont le vecteur coïncide avec ladite direction.

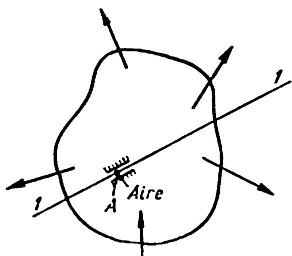


FIG. 82

Dans ce cas, le déplacement des plans peut être décomposé géométriquement en deux déplacements distincts; éloignement mutuel et cisaillement.

Délimitons au voisinage du point considéré du corps sollicité un volume élémentaire de matériau ayant la forme d'un parallélépipède infiniment petit (fig. 83). Sur ses arêtes, l'effet que produit la partie éloignée du corps doit être remplacé par les contraintes correspondantes ou par leurs composantes (normales ou tangentielles), comme le montre le dessin.

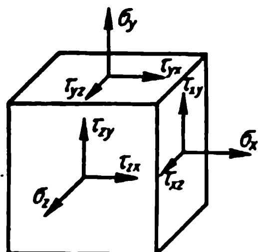


FIG. 83

Si l'orientation des arêtes du parallélépipède élémentaire ainsi délimité varie, les contraintes agissant sur ces arêtes le font aussi. On peut toujours trouver une orientation de l'élément telle que sur ses arêtes il n'y aura pas de contraintes tangentielles.

Les plans sur lesquels les contraintes tangentielles sont absentes sont appelés *plans principaux* et les contraintes normales agissant dans ces plans sont dites *contraintes principales*. On peut démontrer que, en chaque point d'un corps chargé d'une manière quelconque, il existe toujours au moins trois plans principaux, mutuellement perpendiculaires, c'est-à-dire les plans sur lesquels les contraintes tangentielles sont absentes. Les axes parallèles aux contraintes principales sont dits *axes principaux* pour le point considéré. On désigne conventionnellement les contraintes principales par σ_1, σ_2, σ_3; ceci étant on suppose qu'il existe entre elles le rapport (algébrique) suivant:

$$\sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant \sigma_3.$$

L'état de contrainte pour lequel l'une quelconque des contraintes principales n'est pas nulle est appelé état de contrainte *à un axe* ou *état linéaire de tension* (fig. 84, *a*). Si deux contraintes principales sont différentes de zéro alors que la troisième est nulle, on parle d'état de contrainte *à deux axes* ou d'état *plan de tension* (fig. 84, *b*). Lorsque les trois contraintes en question ne sont pas nulles on dit que l'état de contrainte est *à trois axes* ou *état de tension à trois dimensions* (fig. 84, *c*).

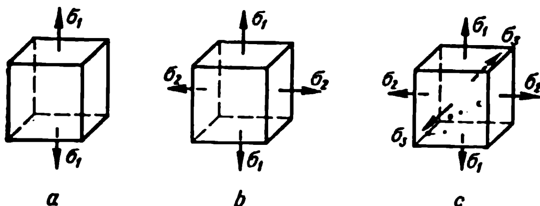


FIG. 84

Par ailleurs, on distingue l'état de contrainte *homogène*, lorsque les contraintes sont égales en chaque point d'une section quelconque ainsi qu'en chaque point de toutes les sections parallèles à cette dernière, et l'état de contrainte *hétérogène* lorsque les contraintes sont différentes en divers points d'une section quelconque du corps considéré ou de toutes autres sections parallèles à celle-là.

§ 30. Etat linéaire de tension

L'état linéaire de tension se rencontre principalement dans les barres en traction ou en compression; toutefois, certains éléments des barres travaillant à la flexion ou soumises à une sollicitation composée, éprouvent eux aussi une tension linéaire.

Pour une barre en traction (fig. 85, *a*) la contrainte normale dans le plan F est donnée par la formule

$$\sigma = \frac{N}{F} = \frac{P}{F}.$$

Les contraintes tangentielles dans ce plan sont nulles. Dans un plan quelconque F_α (fig. 85, *b*) dont la normale extérieure n_α coupe l'axe de σ sous un angle α, la contrainte totale p_α est égale à

$$p_\alpha = \frac{N}{F_\alpha} = \frac{N}{F} \cos\alpha = \sigma \cos\alpha.$$

Les contraintes normales et tangentielles dans le plan F_α sont

$$\sigma_\alpha = p_\alpha \cos\alpha = \sigma \cos^2\alpha; \qquad (5.1)$$

$$\tau_\alpha = p_\alpha \sin\alpha = \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha. \qquad (5.2)$$

Les contraintes normales σ_α sont positives si elles sont des contraintes de traction; les contraintes tangentielles τ_α sont positives si elles tendent à tourner l'élément considéré du corps par rapport à un point quelconque situé à l'intérieur du corps dans le sens des aiguilles d'une montre (σ_α et τ_α sur la fig. 85, *b* sont positives).

D'après les formules (5.1) et (5.2) si $\alpha = 0$ (le plan *I* de la fig. 85, *a*) $\tau_\alpha = 0$; $\sigma_\alpha = \sigma$, alors que si $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (le plan *II*), $\tau_\alpha = \sigma_\alpha = 0$. Il s'ensuit

que les plans *I* et *II* sont les plans principaux; les contraintes principales sont

$$\sigma_1 = \sigma; \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0.$$

En compression $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -\sigma$.

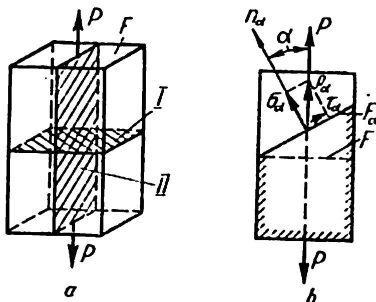


FIG. 85

Les contraintes tangentielles atteignent, d'après (5.2), leurs valeurs maximales lorsque $\alpha = \pm 45°$ et sont égales à

$$\tau_{\alpha\,\max} = \frac{\sigma}{2}.$$

En vertu de (5.1) et (5.2) il est facile de montrer que les contraintes normales et tangentielles dans le plan F_β, perpendiculaire au plan F_α, c'est-à-dire dans le plan dont la normale extérieure forme un angle $\beta = \alpha + 90°$ avec l'axe de la contrainte σ, sont

$$\sigma_\beta = \sigma \cos^2 \beta = \sigma \cos^2 (\alpha + 90°) = \sigma \sin^2 \alpha; \tag{5.3}$$

$$\tau_\beta = \frac{\sigma}{2} \sin 2\beta = \frac{\sigma}{2} \sin 2(\alpha + 90°) = -\frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha. \tag{5.4}$$

§ 31. Etat plan de tension

Dans le cas de l'état plan de tension, lorsqu'un élément est sollicité sur ses deux arêtes orthogonales par des contraintes σ_1 et σ_2 (fig. 86), les contraintes normales et tangentielles agissant dans le plan (α) dont la

normale extérieure n_α coupe l'axe de la contrainte σ_1 sous un angle α sont données par les formules

$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha; \tag{5.5}$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \tag{5.6}$$

Ces formules permettent d'obtenir les expressions pour les contraintes normales et tangentielles dans le plan (β), perpendiculaire au plan (α), c'est-à-dire dans le plan dont la normale extérieure forme avec l'axe de la contrainte σ_1 l'angle $\beta = -(90° - \alpha)$

$$\sigma_\beta = \sigma_1 \sin^2 \alpha + \sigma_2 \cos^2 \alpha; \tag{5.7}$$

$$\tau_\beta = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \tag{5.8}$$

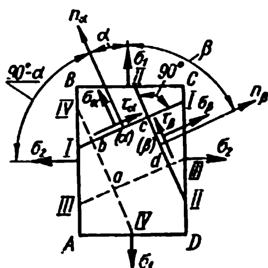


FIG. 86

En additionnant terme à terme les équations (5.5) et (5.7), il vient

$$\sigma_\alpha + \sigma_\beta = \sigma_1 + \sigma_2, \tag{5.9}$$

autrement dit, *la somme des contraintes normales, agissant dans deux plans orthogonaux, est invariable quelle que soit l'inclinaison de ces deux plans et est égale à la somme des contraintes principales.*

Il résulte de (5.6) et (5.8) que les *contraintes tangentielles atteignent*, tout comme dans le cas de l'état de contrainte à un axe, *leurs valeurs maximales lorsque* $\alpha = \pm 45°$, c'est-à-dire dans les plans inclinés à 45° par rapport aux plans principaux; elles sont alors égales à

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}. \tag{5.10}$$

Comparant (5.6) et (5.8), il vient

$$\tau_\beta = -\tau_\alpha. \tag{5.11}$$

Cette égalité exprime la *loi de la parité des contraintes tangentielles* qu'on peut formuler ainsi: *la contrainte tangentielle agissant dans un plan quelconque provoque dans un autre plan, perpendiculaire à ce premier, une contrainte tangentielle de valeur égale et de signe inverse.*

C'est pour les contraintes principales que les contraintes normales atteignent leurs valeurs extrémales.

Dans tous les plans inclinés, les contraintes normales ont des valeurs intermédiaires entre σ_1 et σ_2.

Un même état de contrainte dans un élément peut être représenté au moyen des contraintes principales σ_1 et σ_2 (élément *ABCD*, fig. 86 et 87, *a*) ou des contraintes dans des plans inclinés σ_α, τ_α, σ_β, τ_β (éléments *abcd*, fig. 86 et 87, *b*).

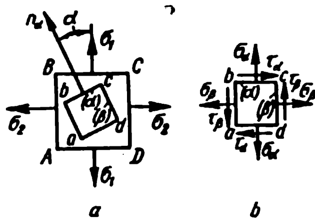


FIG. 87

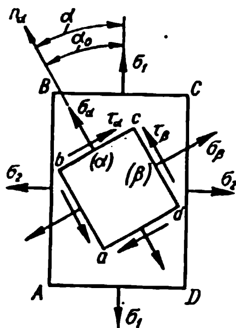


FIG. 88

La théorie de l'état de contrainte fait la distinction entre deux problèmes principaux.

Problème direct. Connaissant pour un point donné les plans principaux et les contraintes principales agissant dans ces plans on doit déterminer les contraintes normales et tangentielles dans des plans inclinés sous un angle donné par rapport à ces premiers, autrement dit il faut, d'après les contraintes agissant sur les arêtes de l'élément *ABCD* (fig. 88), déterminer celles agissant sur les arêtes de l'élément *abcd*.

Problème inverse. Connaissant les contraintes normales et tangentielles dans deux plans orthogonaux passant par un point donné, on doit déterminer les axes principaux et les contraintes principales. En d'autres mots, pour un élément *abcd* (fig. 88) dont on connait les contraintes normales et tangentielles agissant sur ses arêtes on doit déterminer l'orientation de l'élément *ABCD*, c'est-à-dire l'angle α_0 ainsi que les contraintes principales.

Ces deux problèmes peuvent être résolus soit analytiquement soit graphiquement.

§ 32. Etat plan de tension. Problème direct. Cercle de Mohr

La solution analytique du problème direct est donnée par les formules (5.5)-(5.8).

Graphiquement, on peut déterminer σ_α, τ_α, σ_β, τ_β à partir des contraintes principales connues σ_1 et σ_2 (fig. 89, *a*) à l'aide d'un diagramme

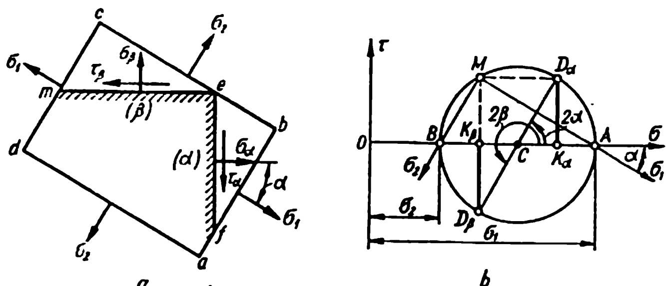


FIG. 89

dit *cercle de contraintes (cercle de Mohr)* que l'on construit en coordonnées σ, τ sur le segment *AB* pris comme diamètre du cercle qui est égal à la différence entre les contraintes principales $\sigma_1 - \sigma_2$ (fig. 89, *b*). Effectivement, si l'on trace à partir du centre du cercle (point *C*) le rayon *CD* incliné sous un angle 2α jusqu'à son intersection avec la circonférence, on obtient un point D_α, dont les coordonnées caractérisent respectivement les contraintes σ_α et τ_α:

$$\overline{OK_\alpha} = \overline{OC} + \overline{CD_\alpha}\cos 2\alpha = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2\alpha =$$

$$= \sigma_1\cos^2\alpha + \sigma_2\sin^2\alpha = \sigma_\alpha;$$

$$\overline{K_\alpha D_\alpha} = \overline{CD_\alpha}\sin 2\alpha = \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\sin 2\alpha = \tau_\alpha .$$

Il est aisé de montrer que le point D_β caractérise les contraintes σ_β, τ_β dans le plan (β) perpendiculaire au plan α

$$\overline{OK_\beta} = \overline{OC} - \overline{CK_\beta} = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2\alpha =$$

$$= \sigma_1\sin^2\alpha + \sigma_2\cos^2\alpha = \sigma_\beta;$$

$$\overline{D_\beta K_\beta} = -\tau_\alpha = \tau_\beta.$$

Les points D_α et D_β qui caractérisent les contraintes dans les deux plans orthogonaux (α) et (β) se trouvent toujours sur les extrémités d'un même diamètre.

Le cercle de Mohr ainsi construit décrit entièrement l'état de contrainte de l'élément que montre la fig. 89, *a*. Si l'on fait varier l'angle α entre $-90°$ et $+90°$, les plans inclinés (α) et (β) prennent successivement toutes les positions possibles, en même temps les points D_α et D_β vont décrire un cercle entier. En particulier, pour $\alpha = 0$, quand les arêtes *ef* et *em* vont devenir les plans principaux et que sur elles vont agir les mêmes contraintes que sur les arêtes de l'élément *abcd*, le point D_α coïncidera avec le point *A* tandis que le point D_β avec le point *B*.

Pour déterminer la position du pôle sur le cercle de Mohr, traçons, tout comme pour le cas du cercle d'inertie, à partir du point D_α une ligne parallèle à σ_α (dans notre exemple ce sera une ligne horizontale, fig. 89, *b*) jusqu'à son intersection avec le cercle. Le point *M* sera alors le pôle en question. On peut aussi trouver le pôle *M* en traçant de D_β une ligne parallèle à la contrainte σ_β, c'est-à-dire une ligne verticale. On peut démontrer que *la droite reliant le pôle M à un point quelconque du cercle est parallèle à l'axe de la contrainte normale agissant dans le plan auquel ce point appartient*. Ainsi, la droite *MA* est parallèle à la contrainte principale σ_1 tandis que la ligne *MB*, à la contrainte principale σ_2.

§ 33. Etat plan de tension: problème inverse

Quand on effectue des calculs pratiques on est souvent confronté au problème inverse pour lequel il s'agit de déterminer σ_1 et σ_2 à partir des σ_α, τ_α, σ_β, τ_β connus (fig. 90, *a*). Soit $\sigma_\alpha > \sigma_\beta$, $\tau_\alpha > 0$. Il est évidemment facile de construire le cercle de Mohr en coordonnées σ, τ (fig. 90, *b*) si l'on connaît la position de deux points diamétralement opposés du cercle, D_α et D_β, qui ont pour coordonnées respectives σ_α, τ_α et σ_β, τ_β. Cela étant, les abscisses des points d'intersection du cercle avec l'axe de σ, i.e. *OA* et *OB*, donneront les valeurs correspondantes des contraintes principales σ_1 et σ_2.

Pour déterminer l'orientation des plans principaux nous trouverons le pôle et nous nous servirons de ses propriétés. A cet effet, menons à partir du point D_α une ligne parallèle à la ligne d'action de σ_α, c'est-à-dire une horizontale. Le point *M*, point d'intersection de cette ligne avec le cercle, donnera le pôle. En reliant le point *M* aux points *A* et *B*, nous obtiendrons les directions des contraintes principales σ_1 et σ_2. L'orientation des plans principaux est, de toute évidence, perpendiculaire aux axes des contraintes principales. Sur la fig. 90, *a* on a prélevé, à l'intérieur de l'élément de départ, un élément délimité par les plans principaux sur

les arêtes desquels on a montré les contraintes principales σ_1 et σ_2. L'analyse du cercle de Mohr nous permet d'obtenir les expressions analytiques des contraintes principales σ_1 et σ_2 en fonction de σ_α, τ_α, σ_β, τ_β:

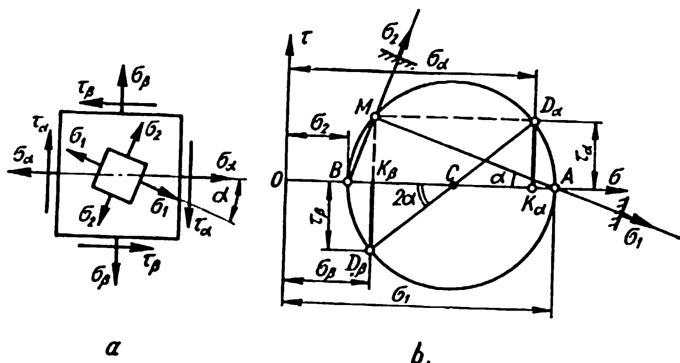


FIG. 90

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{1}{2}\left[\sigma_\alpha + \sigma_\beta + \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2}\right];\\ \sigma_2 &= \frac{1}{2}\left[\sigma_\alpha + \sigma_\beta - \sqrt{(\sigma_\alpha - \sigma_\beta)^2 + 4\tau_\alpha^2}\right].\end{aligned}\right\} \quad (5.12)$$

Il résulte également de la fig. 90, *b*

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{\overline{MK_\beta}}{\overline{AK_\beta}} = -\frac{\overline{MK_\beta}}{\overline{OA} - \overline{OK_\beta}} = -\frac{\tau_\alpha}{\sigma_1 - \sigma_\beta}. \quad (5.13)$$

C'est cette formule qui fournit l'unique valeur de l'angle α dont on doit faire dévier la normale n_α pour obtenir la direction de la contrainte principale ayant la valeur algébrique la plus grande. Notons qu'aux valeurs négatives de α correspondent des angles pris dans le sens des aiguilles d'une montre et que si l'une des contraintes principales calculées à l'aide des formules (5.12) est négative, il convient de désigner les contraintes non par σ_1 et σ_2, mais par σ_1 et σ_3; si, par contre, les deux contraintes principales sont négatives, on doit les désigner par σ_2 et σ_3.

§ 34. Etat de tension à trois dimensions

L'état de tension à trois axes est rarement étudié en résistance des matériaux. Aussi, nous bornerons-nous à relever quelques notions théoriques fondamentales de l'état de tension à trois dimensions.

Examinons le cas de l'état de tension à trois dimensions (fig. 91) pour lequel sur les arêtes d'un cube donné agissent les trois contraintes principales

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \neq 0.$$

Les contraintes normales et tangentielles agissant dans le plan *I* parallèle à σ_1 ne dépendent évidemment pas de σ_1. Elles ne dépendront que des contraintes σ_2 et σ_3 et dans tous les plans analogues elles seront caractérisées par le cercle de Mohr L_I ayant pour diamètre σ_2-σ_3 (fig. 92). Dans le plan *II* parallèle à σ_2 ,les contraintes normales et tangentielles seront caractérisées par le cercle de Mohr L_{II} de diamètre σ_1-σ_3; enfin dans le plan *III* parallèle à la contrainte σ_3, les contraintes normales et tangentielles le seront par le cercle de Mohr L_{III} de diamètre σ_1-σ_2.

Pour tous les plans mentionnés la méthode de détermination de σ_α, τ_α et σ_β, τ_β ne diffère pas de celle exposée plus haut pour le cas de la résolution du problème direct de l'état plan de tension.

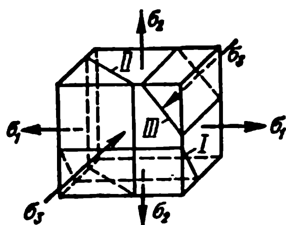


FIG. 91

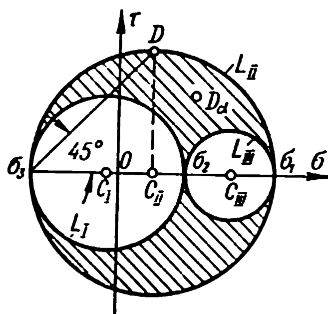


FIG. 92

On peut prouver que si l'on trace un plan non parallèle à aucun des axes principaux les contraintes normale σ_α et tangentielle τ_α agissant

dans ce plan peuvent être déterminées à l'aide des formules suivantes:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_1 \cos^2\alpha_1 + \sigma_2 \cos^2\alpha_2 + \sigma_3 \cos^2\alpha_3; \\ \tau_\alpha &= \sqrt{\sigma_1^2 \cos^2\alpha_1 + \sigma_2^2 \cos^2\alpha_2 + \sigma_3^2 \cos^2\alpha_3 - \sigma_\alpha^2} \end{aligned}\right\}, \tag{5.14}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ étant les angles que forme avec les axes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ la normale abaissée sur le plan considéré.

L'on démontre également que le point $D_\alpha(\sigma_\alpha, \tau_\alpha)$ caractérisant l'état de contrainte dans un plan incliné de façon arbitraire sera toujours situé dans la zone hachurée (fig. 92) ou bien sur sa frontière, si le plan est parallèle à l'une des contraintes principales.

L'analyse des cercles de Mohr (fig. 92) montre que τ_{max} représentée par le point D sur le cercle L_{II} et agissant dans un plan parallèle à la contrainte principale σ_2 et incliné sous un angle $\alpha = 45°$ par rapport aux contraintes σ_1 et σ_3 est égale au rayon du grand cercle. Il en résulte que pour l'état de tension à trois dimensions:

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}. \tag{5.15}$$

Dans le cas d'un plan dont la normale extérieure forme avec les axes de σ_1, σ_2 et σ_3 des angles égaux $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha$, plan qu'on appelle *plan octaédrique* (puisqu'il est parallèle à une face de l'octaèdre qu'on peut obtenir à partir d'un cube), et lorsque

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1;$$

$$\cos^2\alpha = 1/3,$$

les formules (5.14) peuvent s'écrire

$$\sigma_{oct} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{3} = \sigma_{moy}; \tag{5.16}$$

$$\tau_{oct} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} =$$

$$= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \tag{5.17}$$

La contrainte tangentielle déterminée d'après (5.17) est appelée *contrainte octaédrique*. La contrainte octaédrique normale représente en quelque sorte la moyenne des contraintes pour l'état de tension à trois axes examiné.

Lorsqu'on a à évaluer la résistance d'un matériau à l'état de contrainte complexe, on se sert souvent d'une valeur fictive de la contrainte σ_i qu'on appelle *intensité de contrainte* et qui est liée à τ_{oct} par la relation

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{oct}.$$

§ 35. Déformation en état de tension à trois dimensions. Loi de Hooke généralisée

Faisant recours à l'hypothèse selon laquelle les matériaux se comportent conformément à la loi de Hooke tandis que les déformations sont petites, on peut obtenir les relations entre contraintes et déformations pour le cas général d'état de tension à trois dimensions. Utilisons pour cela les relations (4.3) et (4.9) obtenues plus haut pour l'état linéaire de tension.

Considérons la déformation d'un parallélépipède rectangulaire C ayant pour dimensions $a \times b \times c$ (fig. 93, *a*), déformation qui se produit sous l'effet des contraintes principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ (on suppose que toutes les contraintes sont positives) suivant les trois faces parallèles respectivement aux arêtes a, b, c.

Les allongements des arêtes seront respectivement $\Delta a, \Delta b$ et Δc tandis que les déformations relatives sur les trois axes principaux seron

$$\varepsilon_1 = \frac{\Delta a}{a}; \qquad \varepsilon_2 = \frac{\Delta b}{b}; \qquad \varepsilon_3 = \frac{\Delta c}{c}. \qquad (15.8)$$

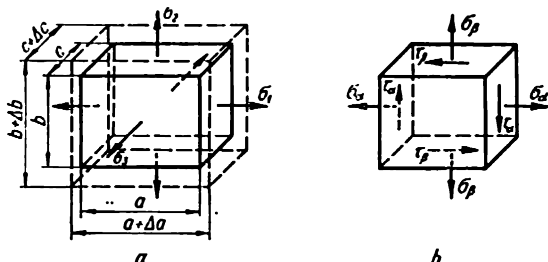


FIG. 93

Chacun des trois allongements relatifs est l'effet de l'action de l'ensemble des trois contraintes σ_1, σ_2 et σ_3. Ceci étant, on a, par exemple,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \varepsilon_1'' + \varepsilon_1''', \qquad (5.19)$$

et en vertu de (4.3) et (4.9)

$$\varepsilon_1' = \frac{\sigma_1}{E}; \qquad \varepsilon_1'' = -\mu\frac{\sigma_2}{E}; \qquad \varepsilon_1''' = -\mu\frac{\sigma_3}{E}. \tag{5.20}$$

Tenant compte de (5.20) on peut écrire (5.19) sous la forme

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E} - \mu\frac{\sigma_2}{E} - \mu\frac{\sigma_3}{E} = \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]. \tag{5.21}$$

D'une manière analogue on peut écrire les expressions pour ε_2 et ε_3 en tant que $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. La *loi de Hooke généralisée* pour les matériaux isotropes s'exprimera alors par les relations

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}[\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned}\right\} \tag{5.22}$$

Notons que les contraintes de compression, introduites dans la formule (5.22), doivent être affectées du signe «moins». Il est évident que dans le cas d'un état plan de tension, en particulier pour $\sigma_2 = 0$, la loi de Hooke généralisée prend la forme

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_3);$$

$$\varepsilon_2 = -\frac{\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_3);$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}(\sigma_3 - \mu\sigma_1).$$

La loi de Hooke est valable non seulement pour les déformationt principales, mais aussi pour le calcul des déformations relatives suivan n'importe quel triplet des axes mutuellement perpendiculaires, car pour de faibles déformations on néglige l'influence du cisaillement sur la défor-

mation linéaire, cette influence étant très faible. Il en résulte que les allongements relatifs dans le sens des contraintes σ_α, σ_β (fig. 93, b) sont

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{E}(\sigma_\alpha - \mu\sigma_\beta); \qquad \varepsilon_\beta = \frac{1}{E}(\sigma_\beta - \mu\sigma_\alpha).$$

La *déformation de volume* ε_v qui représente la variation relative du volume $v_0 = abc$, sous l'effet des contraintes $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ qui lui sont appliquées, se détermine, à des grandeurs du second degré de petitesse près, par la formule

$$\varepsilon_v = \frac{v - v_0}{v_0} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \qquad (5.23)$$

ou bien par l'intermédiaire des contraintes, en tenant compte de (5.22), par la formule

$$\varepsilon_v = \frac{1 - 2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3). \qquad (5.24)$$

Dans le cas particulier d'une compression uniforme triaxiale, lorsque $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = -p$, on a

$$\varepsilon_v = -\frac{p}{K}, \qquad (5.25)$$

avec $K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}$. La grandeur K est appelée *module de déformation de volume*. D'après (5.24) on constate que lors de la déformation d'un corps dont le matériau possède un coefficient de Poisson $\mu = 0{,}5$ (le caoutchouc, par exemple) le volume du corps ne varie pas.

§ 36. Energie potentielle de déformation

On appelle énergie potentielle de déformation l'énergie qui s'accumule dans le corps au cours de sa déformation élastique. Lorsque le corps est déformé sous l'effet d'une charge extérieure statique, les points d'application des forces extérieures se déplacent alors que l'énergie potentielle de la charge diminue d'une valeur numériquement égale au travail effectué par les forces extérieures. L'énergie perdue par les forces extérieures ne disparaît pas; elle se transforme principalement en *énergie potentielle de déformation du corps* (on néglige d'habitude la faible quantité d'énergie qui se dissipe au cours de la déformation, surtout sous forme de chaleur).

L'accroissement de l'énergie potentielle U d'un corps déformé est égal à la diminution de l'énergie potentielle de la charge U_p et est numériquement égal au travail A_P accompli par les forces extérieures, c'est-à-dire

$$U = A_P. \tag{5.26}$$

Ainsi, l'énergie potentielle de déformation est numériquement égale au travail des forces extérieures effectué pour provoquer la déformation élastique du corps.

Dans le cas d'une simple traction (fig. 94)

$$U = \frac{P\Delta l}{2},$$

l'énergie potentielle spécifique est

$$u = \frac{U}{v} = \frac{P\Delta l}{2Fl} = \frac{\sigma\varepsilon}{2}, \tag{5.27}$$

v étant le volume du corps; F, l'aire de la section transversale.

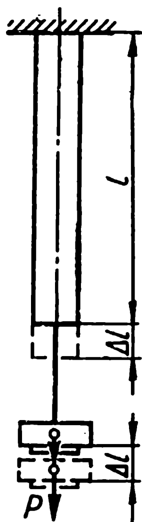


FIG. 94

Tenant compte de ce que $\varepsilon = \frac{\sigma}{E}$, nous aurons

$$u = \frac{\sigma^2}{2E}. \tag{5.28}$$

Lorsque, dans le cas d'un état de tension à trois dimensions, l'énergie potentielle spécifique de déformation est déterminée par le travail total des contraintes principales $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, effectué pour des déplacements correspondants équivalant aux déformations relatives $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ (fig. 95), l'énergie potentielle spécifique est donnée par la formule

$$u = \frac{\sigma_1\varepsilon_1}{2} + \frac{\sigma_2\varepsilon_2}{2} + \frac{\sigma_3\varepsilon_3}{2}.$$

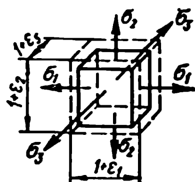


FIG. 95

Se servant de la loi de Hooke généralisée on peut exclure les déformations. Il vient

$$u = \frac{1}{2E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)]. \tag{5.29}$$

Lors de la déformation d'un corps élastique (fig. 95) on assiste non seulement à la variation de son volume, mais aussi à la modification de sa forme (par exemple, un cube se transforme en parallélépipède). On peut donc représenter l'énergie potentielle spécifique totale de déformation u sous forme de deux termes:

$$u = u_v + u_f,$$

où u_v *est l'énergie potentielle spécifique de la variation du volume,* u_f, *l'énergie potentielle spécifique de la modification de la forme.*

On peut démontrer que

$$u_v = \frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2; \qquad (5.30)$$

$$u_f = \frac{1+\mu}{3E}[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)] =$$

$$= \frac{1+\mu}{6E}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \qquad (5.31)$$

CHAPITRE 6

Critères de résistance

§ 37. Théories fondamentales de la résistance

Le but essentiel des calculs d'ingénieur consiste à évaluer la résistance d'un élément de structure quand on connaît son état de contrainte, c'est-à-dire d'après les contraintes principales agissant en certains points du corps. Ce problème se résout le plus aisément dans le cas de déformations simples, en particulier dans le cas d'un état de contrainte à un axe, étant donné que les valeurs des contraintes limites (dangereuses) peuvent alors être facilement déterminées de façon expérimentale. Rappelons que pour les matériaux élastiques la contrainte dangereuse est constituée par la limite

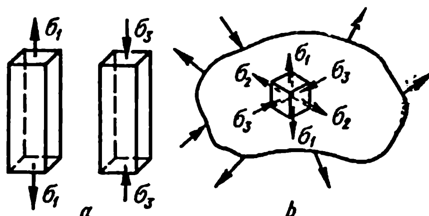


FIG. 96

d'écoulement, tandis que pour les matières fragiles, par la limite d'écrouissage temporaire.

Ainsi la condition de résistance pour l'état de contrainte à un axe (fig. 96, *a*) s'écrira

$$\sigma_1 < [\sigma_+]; \quad \sigma_3 < [\sigma_-], \tag{6.1}$$

où $[\sigma_+]$ et $[\sigma_-]$ sont les contraintes admissibles respectivement en traction et en compression.

Dans le cas d'un état de contrainte complexe, lorsque deux ou toutes les trois contraintes principales σ_1, σ_2 et σ_3 ne sont pas nulles (fig. 96, *b*), l'état limite (dangereux) pour un même matériau peut être atteint à des valeurs différentes des contraintes principales limites en fonction du rapport existant entre elles. La multiplicité de rapports possibles entre σ_1, σ_2 et σ_3 ainsi que les difficultés techniques inhérentes aux essais rendent le contrôle expérimental pratiquement impossible.

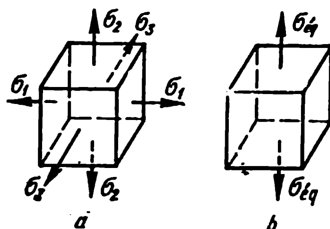


FIG. 97

Une autre approche du problème posé consiste dans le choix des *critères de résistance* (critères de l'état de contrainte et de déformation limite). A cet effet, on émet des hypothèses selon lesquelles tel ou tel facteur exerce une influence déterminante sur la résistance du matériau. Parallèlement, on prévoit la possibilité de contrôle du critère de résistance choisi par la comparaison de l'état de contrainte complexe donné avec un autre, simple, par exemple, une traction uniaxiale (fig .97, *a*, *b*) ainsi que de la détermination d'une contrainte équivalente telle que les deux cas vont donner un même facteur de sécurité. Dans le cas général, on entend par facteur de sécurité le nombre n indiquant combien de fois il faut augmenter simultanément toutes les composantes d'un état de contrainte $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ pour le faire passer à l'état limite:

$$\sigma_1^0 = n\sigma_1; \quad \sigma_2^0 = n\sigma_2; \quad \sigma_3^0 = n\sigma_3.$$

Les hypothèses ainsi émises sont appelées *théories mécaniques de résistance*. Ci-bas, nous examinerons les critères principaux (théories de résistance).

Critère des contraintes normales maximales (première théorie de résistance). On suppose que l'état dangereux d'un corps à l'état de contrainte complexe est défini par la valeur de la contrainte normale maximale

ou bien
$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_+^0 \\ |\sigma_3| &= \sigma_-^0. \end{aligned}\right\} \qquad (6.2)$$

La condition de résistance comprenant le facteur de sécurité n a la forme

ou bien

$$\left.\begin{array}{r}\sigma_1 \leqslant [\sigma_+] \\ |\sigma_3| \leqslant [\sigma_-],\end{array}\right\} \qquad (6.3)$$

avec

$$[\sigma] = \frac{\sigma^0}{n}\cdot$$

Cette théorie n'est confirmée dans la pratique que pour les matières assez fragiles et suffisamment homogènes (verre, gypse, certaines céramiques).

Critère des déformations linéaires relatives maximales (deuxième théorie de résistance). Comme critère de l'état limite on prend la déformation linéaire la plus grande en valeur absolue, autrement dit, la condition de destruction est

$$|\varepsilon_{max}| = \varepsilon^0. \qquad (6.4)$$

La condition de résistance s'écrit:

$$\varepsilon_{max} = \varepsilon_1 \leqslant [\varepsilon] = \frac{\varepsilon^0}{n}\cdot \qquad (6.5)$$

Considérant que $[\varepsilon] = \frac{[\sigma]}{E}$ et que

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\,[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)],$$

on peut écrire la condition de résistance (6.5) sous la forme

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leqslant [\sigma]. \qquad (6.6)$$

Comme on le voit de (6.6), ce n'est pas l'une ou l'autre contrainte principale qu'il faut comparer avec la contrainte admissible, mais bien leur combinaison. La contrainte équivalente, dans ce cas, équivaut à:

$$\sigma_{\text{éq II}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3). \qquad (6.7)$$

Cette théorie qui avait autrefois une large audience n'est presque pas utilisée de nos jours dans les calculs pratiques à cause de sa faible fiabilité.

Critère des contraintes tangentielles maximales (troisième théorie de résistance). On part de l'hypothèse d'après laquelle l'état dangereux d'un corps sollicité est déterminé par la valeur de la contrainte tangentielle

maximale. La condition de destruction et celle de résistance s'écrivent respectivement dans ce cas:

$$\tau_{max} = \tau^0; \tag{6.8}$$

$$\tau_{max} \leqslant [\tau] = \frac{\tau^0}{n} \cdot \tag{6.9}$$

Etant donné que

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}, \quad \tau^0 = \frac{\sigma^0}{2} \text{ et } [\tau] = \frac{[\sigma]}{2},$$

la condition de résistance (6.9) en fonction des contraintes principales s'écrit comme suit

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leqslant [\sigma], \tag{6.10}$$

et la contrainte équivalente selon la troisième théorie de résistance se détermine par la formule:

$$\sigma_{\text{éq III}} = \sigma_1 - \sigma_3. \tag{6.11}$$

Cette théorie donne de bons résultants pour les matériaux ayant une égale résistance en traction et en compression. L'inconvénient de la troisième théorie consiste en ce qu'elle ne tient pas compte de la contrainte principale ,de valeur σ_2, qui exerce une certaine influence, quoique négligeable dans la plupart des cas, sur la résistance du matériau. Si l'on pose comme état limite des matériaux plastiques la limite d'écoulement on peut présenter la condition (6.8) sous la forme suivante:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{\text{éc}}. \tag{6.12}$$

Cette condition détermine assez bien le début de la déformation plastique des matériaux à radoucissement pour lesquels la localisation de cette dernière constitue un moment caractéristique.

Critère de l'énergie potentielle spécifique de la modification de la forme (quatrième théorie de résistance). On suppose que l'état dangereux (limite) d'un corps sollicité est caractérisé par la valeur limite de l'énergie potentielle spécifique accumulée lors de la déformation. Celle-ci peut être déterminée pour le cas d'une traction simple au début de l'écoulement comme

$$u_{f\,max} = u_f^0 = u_{f.\text{éc}}. \tag{6.13}$$

La condition de résistance est alors

$$u_{f\,max} \leqslant [u_f]. \tag{6.14}$$

Dans l'hypothèse que le matériau se comporte conformément à la loi de Hooke jusqu'à ce que l'état limite soit atteint, on a, d'après (5.31), pour une traction simple au début de l'écoulement ($\sigma_1 = \sigma_{éc}$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$):

$$u_{f.éc} = \frac{1+\mu}{3E} \sigma_{éc}^2 .$$

En portant (5.31) et la valeur de $u_{f.éc}$ tirée de la dernière égalité dans la condition (6.13) on obtient

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} = \sigma_{éc}, \\ \text{ou bien} \\ \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]} = \sigma_{éc}. \end{array}\right\} \qquad (6.15)$$

La condition de résistance (6.14) s'écrira alors

$$\sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]} \leqslant \frac{\sigma_{éc}}{n} = [\sigma]. \qquad (6.16)$$

La contrainte équivalente, celle qu'on emploie pour les calculs selon la quatrième théorie de résistance, est fournie par la formule

$$\sigma_{éq\,IV} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]}. \qquad (6.17)$$

L'équation de calcul pour la quatrième théorie de résistance s'obtient à partir du critère de la constance des contraintes tangentielles octaédriques

$$\tau_{oct.max} \leqslant [\tau_{oct}].$$

Cette conception libère la théorie de résistance des restrictions liées au domaine d'application de la loi de Hooke et permet de déterminer non seulement le début de la déformation plastique mais aussi le début de la destruction.

La quatrième théorie de résistance est applicable aux matériaux plastiques qui résistent de façon identique à la compression et à la traction.

Critère de Coulomb-Mohr. Ce critère est fondé sur l'hypothèse d'après laquelle la résistance des matériaux dans le cas général d'état de contrainte dépend principalement de la valeur et du signe de la contrainte principale maximale σ_1 et de ceux de la contrainte principale minimale σ_3 (l'erreur

due au fait qu'on a négligé σ_2 ne dépasse ordinairement pas 12 à 15%). D'après cette hypothèse n'importe quel état de contrainte peut être représenté sous forme d'un cercle de Mohr tracé à la base des contraintes principales σ_1 et σ_3.

Si pour des σ_1 et σ_3 donnés la résistance d'un materiau se trouve compromise, le cercle tracé à la base de ces contraintes sera dit *cercle limite*. En faisant varier le rapport entre σ_1 et σ_3 on obtient pour le matériau considéré une famille de cercles de Mohr limites (fig. 98). On peut remplacer l'enveloppe *ABCDE* de la famille des cercles limites, avec un degré d'approximation suffisant, par des droites tangentes aux cercles de Mohr, tracés pour le cas de traction sur un diamètre égal à la limite d'écrouissage temporaire en traction $\sigma_{écr}$, et pour le cas de compression, sur un diamètre égal à la limite d'écrouissage temporaire du matériau en compression $\sigma_{écr.comp}$ (fig. 99).

Il est évident qu'on peut refaire le diagramme de la fig. 99 en adoptant pour échelle les contraintes admissibles (fig. 100). Le diamètre du cercle pour le cas de traction est égal à $[\sigma_+] = \frac{\sigma_{écr}}{n}$, et pour la compression à $[\sigma_-] = \frac{\sigma_{écr.comp}}{n}$.

La similitude des triangles O_1O_2a et O_1O_3b donne la condition de résistance:

$$\sigma_1 - \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]}\sigma_3 \leqslant [\sigma_+]. \tag{6.18}$$

La contrainte équivalente d'après la théorie de Mohr ci-dessus exposée

$$\sigma_{éq\,M} = \sigma_1 - \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]}\sigma_3. \tag{6.19}$$

La théorie de résistance de Coulomb-Mohr permet de déterminer la résistance à la destruction des matériaux dont la résistance à la traction et celle à la compression sont différentes (matières fragiles).

On doit souligner que l'état fragile ou l'état plastique d'un matériau sont fonction non seulement des propriétés de ce matériau mais aussi du type de l'état de contrainte, de la température et de la vitesse d'application de la charge. Comme le montrent les essais, les matières plastiques se comportent sous certaines conditions d'application de la charge et de température comme des matières fragiles alors que les matières fragiles, quant à elles, se comportent, pour des états de contraintes déterminés, comme des matières plastiques.

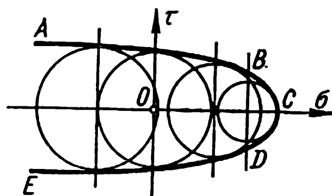


FIG. 98

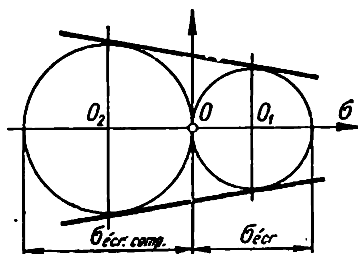


FIG. 99

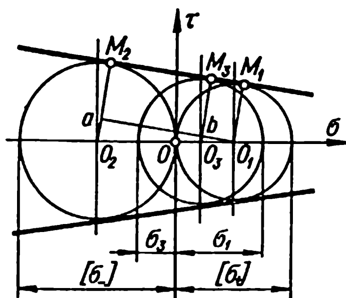


FIG. 100

§ 38. Aperçu de quelques théories modernes de résistance

La condition du passage du matériau à l'état limite peut être exprimée par l'équation

$$F(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0, \qquad (6.20)$$

qu'on peut représenter par la surface limite dans un espace tridimensionnel avec, comme coordonnées cartésiennes, les valeurs des contraintes principales.

Ainsi, la surface limite correspondant à la condition d'apparition des déformations plastiques en masse s'exprime selon la théorie de l'énergie potentielle spécifique de modification de la forme (6.15) par

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 - 2\sigma_{\text{éc}}^2 = 0. \qquad (6.21)$$

La surface limite (6.21) a la forme d'un cylindre circulaire dont l'axe est identiquement incliné par rapport aux axes des coordonnées (fig. 101, *a*) et dont le rayon est égal à $r = \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_{\text{éc}}$.

Pour un état plan de tension lorsqu'une des contraintes principales est nulle, la condition (6.21) donne pour surface limite une courbe elliptique (fig. 101, *b*).

Au critère des contraintes tangentielles maximales correspond une surface limite ayant la forme d'un prisme hexaédrique régulier inscrit

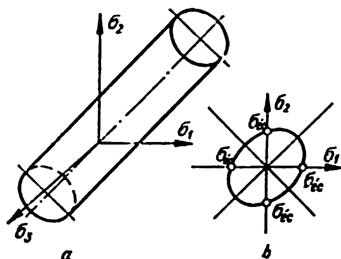


FIG. 101

dans un cylindre. Au critère des contraintes normales maximales correspond un cube à arêtes ayant pour longueur σ^0. Notons que toutes les points se trouvant à l'intérieur d'une zone limitée par la surface limite correspondent aux états de contrainte ayant le facteur de sécurité $n > 1$, alors que les états de contrainte représentés par les points situés en dehors de la zone limitée par la surface limite ont le facteur de sécurité $n < 1$.

C'est sur le choix de diverses formes d'une surface limite permettant d'apprécier de la manière la plus complète les particularités de résistance de la classe des matériaux considérés dans les conditions d'un état de contrainte complexe que portent les théories les plus récentes.

Critère de résistance de Jagne-Boujinski. Comme surface limite (6.20) on adopte un polynôme de second degré symétrique par rapport aux trois axes principales

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + a(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + \\ + b(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = c, \tag{6.22}$$

où

$$a = \frac{6[\tau]^2 - 2[\sigma_+][\sigma_-]}{[\sigma_+][\sigma_-]}; \quad b = \frac{6[\tau]^2([\sigma_-] - [\sigma_+])}{[\sigma_+][\sigma_-]}; \quad c = 6[\tau]^2,$$

$[\sigma_+]$, $[\sigma_-]$ et $[\tau]$ étant déterminées expérimentalement pour le matériau considéré à l'aide d'essais respectivement à la traction uniaxiale, à la compression et au cisaillement pur.

Il est évident que la théorie de résistance de Jagne-Boujinski permet de déterminer non seulement les particularités de la résistance à la traction et à la compression, mais aussi de la résistance au cisaillement.

Critère de résistance de Pissarenko-Lebedev. Parmi les théories modernes on doit mentionner celle proposée par G. Pissarenko et A. Lebedev et fondée sur l'hypothèse selon laquelle l'apparition de l'état limite est conditionnée par la capacité du matériau de résister aux contraintes aussi bien normales que tangentielles.

Selon cette théorie, il faut prendre le critère de résistance sous forme de fonctions des contraintes tangentielles (par exemple, les contraintes tangentielles octaédriques) invariantes par rapport à l'état de contrainte, ainsi que de la contrainte normale maximale.

Dans ces conditions, le critère de résistance peut être écrit dans la forme suivante

$$\tau_{oct} + m_1\sigma_1 \leqslant m_2. \tag{6.23}$$

Exprimant les contraintes m_1 et m_2 par des contraintes limites en traction uniaxiale σ^0_+ et en compression uniaxiale σ^0_- (notamment, par $\sigma_{écr}$ et $\sigma_{écr.tr}$) la condition (6.23) s'écrit:

$$\frac{3}{\sqrt{2}}\chi\tau_{oct} + (1 - \chi)\sigma_1 \leqslant \sigma^0_+,$$

ou bien si l'on passe à l'intensité des contraintes

$$\chi\sigma_i + (1 - \chi)\sigma_1 \leqslant \sigma^0_+, \tag{6.24}$$

avec

$$\chi = \frac{\overset{0}{\sigma}_+}{\overset{0}{\sigma}_-} .$$

Pour un matériau se trouvant en état plastique, lorsque $\overset{0}{\sigma}_+ = \overset{0}{\sigma}_-$; $\chi = 1$, l'expression (6.24) se transforme en critère de résistance correspondant à la théorie de modification de la forme; pour les matières fragiles ayant $\chi = 0$, l'expression (6.24) se transforme en première théorie de résistance. Pour $0 < \chi \leqslant 1$, ce qui correspond à la majorité des matériaux de construction utilisés en pratique, la surface limite selon l'équation (6.24) se présente comme une figure également inclinée par rapport aux axes principaux dans laquelle est inscrite une pyramide hexaédrique correspondant à la théorie de Coulomb-Mohr et décrite par la formule (6.19).

La théorie représentée par le critère (6.24) s'accorde très bien avec les données expérimentales pour une grande quantité de matériaux de construction suffisamment homogènes.

Pour les matériaux ayant une structure assez hétérogène (certains produits métallocéramiques, graphites, mousse plastique, pierre fondue, etc.) on a proposé la condition

$$\chi\sigma_i + (1 - \chi)\sigma_1 A^{1-J} = \overset{0}{\sigma}_+, \tag{6.25}$$

où $J = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_i}$ est le paramètre de l'état de contrainte, A, paramètre de la structure du matériau dont la moyenne statistique pour ces matériaux est de 0,7-0,8.

La valeur précisée du paramètre A peut être déterminée à l'aide de données obtenues lors des essais de torsion

$$A = \frac{\varphi - \sqrt{3}\,\chi}{1 - \chi},$$

où $\varphi = \frac{\overset{0}{\sigma}_+}{\tau_t}$, τ_t étant la contrainte limite en torsion.

Critère de résistance de Davidenkov-Friedmann. Ce critère est basé sur l'analyse des diagrammes de l'état mécanique tracés à partir de cette idée-là que, en fonction du type de l'état de contrainte, les matériaux peuvent être détruits soit par des contraintes de traction (par arrachage) soit par des contraintes tangentielles (par cisaillement). Ceci nous amène à distinguer deux caractéristiques de résistance: dans le premier cas, résistance à l'arrachage S_{arr} constituée par la valeur des contraintes normales sur la surface de destruction, et, dans le second, résistance au cisaillement t_{cis} constituée par la valeur des contraintes tangentielles. Ces deux carac-

téristiques de la résistance S_{arr} et t_{cis} ne dépendent pas du type de l'état de contrainte. Les courbes de déformation ne dépendent pas non plus de l'état de contrainte.

La destruction du matériau par arrachage est décrite par la deuxième théorie de résistance

$$\sigma_{\acute{e}q\,II} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = S_{arr} \tag{6.26}$$

tandis que la destruction dans le second cas l'est par la troisième théorie de résistance

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = t_{cis}. \tag{6.27}$$

Le diagramme de l'état mécanique se compose de deux diagrammes (fig. 102): diagramme en coordonnées τ_{max}, $\sigma_{\acute{e}q\,II} = S_{arr}$ et diagramme τ_{max}, γ_{max}. On trace sur le diagramme les lignes limites correspondant à la limite d'écoulement en cisaillement $\tau_{\acute{e}c}$, à la résistance au cisaillement t_{cis} ainsi qu'à la résistance à l'arrachage S_{arr}. La déviation à droite de la ligne de résistance à l'arrachage, au-dessus de la limite d'écoulement, correspond à une augmentation de la résistance à l'arrachage accompagnant l'apparition de déformations résiduelles.

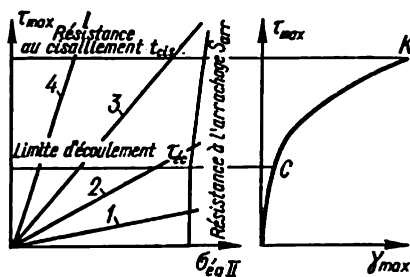


FIG. 102

Pour caractériser le type d'un état de contrainte on a introduit le *coefficient de douceur*

$$\alpha = \frac{\tau_{max}}{\sigma_{\acute{e}q\,II}}. \tag{6.28}$$

Divers états de contrainte sont représentés sur le diagramme par des rayons dont les tangentes des angles d'inclinaison sont égales à α.

En traction multilatérale ($\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) on a

$$\tau_{max} = 0; \quad \alpha = 0,$$

et le rayon coïncide avec l'axe des abscisses. En traction simple ($\sigma_1 = \sigma$; $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$) on a

$$\tau_{max} = \frac{\sigma}{2}; \quad \sigma_{éq\,II} = \sigma; \quad \alpha = 0,5.$$

En compression simple ($\sigma_1 = \sigma_2 = 0$; $\sigma_3 = -\sigma$)

$$\tau_{max} = \frac{\sigma}{2}; \quad \sigma_{éq\,II} = \mu\sigma; \quad \alpha = \frac{1}{2\mu}.$$

Posant $\mu = 0,25$ on a $\alpha = 2$.

Considérant les rayons correspondant aux divers états de contrainte d'un matériau, on peut établir approximativement le type de destruction et choisir en conséquence la théorie de résistance convenable.

Considérant sur le diagramme le rayon *1* on voit qu'il est le premier à couper la ligne de résistance à l'arrachage. Par conséquent, le matériau sera détruit par arrachage sans passer par une déformation plastique préalable. Le rayon *2* coupe d'abord la ligne d'écoulement et ensuite celle de la résistance à l'arrachage. On en conclut que pour l'état de contrainte donné c'est le déplacement plastique qui précède la destruction par arrachage. Pour l'état de contrainte caractérisé par le rayon *3*, la destruction se produit par cisaillement après une déformation plastique.

Dans le cas où le rayon coupe d'abord la ligne de résistance à l'arrachage on doit se servir de la théorie de Coulomb-Mohr, de la première ou de la deuxième théorie de résistance. Si c'est d'abord la ligne de limite d'écoulement qui est coupée, le calcul doit se faire d'après la troisième ou la quatrième théorie de résistance.

Ainsi, les diagrammes de l'état mécanique reflètent, avec un certain degré d'approximation, le type de la destruction en fonction du type de l'état de contrainte.

Notons que les rayons représentant l'état de contrainte ne sont rectilignes que jusqu'à la limite d'écoulement.

Pour conclure ce chapitre, présentons sous forme d'un tableau le résumé des théories de résistance passées en revue plus haut, ainsi que d'autres utilisées en résistance des matériaux (tabl. 12).

Tableau 12

Critères de l'état limite des matériaux isotropes (pour des sollicitations statiques)

$\sigma_{éq}$ — contraintes équivalentes; $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — contraintes principales; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ — déformations principales relatives déterminées d'après la loi de Hooke généralisée; σ_{moy} — contraintes moyennes $\left(\frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)\right)$; σ_i — intensité de la contrainte $\left(\sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_2-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_1)^2]}\right)$; $\sigma_0^+, \sigma_0^-, \tau_0$ — contraintes limites pour le matériau donné respectivement en traction uniaxiale, compression uniaxiale et cisaillement pur $\chi = \frac{\sigma_0^+}{\sigma_0^-}$; $\varphi = \frac{\sigma_0^+}{\tau_0}$; $\psi = \frac{\sigma_0^-}{\tau_0}$.

Critères	Expressions pour la contrainte équivalente $\sigma_{éq}$	Interprétation géométrique du critère dans l'espace des contraintes	Note
Critère des contraintes normales maximales (de Galilée-Leibniz, dit aussi de Clebsch-Rankine)	$\sigma_{éq} = \sigma_1$	Cube ayant le centre déplacé par rapport à l'origine des coordonnées dans le sens de la compression hydrostatique	Description satisfaisante de l'état limite des matières assez fragiles et suffisamment homogènes telles que verres, gypse et certaines céramiques
Critère des déformations linéaires maximales (de Mariotte-Grashof, dit aussi de Saint-Venant)	$\sigma_{éq} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)$	Parallélépipède isocèle obliquangle ayant l'axe de symétrie également incliné par rapport aux axes des coordonnées	En raison de sa faible précision le critère n'est presque plus utilisé dans les calculs courants

Suite

Critères	Expressions pour la contrainte équivalente $\sigma_{éq}$	Interprétation géométrique du critère dans l'espace des contraintes	Note
Critère des contraintes tangentielles maximales (de Coulomb)	$\sigma_{éq} = \sigma_1 - \sigma_3$	Prisme hectaédrique régulier également incliné par rapport aux axes des coordonnées	Description satisfaisante de l'état limite des matériaux plastiques ayant un faible taux d'écrouissage (aciers revenus) pour lesquels la localisation des déformations plastiques constitue un moment caractéristique
Critère des contraintes octaédriques tangentielles ou de l'énergie spécifique de la modification de la forme (de Huber-Mises-Hencky)	$\sigma_{éq} = \sigma_i$	Cylindre circulaire circonscrit à un prisme représentant le critère des contraintes tangentielles maximales	Bonne description de l'état limite d'une large classe des matériaux plastiques (cuivre, nickel, aluminium, aciers au carbone et aciers au chrome-nickel, etc.)
Critère de Coulomb-Mohr	$\sigma_{éq} = \sigma_1 - \chi\sigma_3$	Pyramide hectaédrique également inclinée par rapport aux axes des coordonnées	Détermination de l'état limite des matériaux suffisamment homogènes ayant une résistance différente à la traction et à la compression
Critère de Jagne-Boujinski	$\sigma_{éq} = 3(1-\chi)\sigma_{moy} + \frac{1}{\sigma_0^-}\left[\sigma_i^2 - (\varphi\psi - 3) \times \times (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)\right]$	Surface de révolution également inclinée par rapport aux axes principales. Pas d'interprétation géométrique univoque	Même usage que dans le cas du critère de Coulomb-Mohr. Pour $\sigma_0^+ = \sigma_0^-$ et $\tau_0 = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$ ce critère coïncide avec celui des contraintes tangentielles octaédriques

Critère de Balandine	$\sigma_{éq} = 3(1-\chi)\sigma_{moy} + \frac{\sigma_i^2}{\sigma_0^-}$	Paraboloïde de révolution également incliné par rapport aux axes des coordonnées	Cas particulier du critère de Jagne-Boujinski $\left(\text{pour } \tau_0 = \sqrt{\frac{\sigma_0^+ \sigma_0^-}{3}}\right)$
Critère de Botkine-Mirolioubov	$\sigma_{éq} = 3(1-\chi)\sigma_{moy} + \frac{1}{2}(1+\chi)\sigma_i$	Cône circulaire incliné également par rapport aux axes des coordonnées	La même utilisation que pour le critère de Coulomb-Mohr. Pour $\sigma_0^+ = \sigma_0^-$, ce critère coïncide avc celui des contraintes tangentielles octaédriques
Critère de Drucker-Prager	$\sigma_{éq} = \left(\frac{1+\chi}{1+\sqrt{\chi}}\right)^2 \sigma_i + 6\frac{\sqrt{\chi}-\chi}{1+\sqrt{\chi}}\sigma_{moy} - 9\left(\frac{1-\sqrt{\chi}}{1+\sqrt{\chi}}\right)^2 \frac{\sigma_{moy}^2}{\sigma_0^-}$	Paraboloïde de révolution à deux nappes, également incliné par rapport aux axes des coordonnées	Représentation satisfaisante de l'état limite des matériaux relativement plastiques pour lesquels $\chi > 0,3$
Critère de Volkov	$\sigma_{éq} = \frac{2}{\chi_S}\left[C\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)} + \beta\left(\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2} + \lambda\sigma_{moy}\right) + \frac{\sigma_1-\sigma_3}{2}\right]$	Surface limite non étudiée	Ce critère est obtenu par l'analyse du modèle d'un milieu hétérogène du point de vue microscopique dans l'hypothèse que la contrainte tangentielle critique sur la surface de glissement dépend de la contrainte normale dans ce plan et de la contrainte moyenne. χ_S, β, λ, C sont les constantes du matériau, déterminées expérimentalement pour divers états de contraintes, par

Critères	Expressions pour la contrainte équivalente $\sigma_{éq}$	Interprétation géométrique du critère dans l'espace des contraintes	Note
			exemple, pour la traction et la compression uniaxiales, le cisaillement pur et la traction uniforme à deux axes
Critère de Pissarenko-Lebedev	$\sigma_{éq} = \chi\sigma_l + (1 - \chi)\sigma_1$	Surface conique circonscrivant la pyramide de Coulomb-Mohr. Dans une section faite à l'aide d'un plan octaédrique ce sera un triangle isocèle curviligne	Description satisfaisante de l'état limite d'une large classe des matériaux de construction suffisamment homogènes. Pour $\sigma_0^+ = \sigma_0^-$, il se transforme en critère des contraintes tangentielles octaédriques. Dans le cas où $\sigma_0^+ \ll \sigma_0^-$ (matières assez fragiles) les résultats de calcul coïncident pratiquement avec ceux obtenus d'après le critère des contraintes normales maximales
Critère de Pissarenko-Lebedev	$\sigma_{éq} = \chi\sigma_l + (1 - \chi)\sigma_1 A^{1 - \frac{3\sigma_{moy}}{\sigma_l}}$	Surface limite également inclinée par rapport aux axes de coordonnées. La section par un plan octaédrique donne un triangle isocèle curviligne	Bonne description de l'état limite des matériaux hétérogènes (compositions métallocéramiques fragiles, graphite, matières plastiques thermodurcissables fragiles, divers minéraux, mousses plastiques, etc.). La valeur statistique moyenne du paramètre A est égale pour ces matériaux à 0,7—0,8

Critères	Expressions pour la contrainte équivalente $\sigma_{éq}$	Interprétation géométrique du critère dans l'espace des contraintes	Note
Critère de Kouzmenko	$\sigma_{éq} = \frac{1}{\alpha}\sigma_i,$ avec $\alpha = \frac{2(1-q)+q^2(3-2q)+1,33(1-2q)(1-q)^2}{2(1-q)+q^2(3-2q)+c(1-2q)(1-q)^2+\varkappa q^2(1-2q)}$ $\varkappa = \frac{\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1}{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2}$; $c = 1 + \frac{\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3}{\lvert\varepsilon_1\rvert+\lvert\varepsilon_2\rvert+\lvert\varepsilon_3\rvert}$.	La surface limite pour $q = 0,5$ est un cylindre circulaire correspondant au critère de l'énergie spécifique de modification de la forme. Lorsque q varie le cylindre se déforme	L'état limite est considéré comme le résultat du développement de la valeur sous-critique des déformations de cisaillement dues à l'écoulement plastique et des déformations de traction, dues à l'apparition et à l'élargissement des fissures dans le matériau déformé. Ce critère décrit d'une manière assez bonne l'état limite des matériaux dont la plasticité dépend sensiblement des conditions de déformation. Le paramètre de l'état q varie de 0 (état fragile) à 1 (état plastique)

Traction et compression

§ 39. Traction (compression) des barres; calcul tenant compte du poids propre

La contrainte dans une section quelconque d'une barre, de section constante, soumise à l'action d'une force extérieure de traction (fig. 103, *a*),

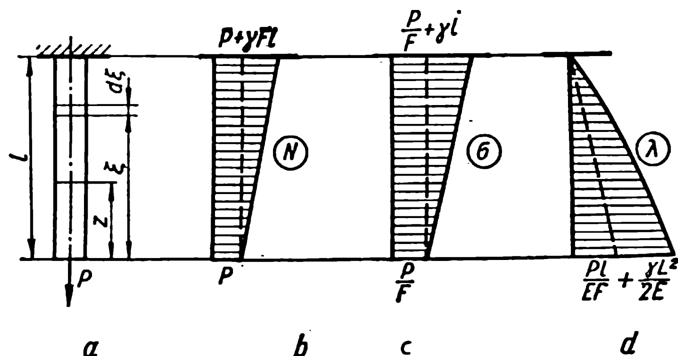


FIG. 103

compte tenu du poids propre de la barre, peut être déterminée à l'aide de l'hypothèse des sections planes d'après la formule:

$$\sigma = \frac{N(z)}{F}, \tag{7.1}$$

ici

$$N(z) = P + \gamma F z,$$

où F est l'aire de la section transversale, γ, poids spécifique. Il est évident que

$$|N(z)|_{max} = P + \gamma Fl;$$

$$\sigma_{max} = \frac{|N(z)|_{max}}{F} = \frac{P + \gamma Fl}{F} = \frac{P}{F} + \gamma l.$$

La condition de résistance est donnée par

$$\sigma_{max} = \frac{P}{F} + \gamma l \leqslant [\sigma]$$

ou encore

$$F \geqslant \frac{P}{[\sigma] - \gamma l} \cdot \tag{7.2}$$

Pour $P = 0$

$$\sigma_{max} = \gamma l,$$

tandis que la condition de résistance prend la forme

$$\gamma l \leqslant [\sigma].$$

D'où l'on tire la longueur limite ne provoquant pas la destruction de la barre sous l'effet de son propre poids

$$l_{lim} = \frac{[\sigma]}{\gamma},$$

la longueur *critique* provoquant la destruction de la barre sous l'effet de son propre poids est

$$l_{cr} = \frac{\sigma_{écr}}{\gamma}.$$

Le déplacement d'une section quelconque se trouvant à une distance z de l'extrémité libre de la barre sollicitée par une force extérieure P (fig. 103,*a*) est donné par la formule

$$\lambda(z) = \int_z^l \frac{N(\xi)}{EF}\, d\xi = \int_z^l \frac{(P + \gamma F\xi)\, d\xi}{EF} = \frac{P(l - z)}{EF} + \frac{\gamma}{2E}(l^2 - z^2). \tag{7.3}$$

Le déplacement de l'extrémité inférieure de la barre est évidemment égal à l'allongement total de la barre; il est donné par la formule:

$$\lambda(z)_{z=0} = \Delta l = \frac{Pl}{EF} + \frac{\gamma l^2}{2E}.$$

Tenant compte de ce que le poids de la barre est $Q = \gamma l F$, on a

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF} + \frac{Ql}{2EF}. \tag{7.4}$$

La fig. 103, *b*, *c*, *d* montre les diagrammes des forces axiales, des contraintes et des déplacements.

§ 40. Barre d'égale résistance en traction (compression). Barre à gradins

On appelle *barre d'égale résistance* en traction (compression) une barre qui présente dans chaque section transversale des contraintes constantes égales à la contrainte admissible. L'aire de la section transversale d'une telle barre (fig. 104) varie suivant la fonction

$$F(z) = F_0 e^{\frac{\gamma z}{[\sigma]}}, \tag{7.5}$$

où $F_0 = \frac{P}{[\sigma]}$ est la section minimale de la barre à l'endroit où la charge est appliquée; γ, poids spécifique; z, coordonnée courante; e, base des logarithmes naturels.

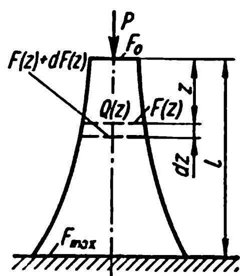


FIG. 104

Aire maximale de la section

$$F_{max} = F_0 e^{\frac{\gamma l}{[\sigma]}} = \frac{P}{[\sigma]} e^{\frac{\gamma l}{[\sigma]}}. \tag{7.6}$$

Le poids de la barre Q est déterminé à partir de la condition $P + Q = [\sigma] F_{max}$, d'où l'on tire $Q = [\sigma] F_{max} - P$, ou alors en tenant compte de (7.6) $Q = P(e^{\frac{\gamma l}{[\sigma]}} - 1)$.

Le rétrécissement relatif en compression d'une barre d'égale résistance s'exprime par $\varepsilon = \frac{[\sigma]}{E}$, tandis que le rétrécissement absolu, par

$$\Delta l = \varepsilon l = \frac{[\sigma]}{E} l. \tag{7.7}$$

Une barre de résistance égale eu égard à l'action des forces axiales représente la solution optimale du point de vue de l'utilisation rationnelle du matériau, ce qui est important lorsque la longueur de la barre est grande.

Une *barre à gradins* se compose de tronçons (gradins) ayant l'aire de la section transversale constante pour chaque tronçon isolé. Pareille barre occupe une place intermédiaire entre la barre à aire de section transversale constante et la barre d'égale résistance.

Si les longueurs des éléments sont l_1, l_2, $l_3, \ldots, l_n, \ldots l_m$ et les sections respectivement F_1, F_2, $F_3, \ldots, F_n, \ldots, F_m$, la section du n-ième tronçon (fig. 105) peut être calculée à l'aide de la formule

$$F_n = \frac{P[\sigma]^{n-1}}{([\sigma]-\gamma l_1)([\sigma]-\gamma l_2)\ldots([\sigma]-\gamma l_n)} \cdot \quad (7.8)$$

Si les longueurs des tronçons sont égales:

$$l_1 = l_2 = l_3 \ldots = l_n = \ldots = l_m = \frac{l}{m},$$

on a

$$F_n = \frac{P[\sigma]^{n-1}}{\left([\sigma]-\gamma \frac{l}{m}\right)^n} = \frac{P}{[\sigma]\left(1-\frac{\gamma}{[\sigma]}\frac{l}{m}\right)^n}, \quad (7.9)$$

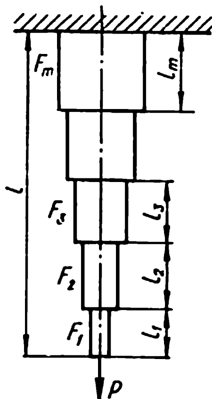


FIG. 105

où m est le nombre de gradins que compte la barre; l, la longueur de la barre.

§ 41. Structures hyperstatiques

On appelle structures hyperstatiques les structures pour lesquelles les efforts qui sollicitent leurs éléments ne peuvent pas être déterminés à l'aide des équations de la statique. On est donc amené, lorsqu'on veut résoudre les problèmes hyperstatiques, à se servir, en dehors des équations de la statique, d'équations qui rendent compte des déformations des éléments de la structure étudiée.

Toutes les structures hyperstatiques possèdent des liaisons dites surabondantes sous forme d'ancrages, de tiges ou d'autres éléments. Ces liaisons sont dites surabondantes parce qu'elles ne sont pas nécessaires pour assurer l'équilibre de la structure ou son invariabilité géométrique, leur seul but étant de rendre la structure plus résistante et plus rigide. Le nombre d'inconnues supplémentaires ou le degré d'hyperstatisme du

système est défini par la différence entre le nombre d'inconnues à déterminer et le nombre d'équations de la statique.

Si le système possède une seule inconnue surabondante on dit qu'il a un degré d'hyperstatisme; s'il a deux inconnues surabondantes, on l'appelle système à deux degrés d'hyperstatisme, etc. Les structures de la fig. 106, *a*, *b*, *d*, *e*, *f* possèdent un degré d'hyperstatisme; la structure de la fig. 106, *c* possède deux degrés d'hyperstatisme.

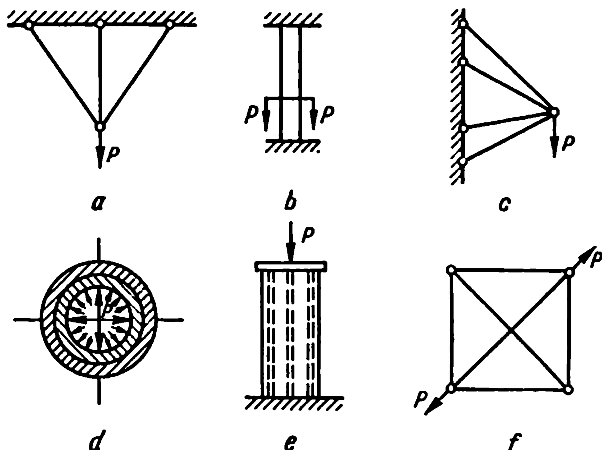


FIG. 106

La solution des problèmes hyperstatiques se fait en quatre étapes.

1. *Aspect statique du problème*. On écrit l'équation d'équilibre des éléments sectionnés de la structure dans lesquels des efforts inconnus sont présents.

2. *Aspect géométrique du problème*. On établit le rapport entre les déformations de divers éléments de la structure à partir de la condition de compatibilité des déformations. Les équations obtenues sont appelées *équations de compatibilité des déformations*.

3. *Aspect physique du problème*. Dans les équations de compatibilité, en se basant sur la loi de Hooke on exprime les déformations des éléments

de la structure par l'intermédiaire des efforts inconnus agissant dans ces éléments.

4. *Synthèse*. La solution simultanée des équations obtenues fournit les valeurs des efforts inconnus.

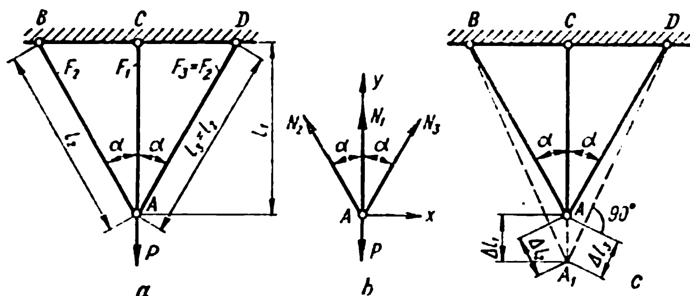


FIG. 107

Nous donnons ci-bas un exemple de calcul d'un système de suspension à trois tiges, à un degré d'hyperstatisme (fig. 107, *a*).

1. Aspect statique du problème (fig. 107, *b*)

$$\Sigma X = N_3 \sin \alpha - N_2 \sin \alpha = 0; \tag{7.10}$$

$$\Sigma Y = N_1 + N_2 \cos \alpha + N_3 \cos \alpha - P = 0. \tag{7.11}$$

D'après (7.10) il vient

$$N_3 = N_2, \tag{7.12}$$

et d'après (7.11)

$$N_1 + 2N_2 \cos \alpha = P. \tag{7.13}$$

2. Aspect géométrique du problème (fig. 107, *c*)

$$\Delta l_3 = \Delta l_2 = \Delta l_1 \cos \alpha. \tag{7.14}$$

3. Aspect physique du problème

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{E_1 F_1}; \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{E_2 F_2}. \tag{7.15}$$

4. Synthèse. Introduisant (7.15) dans (7.14) on obtient

$$\frac{N_2 l_2}{E_2 F_2} = \frac{N_1 l_1}{E_1 F_1} \cos \alpha. \tag{7.16}$$

Résolvant ensemble les équations (7.16) et (7.13) on obtient:

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \frac{P}{1 + 2\dfrac{c_2}{c_1}\cos^2\alpha}; \\ N_2 &= \frac{P\dfrac{c_2}{c_1}\cos\alpha}{1 + 2\dfrac{c_2}{c_1}\cos^2\alpha}, \end{aligned}\right\} \quad (7.17$$

où

$$c_1 = \frac{E_1 F_1}{l_1}; \quad c_2 = \frac{E_2 F_2}{l_2}.$$

Les efforts N_1 et N_2 dépendent donc du rapport des rigidités des tiges. Par conséquent, quand on effectue des calculs d'élaboration d'un projet, on peut évaluer ces efforts en fixant un certain rapport entre les rigidités des tiges. Et c'est là une des particularités du calcul des systèmes hyperstatiques de barres. On trouvera dans le tableau 13 les formules prêtes pour la détermination des efforts dans certains systèmes de barres les plus simples.

§ 42. Calcul des fils flexibles

On appelle fil flexible une tige qui ne résiste qu'à la traction. Des six composantes des forces intérieures pour les fils flexibles, seule la force axiale n'est pas nulle.

On classe dans cette catégorie fils électriques et télégraphiques, chaînes des ponts suspendus, câbles de téléfériques, etc. Les points de suspension des fils flexibles peuvent se trouver soit sur un même niveau soit sur des niveaux différents (fig. 108, *a*, *b*).

C'est son poids propre d'intensité $q_f = \gamma F$ qui constitue la charge principale agissant sur le fil flexible fait en un matériau ayant pour poids spécifique γ et pour aire de la section transversale F. Cependant dans un fil flexible la charge peut être engendrée non seulement par son propre poids mais aussi par d'autres facteurs, par exemple la pression du vent,

le poids de la glace coiffant éventuellement le câble. On suppose également que ces charges sont distribuées uniformément sur toute la longueur du fil. On désignera les intensités de ces charges respectivement par q_v et q_g.

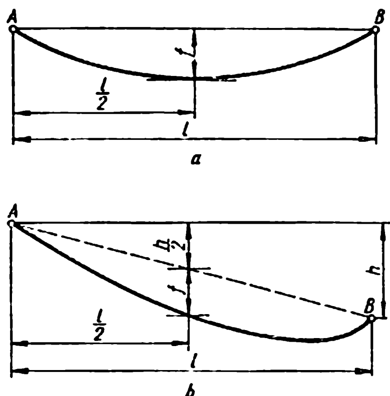


FIG. 108

Selon les conditions climatiques de la région on suppose l'épaisseur de la glace égale à 0,5-2,5 cm.

La pression du vent dans le plan horizontal est

$$q_v = pd$$

ou bien

$$q_v = k\alpha\, q_{vt}\, d, \tag{7.18}$$

p étant la pression, d, le diamètre du fil coiffé de glace, $k = 1{,}2$, le coefficient aérodynamique, $\alpha = 0{,}85$, le coefficient de variation de la pression du vent, q_{vt} la vitesse de la poussée. Exprimant cette dernière en fonction de la vitesse du vent en mètres/s et d en mètres, on obtient la valeur de l'intensité de la charge de vent

$$q_v = 636 \cdot 10^{-4} v^2 d \text{ [kgf/m]}. \tag{7.19}$$

L'intensité totale de la charge sollicitant le fil flexible peut être déterminée par la formule

$$q = \sqrt{(q_f + q_g)^2 + q_v^2}. \tag{7.20}$$

Le plan sur lequel agit la charge totale et qui coïncide avec le plan de la flèche du fil ne sera pas vertical.

Le fil flexible se rapporte à la catégorie des systèmes à un degré d'hyperstatisme.

Voici les principales formules utilisées, dans le cas général, dans le calcul du fil flexible lorsque les points de suspension du fil se situent à des niveaux différents (fig. 109, *a*).

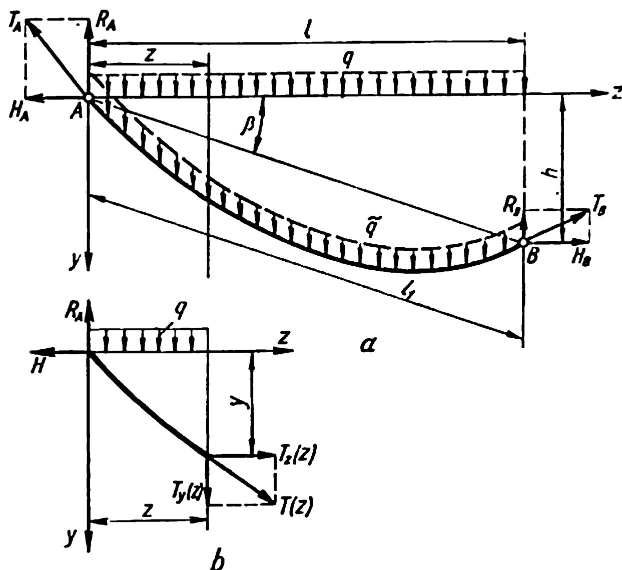


FIG. 109

D'habitude, on remplace la charge distribuée $\tilde{q}$ qui agit sur le fil par une charge statiquement équivalente q répartie le long d'une travée de longueur l:

$$q = \tilde{q}\,\frac{l_1}{l} = \frac{\tilde{q}}{\cos\beta}\,.$$

En supposant le fil idéalement flexible on peut prendre les efforts de traction dans une section quelconque du fil pour tangentes à la courbe que forme le fil suspendu. Dans les points de fixation A et B, les efforts agissant sur le fil sont égaux aux réactions d'appuis T_A et T_B. Considérant

l'aspect statique du problème, on aura, en décomposant les réactions d'appuis en composantes verticales (R) et horizontales (H):

$$\Sigma Z = -H_A + H_B = 0;$$
$$\Sigma Y = -R_A - R_B + ql = 0;$$
$$\Sigma M_B = -H_A h + R_A \cdot l - \frac{ql^2}{2} = 0,$$

d'où l'on tire

$$H_A = H_B = H; \tag{7.21}$$
$$R_A = \frac{ql}{2} + H\frac{h}{l}; \tag{7.22}$$
$$R_B = \frac{ql}{2} - H\frac{h}{l}. \tag{7.23}$$

Considérant les conditions d'équilibre d'un tronçon du fil (fig. 109, *b* on trouve

$$\Sigma Z = -H + T_z(z) = 0;$$
$$\Sigma Y = -R_A + qz + T_y(z) = 0,$$

d'où

$$T_z(z) = H; \tag{7.24}$$
$$T_y(z) = H\frac{h}{l} + q\left(\frac{l}{2} - z\right), \tag{7.25}$$

H étant la composante horizontale de l'effort, la même pour toutes les sections et qu'on appelle *tension du fil.*

L'effort de traction total dans une section quelconque du fil est

$$T(z) = \sqrt{T_z^2(z) + T_y^2(z)} = \sqrt{H^2 + \left[H\frac{h}{l} + q\left(\frac{l}{2} - z\right)\right]^2} \tag{7.26}$$

et il sera maximal pour $z = 0$, c'est-à-dire

$$T_{max} = \sqrt{H^2 + \left(\frac{ql}{2} + H\frac{h}{l}\right)^2}. \tag{7.27}$$

Pour les fils à faible flèche (ceux dont la longueur réelle ne diffère pas de plus de 10% de la longueur de la travée) la différence entre T_{max} et H

n'est pas grande. Cela permet d'évaluer, avec suffisamment de précision pour la pratique, la résistance du fil à partir de la tension H.

L'équation de la courbe de flèche du fil peut être obtenue si l'on égale à zéro le moment fléchissant supposant que la souplesse du fil est idéale:

$$M(z) = R_A z - Hy - \frac{qz^2}{2} = 0,$$

d'où l'on tire en vertu de (7.22)

$$y = \left(\frac{ql}{2H} + \frac{h}{l}\right) z - \frac{qz^2}{2H}, \tag{7.28}$$

autrement dit, la courbe de flèche du fil a pour expression analytique celle d'une parabole.

Notons que si l'on veut obtenir une solution exacte et qu'on considère à cet effet la charge uniformément distribuée le long du fil, et non le long de la travée, la courbe de flèche sera une *chaînette*. Le deuxième membre de l'équation (7.28) est le premier terme du développement de l'équation d'une chaînette en série de MacLaurin suivant les puissances de z. L'usage de la formule approchée (7.28) permet d'obtenir des résultats pratiques entièrement satisfaisants.

Déterminons la position du point inférieur du fil suspendu dont les coordonnées sont $z = a$; $y = f'$ (fig. 110, *a*) en annulant la dérivée du deuxième membre de l'équation (7.28):

$$\frac{dy}{dz} = \frac{ql}{2H} + \frac{h}{l} - \frac{qz}{H} = 0,$$

d'où

$$z = a = \frac{l}{2} + \frac{Hh}{ql}. \tag{7.29}$$

Introduisant (7.29) dans (7.28) trouvons la flèche maximale du fil

$$y_{max} = f' = \frac{ql^2}{8H} + \frac{Hh^2}{2ql^2} + \frac{h}{2}. \tag{7.30}$$

On distingue trois cas caractéristiques de la position du point inférieur du fil en suspension.

1. Le point inférieur se trouve dans les limites de la travée, autrement dit $a < l$ (fig. 110, *a*). D'après (7.29) cela a lieu lorsque

$$H < \frac{ql^2}{2h}. \tag{7.31}$$

2. Le point inférieur du fil se trouve en dehors de la travée. On a alors $a > l$ (fig. 110, *b*). Cela a lieu à condition que

$$H > \frac{ql^2}{2h} \cdot \tag{7.32}$$

3. Le point inférieur de la flèche coïncide avec celui de la suspension; en d'autres mots $a = l$ (fig. 110, *c*). La condition à remplir dans ce cas est la suivante

$$H = \frac{ql^2}{2h} \cdot \tag{7.33}$$

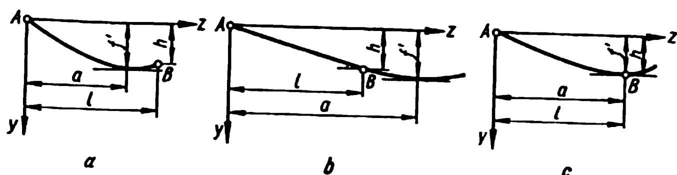


FIG. 110

Dans les trois cas ci-dessus les coordonnées a et f' du point inférieur sont déterminées à l'aide des formules (7.29) et (7.30).

Trouvons le rapport entre la tension H et la *flèche* f. Introduisant dans (7.28) $z = \frac{l}{2}$ et $y = \frac{h}{2} + f$ (fig. 111) on a:

$$f = \frac{ql^2}{8H} \tag{7.34}$$

ou bien

$$H = \frac{ql^2}{8f} \cdot \tag{7.35}$$

La tension du fil exprimée à l'aide de la flèche maximale f' sera obtenue en résolvant l'équation quadratique (7.30) par rapport à H:

$$H = \frac{ql^2}{h^2}\left[f' - \frac{h}{2} \pm \sqrt{f'(f' - h)}\right].$$

Si le point inférieur de la flèche se trouve dans les limites de la travée on affecte la racine du signe «moins», s'il est en dehors de la travée, on l'affecte du signe «plus».

Considérant l'aspect géométrique du problème, établissons le rapport entre la longueur du fil suspendu S, la travée l et la flèche f. La longueur d'un élément du fil peut être exprimée, compte tenu de la faible flèche, par la relation suivante:

$$dS = \sqrt{dz^2 + dy^2} = \left[1 + \left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dz \cong \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dz}\right)^2\right] dz. \quad (7.36)$$

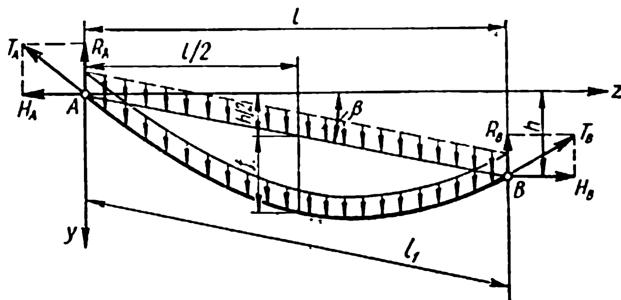


FIG. 111

Introduisant la dérivée de l'expression (7.28) $\frac{dy}{dz}$ dans (7.36) et intégrant pour toute la longueur, il vient

$$S = l + \frac{q^2 l^3}{24H^2} + \frac{h^2}{2l} \quad (7.37)$$

ou, si l'on tient compte de (7.35),

$$S = l + \frac{8}{3}\frac{f^2}{l} + \frac{h^2}{2l}. \quad (7.38)$$

L'allongement du fil suspendu, dû à la traction, est

$$\Delta S = S - L = l + \frac{q^2 l^3}{24H^2} + \frac{h^2}{2l} - L, \quad (7.39)$$

où L est la longueur du fil non suspendu.

Passant à l'aspect physique du problème, on détermine la relation entre la variation de la longueur du fil, d'une part, et la force de traction et la température, de l'autre.

Si l'on pose pour les fils en pente douce la traction de calcul H et qu'on substitue à la longueur du fil la distance entre les points de suspension l_1, on peut déterminer l'allongement du fil à l'aide de la formule

$$\Delta S_H = \frac{Hl_1}{EF} = \frac{Hl}{EF\cos\beta} . \tag{7.40}$$

L'allongement thermique est donné par la formule

$$\Delta S_t = \alpha l_1(t - t_0) = \frac{\alpha l}{\cos\beta}(t - t_0), \tag{7.40a}$$

où α est le coefficient de dilatation linéaire du matériau dont est fait le fil; t_0, température au moment où l'on suspend le fil, t, température pour laquelle on fait des calculs.

La variation totale de la longueur du fil est

$$\Delta S = \Delta S_H + \Delta S_t = \frac{Hl}{EF\cos\beta} + \frac{\alpha l}{\cos\beta}(t - t_0). \tag{7.41}$$

Egalant les deuxièmes membres de (7.39) et de (7.41) qui expriment une même valeur de l'allongement du fil suspendu, on trouve

$$L = l + \frac{q^2l^3}{24H^2} + \frac{h^2}{2l} - \frac{Hl}{EF\cos\beta} - \frac{\alpha l}{\cos\beta}(t - t_0). \tag{7.42}$$

La résolution simultanée des deux équations (7.35) et (7.42) permet de déterminer la tension du fil H et la flèche f. Une fois déterminée la valeur de H à l'aide de la formule (7.27) on peut trouver T_{max} et connaissant cette dernière grandeur, on peut vérifier la résistance à l'aide de la formule

$$\sigma = \frac{T_{max}}{F} \approx \frac{H}{F} \leqslant [\sigma], \tag{7.43}$$

ou bien en tenant compte de (7.35)

$$\sigma = \frac{ql^2}{8fF} \leqslant [\sigma]. \tag{7.44}$$

Introduisant la notion de charge spécifique

$$\tilde{\gamma} = \frac{q}{F},$$

l'équation de la résistance (7.44) prend la forme

$$\sigma = \frac{\tilde{\gamma} l^2}{8f} \leqslant [\sigma]. \tag{7.45}$$

Notons que lors du calcul des fils électriques la section du fil F se détermine à partir des considérations relevant de l'électricité pour, ensuite, faire un calcul de vérification à l'aide de la formule (7.45).

Le cas particulier de calcul d'un fil quand les points de suspension se trouvent à un même niveau, c'est-à-dire lorsque

$$\cos\beta = \cos 0 = 1; \quad h = 0; \quad R_A = R_B = \frac{ql}{2},$$

présente un grand intérêt pratique. Tout comme dans le cas général, les formules (7.34) et (7.35) restent valables; quant à l'équation de la compatibilité des déformations (7.42), elle s'écrira

$$L = l + \frac{q^2 l^3}{24H^2} - \frac{Hl}{EF} - \alpha l(t - t_0). \tag{7.46}$$

En pratique on est souvent obligé de tenir compte de l'influence des variations de la température et de la charge sur la tension et la flèche du fil. Supposons qu'on a à déterminer la variation de la tension et celle de la flèche pour l'état n caractérisé par les paramètres t_n, q_n, f_n, $H_n = \dfrac{q_n l^2}{8f_n}$ eu égard à l'état initial m qui avait cours au moment de la suspension du fil et qui était caractérisé par les paramètres t_m, q_m, f_m, $H_m = \dfrac{q_m l^2}{8f_m}$.

La solution du problème posé peut être obtenue en exprimant la longueur L du fil, pour l'état m et n d'après (7.46):

$$L = l + \frac{q_m^2 l^3}{24H_m^2} - \frac{H_m l}{EF} - \alpha l(t_m - t_0);$$

$$L = l + \frac{q_n^2 l^3}{24H_n^2} - \frac{H_n l}{EF} - \alpha l(t_n - t_0).$$

Egalant les deuxièmes membres de ces équations et introduisant la substitution

$$\frac{q_m}{F} = \gamma_m; \quad \frac{q_n}{F} = \gamma_n; \quad \sigma_m = \frac{H_m}{F}; \quad \sigma_n = \frac{H_n}{F},$$

on obtient finalement

$$\sigma_n - \frac{\gamma_n^2 l^2 E}{24\sigma_n^2} = \sigma_m - \frac{\gamma_m^2 l^2 E}{24\sigma_m^2} + \alpha E(t_m - t_n). \qquad (7.47)$$

La relation (7.47) est parfois appelée *équation de l'état du fil.* Elle peut être écrite sous la forme suivante

$$\sigma_n^3 - \left[\sigma_m - \frac{\gamma_m^2 l^2 E}{24\sigma_m^2} - \alpha(t_n - t_m)\right]\sigma_n^2 - \frac{\gamma_n^2 l^2 E}{24} = 0, \qquad (7.48)$$

ou bien en tenant compte de ce que

$$\sigma_m = \frac{\gamma_m l^2}{8f_m}; \quad \sigma_n = \frac{\gamma_n l^2}{8f_n},$$

sous la forme

$$f_n^3 - \left[f_m^2 + \frac{3}{8}\alpha l^2(t_n - t_m) - \frac{3}{64}\frac{\gamma_m l^4}{Ef_m}\right]f_n - \frac{3}{64}\frac{\gamma_n l^4}{E} = 0. \quad (7.49)$$

Si les niveaux auxquels se situent les points de suspension du fil diffèrent, l'équation de l'état du fil s'écrira

$$f_n^3 - \left[f_m^2 + \frac{3}{8}\alpha l^2\frac{(t_n - t_m)}{\cos\beta} - \frac{3}{64}\frac{\gamma_m l^4}{Ef_m\cos\beta}\right]f_n - \frac{3}{64}\frac{\gamma_n l^4}{E\cos\beta} = 0. \qquad (7.50)$$

C'est la méthode graphique qui est la meilleure façon de résoudre l'équation cubique (7.49) ou (7.50) par rapport à f_n. Ainsi, en récrivant cette équation sous la forme $f_n^3 - af_n - b = 0$ ou $f_n^3 = af_n + b$, où a et b sont des grandeurs connues, on trace les courbes

$$y = f_n^3 \quad \text{et} \quad y = af_n + b.$$

L'abscisse du point d'intersection de la parabole cubique ainsi obtenue avec la ligne droite donne la valeur de la flèche recherchée f_n (fig. 112).

Lors du calcul de la résistance d'un fil il convient de tenir compte de la combinaison éventuelle des conditions les plus défavorables, celle du vent et du dépôt de glace, qui provoquent les tensions maximales dans le fil.

Il résulte de l'équation d'état (7.47) que lorsque les flèches sont faibles, i.e. $l \to 0$

$$\sigma_n = \sigma_m + \alpha E(t_m - t_n),$$

autrement dit, la variation de la tension dépend principalement des variations de la température.

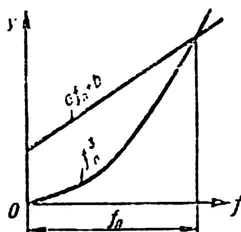


FIG. 112

Dans le cas de travées importantes, avec $l \to \infty$,

$$\sigma_n = \frac{\gamma_n}{\gamma_m}\sigma_m,$$

autrement dit, la tension dépend principalement de la charge.

On appelle longueur critique du fil l_{cr} une longueur telle que la tension dans le fil est la même pour les deux états dangereux (c'est-à-dire la charge maximale pour l'état n et la température minimale pour l'état m), de sorte que

$$\sigma_n = \sigma_m = [\sigma]. \qquad (7.51)$$

Supposant que t_n correspond à la température du dépôt de glace (généralement $t_{gl} = -5°C$) pour laquelle $\gamma_n = \gamma_{max}$, alors que t_m correspond à la température la plus basse, t_{min}, pour laquelle seul le poids propre γ agit sur le fil, c'est-à-dire $\gamma_m = \gamma_1$, on trouve la longueur critique l_{cr} du fil à l'aide de (7.48) tenant compte de (7.51)

$$l_{cr} = [\sigma]\sqrt{\frac{24\alpha(t_{gl} - t_{min})}{\gamma_{max}^2 - \gamma_1^2}}.$$

Comparant la travée calculée l avec la travée critique l_{cr} on voit que pour $l < l_{cr}$ la tension maximale est atteinte pour la température la plus basse, pour $l > l_{cr}$ la tension maximale l'est lorsque la charge est maximale.

Efforts dans les systèmes de barres élémentaires

E — module d'élasticité du matériau dont est faite la barre;
F — aire de la section transversale de la barre

Schéma du système de barres	Efforts longitudinaux dans les barres
	$N_1 = -P\dfrac{\cos(\alpha_2+\alpha_P)}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}$; $N_2 = P\dfrac{\cos(\alpha_1-\alpha_P)}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}$
	$N_1 = -P\dfrac{\cos(\alpha_2+\alpha_P)}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}$; $N_2 = P\dfrac{\cos(\alpha_1-\alpha_P)}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}$; $N_3 = -P\dfrac{\cos(\alpha_1-\alpha_P)}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}\sin\alpha_2$
	$N_1 = N_3 = \dfrac{P\dfrac{E_1F_1}{E_2F_2}\cos^3\alpha}{1+2\dfrac{E_1F_1}{E_2F_2}\cos^3\alpha}$; $N_2 = \dfrac{P}{1+2\dfrac{E_1F_1}{E_2F_2}\cos^3\alpha}$

Suite

Schéma du système de barres	Efforts longitudinaux dans les barres
	$$N_i = P \frac{E_iF_i \cos^3 \alpha_i}{2 \sum_{i=1}^{n} E_iF_i \cos^3 \alpha_i}$$
$E_1 = E_2 = E_3$	$$N_1 = P \frac{2a_1a_2 + a_1^2\left(1 + \frac{E_2F_2}{E_3F_3}\right) + a_2^2 - aa_2 - \to \; \to - aa_1\left(1 + \frac{E_2F_2}{E_3F_3}\right)}{2a_1a_2 + a_1^2\left(1 + \frac{E_2F_2}{E_3F_3}\right) + a_2^2\left(1 + \frac{E_2F_2}{E_1F_1}\right)};$$ $$N_2 = P \frac{a_1a_2 \frac{E_2F_2}{E_1F_1} + a_2^2 \frac{E_2F_2}{E_1F_1} - aa_2 \frac{E_2F_2}{E_1F_1} + aa_1 \frac{E_2F_2}{E_3F_3}}{2a_1a_2 + a_1^2\left(1 + \frac{E_2F_2}{E_3F_3}\right) + a_2^2\left(1 + \frac{E_2F_2}{E_1F_1}\right)};$$ $$N_3 = P \frac{- a_1a_2 \frac{E_3F_3}{E_1F_1} + aa_2\left(1 + \frac{E_3F_3}{E_1F_1}\right) + aa_1}{2a_1a_2 + a_1^2\left(1 + \frac{E_2F_2}{E_3F_3}\right) + a_2^2\left(1 + \frac{E_2F_2}{E_1F_1}\right)}$$

CHAPITRE 8

Cisaillement

§ 43. Cisaillement. Calcul de glissement

La déformation de cisaillement est caractérisée par le fait que des six composantes du vecteur principal de la force R et du moment principal M seule la force tranchante Q_y (ou Q_x) n'est pas nulle, alors que toutes les autres sont égales à zéro.

En tant qu'exemple de cisaillement ou de glissement on peut citer la déformation d'une bande de métal au moment de son découpage aux cisailles (fig. 113, *a*, *b*). En pratique, il est difficile d'obtenir la déformation de cisaillement dans sa forme pure étant donné qu'elle est ordinairement accompagnée d'autres déformations, le plus souvent de flexion.

Dans le cas d'une charge agissant comme l'indique le schéma représenté sur la figure on a pour le segment bc la force tranchante:

$$Q = P, \qquad (8.1)$$

et le rapport entre les contraintes tangentielles τ et la force tranchante sera

$$\int_F \tau dF = Q. \qquad (8.2)$$

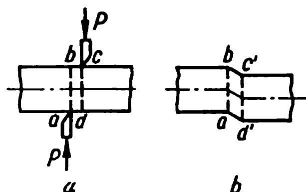


FIG. 113

Supposant que les contraintes tangentielles τ sont uniformément distribuées sur le plan de la section transversale F (fig. 114) on a d'après (8.2):

$$\tau = \frac{Q}{F},$$

ou bien en tenant compte de (8.1)

$$\tau = \frac{P}{F}. \tag{8.3}$$

L'hypothèse de l'uniformité de distribution des contraintes tangentielles sur le plan de la section est assez conventionnelle car d'après la loi

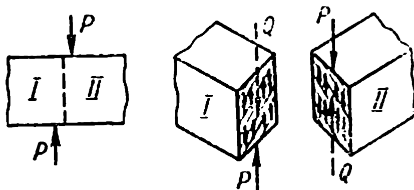


FIG. 114

de la parité les contraintes tangentielles sont nulles au voisinage des faces supérieure et inférieure. Cependant, cette hypothèse est largement adoptée dans la pratique pour le calcul des boulons, des joints rivetés et soudés, des clavettes, etc.

§ 44. Cisaillement pur

Le cas de l'état de contrainte plan pour lequel sur les quatre faces d'un élément délimité seules les contraintes tangentielles sont présentes (fig. 115) est appelé *cisaillement pur*. Trouvons la valeur des contraintes principales pour le schéma des charges reproduit sur la fig. 115, *a*. Pour ce faire, on construit d'abord le cercle de Mohr (fig. 115, *b*) tenant compte de ce que dans ce cas $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 0$; $\tau_\alpha = -\tau$; $\tau_\beta = \tau$. De ce cercle on tire

$$\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau. \tag{8.4}$$

Pour les contraintes moyennes sur les plans principaux qui coïncident avec la face d'avant, on a $\sigma_2 = 0$. Les plans principaux sont inclinés par rapport aux faces de l'élément sous un angle de 45°. Sous l'effet des contraintes tangentielles un élément *abcd* de forme carrée ayant pour côté *a* va se transformer en losange *a'b'c'd'*. La déformation de cisaillement pur consiste en la modification des angles droits. Si l'on se représente

a titre d'illustration l'élément soumis au cisaillement pur comme étant encastré à l'un de ses côtés (fig. 116) on aura

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\Delta s}{a}.$$

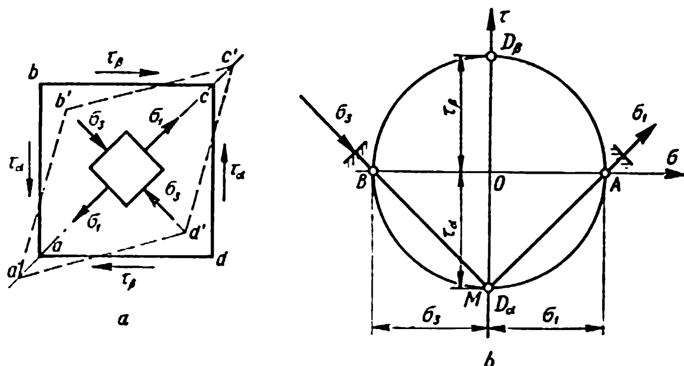


FIG. 115

Vu la faible valeur de l'angle on peut poser $\operatorname{tg}\gamma \approx \gamma$; le déplacement relatif est alors:

$$\gamma = \frac{\Delta s}{a}. \tag{8.5}$$

La dépendance entre la charge et la déformation de cisaillement est montrée sur le diagramme de cisaillement (fig. 117) qu'on obtient de la même manière que le diagramme de contraintes établi pour des essais à la traction.

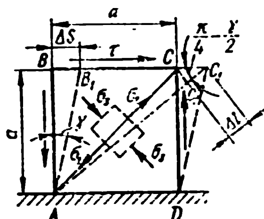


FIG. 116

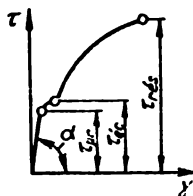


FIG. 117

Il est évident que dans les limites où la dépendance entre γ et τ reste linéaire la relation suivante est valable:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} \quad \text{ou} \quad \tau = G\gamma, \tag{8.6}$$

où G est le coefficient de proportionnalité qu'on appelle *module d'élasticité en cisaillement* ou *module d'élasticité de second ordre*; ce coefficient a pour dimension kgf/cm² (ou kgf/mm²). Les formules (8.6) expriment la loi de Hooke pour le cisaillement qui est représentée en coordonnées relatives. Il résulte de la fig. 116 que l'allongement Δl de la diagonale $AC = l = a\sqrt{2}$ est

$$\Delta l = CC_1 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) \approx CC_1 \cos 45^\circ = \frac{\Delta s}{\sqrt{2}},$$

tandis que l'allongement linéaire relatif de la diagonale (suivant l'axe σ_1) est

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\Delta s}{2a} = \frac{\gamma}{2}$$

ou bien, d'après (8.6),

$$\varepsilon = \frac{\tau}{2G}. \tag{8.7}$$

Appliquant la loi de Hooke généralisée au cisaillement pur (fig. 116) on a

$$\varepsilon = \varepsilon_1 = \frac{1+\mu}{E}\,\tau. \tag{8.8}$$

Egalant les deuxièmes membres des égalités (8.7) et (8.8) il vient

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \tag{8.9}$$

Pour $\mu = \frac{1}{3} \div \frac{1}{4}$, $G = (0{,}375 - 0{,}4)\,E$.

Utilisant (8.5) exprimons le déplacement absolu Δs par $Q = F\tau$:

$$\Delta s = \gamma a = \frac{\tau}{G}\,a = \frac{Qa}{GF},$$

c'est-à-dire

$$\Delta s = \frac{Qa}{GF}. \qquad (8.10)$$

La formule (8.10) donne, *en unités absolues, la loi de Hooke pour le cisaillement.*

L'énergie potentielle de déformation en cisaillement s'obtient de la formule

$$U = \frac{\Delta s Q}{2} = \frac{Q^2 a}{2GF}.$$

L'énergie potentielle spécifique de déformation en cisaillement est

$$u = \frac{U}{V} = \frac{Q^2 a}{2GFaF} = \frac{\tau^2}{2G}, \qquad (8.11)$$

où V est le volume de l'élément.

Les contraintes principales qui apparaissent en cisaillement pur (fig. 115, *a*) sont égales à

$$\sigma_1 = \tau; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -\tau.$$

Les *conditions de résistance en cisaillement pur* s'écrivent

d'après la première théorie de résistance

$$\sigma_1 = \tau \leqslant [\sigma]; \qquad (8.12)$$

d'après la deuxième théorie de résistance

$$\sigma_1 - \mu\sigma_3 \leqslant [\sigma].$$

Introduisant les valeurs des contraintes principales, il vient

$$\tau \leqslant \frac{[\sigma]}{1+\mu} = [\tau]. \qquad (8.13)$$

Pour les métaux, $\mu = 0{,}25\text{-}0{,}42$, ce qui donne $[\tau] = (0{,}7\text{-}0{,}8)\,[\sigma]$. D'après la troisième théorie de résistance on a

$$\sigma_1 - \sigma_3 \leqslant [\sigma],$$

d'où

$$\tau \leqslant \frac{[\sigma]}{2} = [\tau] \qquad (8.14)$$

et la contrainte admissible est

$$[\tau] = 0,5\,[\sigma].$$

D'après la quatrième théorie de résistance

$$\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_3} < [\sigma];$$

$$\tau < \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}},$$

d'où il résulte

$$[\tau] = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}} \approx 0,6\,[\sigma].$$

Notons que lors du calcul des pièces en matériaux plastiques (boulons, rivets, clavettes, etc.) c'est la dernière formule qui convient le mieux.

§ 45. Quelques exemples de calculs de cisaillement

Calcul des joints boulonnés ou rivetés. Quand on calcule au cisaillement les boulons (fig. 118, *a*), on suppose que la distribution des forces extérieures agissant sur le boulon, d'une part, et celle des contraintes tangentielles dans la section soumise au cisaillement, de l'autre, se réalisent d'après le schéma reproduit sur la fig. 118, *b*.

La condition de résistance du boulon au cisaillement peut s'écrire sous la forme

$$\tau_{max} = \frac{Q}{F} \leqslant [\tau]$$

ou bien, tenant compte de ce que $Q = P$ (fig. 118, *c*) et $F = \frac{\pi d^2}{4}$,

$$\tau_{max} = \frac{4P}{\pi d^2} \leqslant [\tau].$$

Ceci nous permet d'évaluer le diamètre du boulon

$$d = \sqrt{\frac{4P}{\pi[\tau]}}. \qquad (8.15)$$

Lors du calcul des assemblages boulonnés ou rivetés il convient de tenir compte de ce que la charge appliquée aux éléments des joints provoque, en dehors du cisaillement, le *froissement* des surfaces en contact.

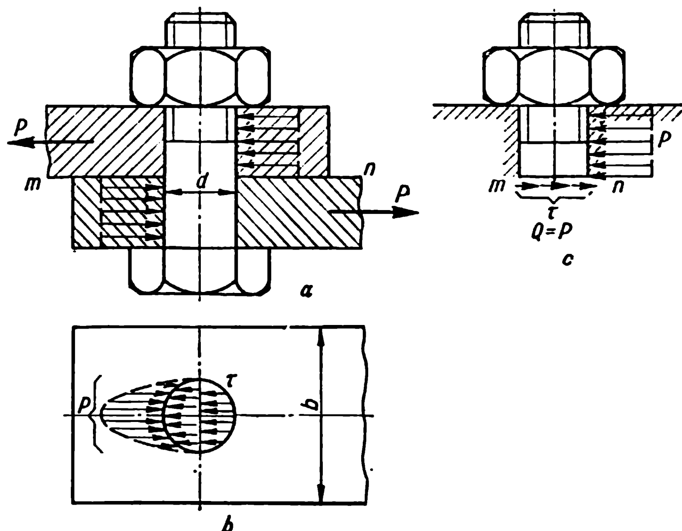


FIG. 118

On entend par froissement la déformation plastique qui se produit sur la surface de contact.

Le calcul de froissement se fait d'une manière approximative étant donné que la loi de la distribution de pression sur la surface de contact est mal connue. D'habitude, on part de l'hypothèse d'une distribution non linéaire des pressions (fig. 119, *a*) supposant que la pression est proportionnelle à la projection dF_1 de l'aire dF de la surface cylindrique sur le plan diamétral

$$\frac{q}{q_1} = \frac{dF}{dF_1}.$$

La contrainte maximale de froissement pour la surface cylindrique s'exprime par la formule

$$\sigma_{fr} = \frac{P}{F_{fr}} = \frac{P}{\delta d}.$$

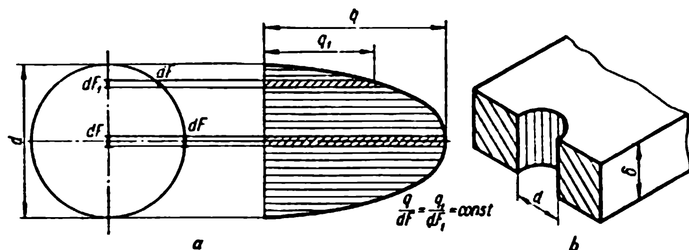


FIG. 119

où $F_{fr} = \delta d$ est l'aire de projection de la surface de contact sur le plan diamétral (fig. 119, *b*).

La condition de résistance au froissement a la forme suivante

$$\sigma_{fr} = \frac{P}{\delta d} < [\sigma_{fr}]. \tag{8.16}$$

La contrainte admissible pour le froissement déterminée expérimentalement est posée égale à

$$[\sigma_{fr}] = (2 - 2,5)\,[\sigma_-].$$

D'après (8.16) on peut évaluer le diamètre cherché du boulon

$$d \geqslant \frac{P}{\delta [\sigma_{fr}]}. \tag{8.17}$$

Des deux valeurs des diamètres déterminées à l'aide des formules (8.15) et (8.17) on prend la plus grande et on l'arrondit à la valeur normalisée.

Etant donné que les boulons et les rivets affaiblissent les tôles à joindre, celles-ci sont soumises à l'essai à la rupture dans les sections les plus affaiblies. Dans le cas d'un seul boulon utilisé, la condition de résistance est donnée par la formule

$$\sigma = \frac{P}{F_{min}} = \frac{P}{\delta(b - d)} \leqslant [\sigma_+],$$

où *b* est la largeur de la tôle.

Examinons le comportement d'un assemblage riveté dont les rivets sont soumis à un cisaillement double (fig. 120).

Supposant que les efforts de traction N sont uniformément répartis entre tous les rivets et fixant arbitrairement le diamètre du rivet d et

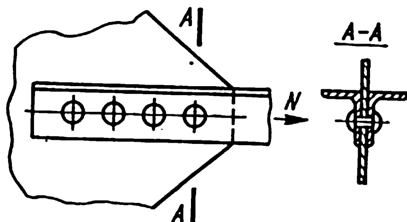


FIG. 120

l'épaisseur de la tôle δ nous trouverons le nombre de rivets i à partir de la condition de résistance au cisaillement

$$\tau = \frac{N}{2i\frac{\pi d^2}{4}} \leqslant [\tau];$$

$$i \geqslant \frac{2N}{\pi d^2 [\tau]}$$

ou bien à partir de la condition de résistance au froissement

$$\sigma_{fr} = \frac{N}{i\delta d} \leqslant [\sigma_{fr}]; \qquad i \geqslant \frac{N}{\delta d [\sigma]_{fr}}.$$

Calcul des joints soudés. On calcule d'habitude au cisaillement (et par des méthodes approximatives également) certains assemblages soudés. Ce sont les assemblages bout à bout et ceux réalisés au moyen d'une

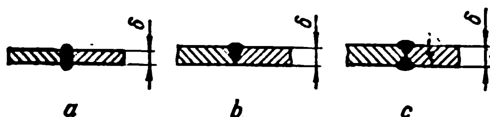


FIG. 121

soudure d'angle ou d'une soudure à cordon. Les assemblages bout à bout sont utilisés lorsque les tôles à assembler doivent se trouver dans un même plan. Lorsque l'épaisseur des tôles $\delta \leqslant 8$ mm, les bords des tôles sont joints tels quels (fig. 121, *a*). A partir de $\delta \geqslant$ 8-20 mm les bords sont chanfreinés

et on soude d'un côté seulement. On obtient ainsi un joint soudé en V (fig. 121, *b*); lorsque $\delta \geqslant 20$ mm les bords sont chanfreinés de deux côtés et l'on obtient un joint en X (fig. 121, *c*). On calcule ces joints à la rupture. L'épaisseur calculée des joints est supposée égale à l'épaisseur de la tôle δ (l'épaisseur des débordements n'est pas prise en considération).

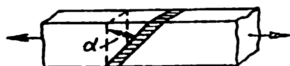


FIG. 122

Les soudures d'angle sont utilisées lorsque les tôles à assembler sont parallèles ou perpendiculaires. On classe dans cette catégorie les assemblages à recouvrement, les soudures à couvre-joint et les joints en T. Si le sens de la soudure est perpendiculaire à l'effort, celle-ci prend le nom de soudure frontale. La soudure parallèle à l'effort est appelée soudure latérale. On utilise aussi les soudures inclinées (fig. 122) orientées sous un certain angle par rapport à la force active. La fig. 123 montre un assemblage de tôles à recouvrement avec des soudures frontales, la fig. 124, une soudure à couvre-joint. La fig. 125 est un joint en T.

Dans les calculs des joints soudés on ne tient pas compte d'habitude des débordements tout en supposant que la section de la soudure d'angle a la forme d'un triangle rectangle isocèle (fig. 126, *a*, *b*). La destruction de la soudure se produit suivant sa section la plus faible et dont la hauteur est égale à

$$m = \delta \cos 45^\circ \approx 0{,}7\,\delta.$$

L'aire de calcul de la section transversale de la soudure de longueur l sera

$$F = ml = 0{,}7\,\delta l.$$

Le calcul des soudures tout comme celui des rivets se fait dans l'hypothèse d'une distribution uniforme des contraintes sur la section des joints. On

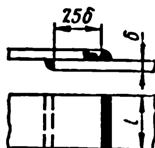


FIG. 123

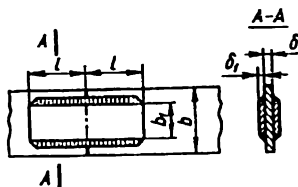


FIG. 124

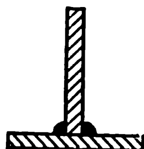


FIG. 125

trouve quelques valeurs des contraintes admissibles à utiliser dans le calcul des joints soudés des structures en acier Cт 3 dans le tableau 14.

Calcul de la soudure frontale. Tenant compte de ce que la résistance de l'acier au cisaillement est inférieure à celle à la traction, on néglige la

composante des contraintes normales dans la soudure frontale et on fait un calcul empirique des soudures au cisaillement supposant que les contraintes tangentielles sont distribuées uniformément sur le de plan la section $ABCD$ (fig. 126). Lors du calcul des soudures frontales dans les assemblages à recouvrement on tient compte de deux soudures supérieure et inférieure. Leur surface totale est

$$F = 2ml = 2 \cdot 0{,}7\,\delta l = 1{,}4\,\delta l.$$

La condition de résistance au cisaillement est

$$\tau = \frac{P}{F} = \frac{P}{1{,}4\,\delta l} \leqslant [\tau_{\text{électr}}].$$

La longueur calculée de la soudure frontale l_c est donnée par la formule

$$l_c = \frac{P}{1{,}4\,\delta[\tau_{\text{électr}}]}.$$

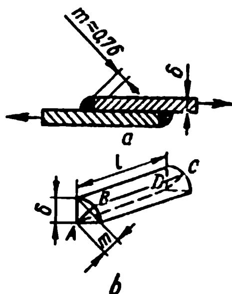


FIG. 125

Considérant que sur les deux extrémités de la soudure il y a une pénétration incomplète, la longueur réelle de celle-ci est adoptée de 10 mm inférieure à la longueur réelle l:

$$l_c = l - 10\text{ mm}.$$

Calcul des soudures latérales. Les soudures latérales sont les plus utilisées dans la pratique. Ces soudures sont moins rigides que les soudures

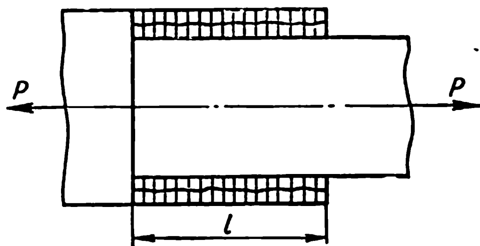


FIG. 127

frontales; ceci est dû à une plus grande étendue du métal dans le sens de l'action de l'effort. Les soudures latérales sont toujours réalisées par

couples, sur les deux côtés. Elles travaillent au cisaillement dans la section bissectorielle (fig. 127). La surface de cisaillement des deux soudures est

$$F = 2 \cdot 0,7\,\delta(l - 10\text{ mm}) = 1,4\,\delta(l - 10\text{ mm}).$$

La condition de résistance au cisaillement est

$$\tau = \frac{P}{F} = \frac{P}{1,4\,\delta(l - 10\text{ mm})} \leqslant [\tau_{\text{électr.}}].$$

La longueur de la soudure est donnée par la formule

$$l = \frac{P}{1,4\,\delta[\tau_{\text{électr.}}]} + 10\text{ mm}.$$

Calcul des encastrements. Les encastrements appartiennent à la classe des assemblages dont la résistance est considérée principalement comme fonction de la résistance au cisaillement. Ils sont utilisés en charpenterie pour assujettir les éléments de charpentes (fig. 128). Le bois étant un matériau anisotrope, ses propriétés mécaniques dépendent de l'orientation des efforts par rapport à celle des fibres.

Ainsi, la limite de résistance du pin le long des fibres est égale à 400 kgf/cm², celle au travers des fibres est de 50 kgf/cm²; pour le chêne on a respectivement 500 kgf/cm² et 150 kgf/cm². Etant donné le caractère différent de la résistance du bois en fonction de l'orientation des fibres et de celle des efforts appliqués on doit choisir en conséquence les contraintes admissibles. On trouvera quelques données relatives aux contraintes admissibles pour le pin et le chêne dans le tableau 15.

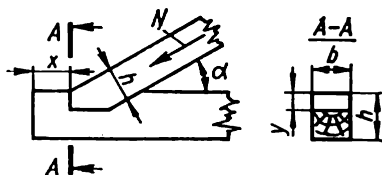


FIG. 128

A titre d'exemple examinons le calcul de l'assemblage du pied d'arbalétrier avec un tirant de charpente de comble (fig. 128). On désignera par α l'angle formé par l'axe du pied d'arbalétrier et celui du tirant de charpente de comble et par N l'effort agissant le long du pied d'arbalétrier. Section du pied d'arbalétrier: $F = hb$. Le bout du tirant de charpente

de comble est sollicité par un effort de cisaillement dirigé le long des fibres et résultant de la projection horizontale de la force N

$$N_1 = N \cos \alpha.$$

La longueur de la partie du tirant de charpente de comble x au-delà de l'encastrement est déterminée à partir de la condition

$$\tau_{max} = \frac{N_1}{F_{déc}} = \frac{N_1}{bx} \leqslant [\tau],$$

d'où l'on tire

$$F_{déc} = bx \geqslant \frac{N_1}{[\tau]},$$

et

$$x \geqslant \frac{N_1}{b[\tau]} = \frac{N \cos \alpha}{b[\tau]}.$$

La surface requise du froissement de l'encastrement sera

$$F_{tas} = by \geqslant \frac{N_1}{[\sigma_{tas}]}.$$

La profondeur de l'encastrement est fournie par la formule

$$y \geqslant \frac{N_1}{b[\sigma_{fr}]} = \frac{N \cos \alpha}{b[\sigma_{fr}]}.$$

Tableau 14

Contraintes admissibles pour joints soudés, en kgf/cm²

Type de déformation	Symboles	Soudage manuel à l'arc; électrodes à enrobage mince	Soudage automatique et soudage manuel (électrodes à enrobage épais)
Traction	$[\sigma^{+}_{électr.}]$	1000	1300
Compression	$[\sigma^{-}_{électr.}]$	1100	1450
Cisaillement	$[\tau_{électr.}]$	800	1100

Tableau 15

Contraintes admissibles pour le bois

Type de déformation	Symboles	Contraintes admissibles en kgf/cm²	
		pin	chêne
Traction	$[\sigma_+]$	100	130
Compression le long des fibres et froissement du bout	$[\sigma_-]$	120	150
Froissement dans les encastrements le long des fibres	$[\sigma_{fr}]$	80	110
Froissement, perpendiculairement aux fibres (pour les longueurs de plus de 10 cm)	$[\sigma_{fr}]_{\frac{\pi}{2}}$	24	48
Cisaillement dans les encastrements le long des fibres	$[\tau]$	5–10	8–14
Cisaillement dans les encastrements au travers des fibres	$[\tau]_{\frac{\pi}{2}}$	6	8
Flexion	$[\sigma_{fl}]$	120	150
Cisaillement par flexion	$[\tau_{fl}]$	20	28

Notice. Pour l'effort de froissement (ou de cisaillement) orienté à un angle α par rapport aux fibres, la contrainte admissible a une valeur intermédiaire entre $[\sigma_{fr}]$ et $[\sigma_{fr}]_{\frac{\pi}{2}}$ ou bien $[\tau]$ et $[\tau]_{\frac{\pi}{2}}$; elle peut être déterminée à l'aide de la formule empirique suivante:

$$[\sigma]_\alpha = \frac{[\sigma_{fr}]}{1 + \left\{ \dfrac{[\sigma_{fr}]}{[\sigma_{fr}]_{\frac{\pi}{2}}} - 1 \right\} \sin^3 \alpha}.$$

CHAPITRE 9

Torsion

§ 46. Contraintes et déformations en torsion

L'état de contrainte dû à la torsion est caractérisé par la présence dans la barre d'un facteur unique de forces internes qui est le moment de torsion $M_z = M_t$ (fig. 129), c'est-à-dire le moment qui agit dans le plan de la section transversale de la barre (les autres composantes des forces internes étant nulles):

$$Q_x = Q_y = N = 0; \quad M_x = M_y = 0.$$

Une barre travaillant à la torsion est appelée *arbre*. Il a été établi expérimentalement que quand un arbre de longueur l subit l'action de deux moments de torsion M_t, appliqués à ses extrémités et dirigés dans les sens opposés, il se tord, c'est-à-dire ses sections tournent les unes par rapport aux autres, alors que sa longueur reste inchangée.

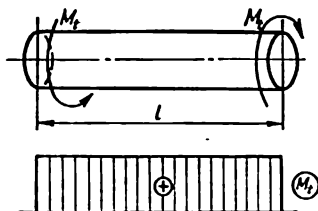


FIG. 129

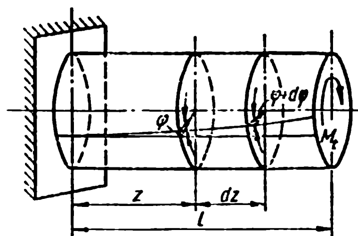


FIG. 130

Considérant la torsion d'un arbre sollicité d'après le schéma de la fig. 130, on constate aisément que l'angle de rotation φ d'une section se trouvant à la distance z du point d'encastrement de l'arbre est d'autant plus grand que le sont z et le moment de torsion M_t. Si on tord l'arbre

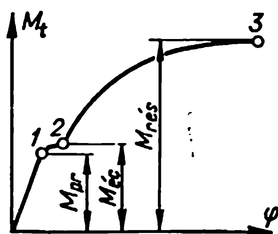


FIG. 131

jusqu'à sa destruction et qu'on représente graphiquement la relation $\varphi = f(M_t)$, on obtient le *diagramme de torsion* dont la fig. 131 montre l'aspect pour le cas d'un matériau élastique. Sur ce diagramme tout comme sur le diagramme de traction on peut noter une série de tronçons et de points caractéristiques (1, 2, 3): M_{pr} est la valeur du moment de torsion jusqu'à laquelle reste valable la dépendance linéaire entre φ et M_t; $M_{éc}$, moment correspondant au début de l'écoulement; $M_{écr}$, valeur du moment de torsion provoquant la destruction. Généralement on a intérêt à connaître les valeurs des moments et les déformations correspondant au tronçon linéaire du diagramme de torsion pour lequel la loi de Hooke reste valable.

Le moment de torsion en une section quelconque de l'arbre qui est la résultante de l'action simultanée des contraintes tangentielles τ_ρ agissant dans les plans élémentaires dF se trouvant à la distance ρ du centre de la section peut être exprimé par l'équation

$$M_t = \int_F \rho \tau_\rho \, dF. \tag{9.1}$$

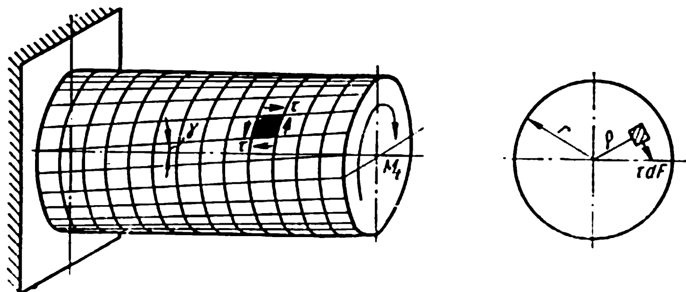


FIG. 132

La distribution des contraintes tangentielles τ_ρ dans la section se détermine d'après le schéma géométrique des déformations de l'arbre en torsion reproduit sur la fig. 132. L'expérience montre que les distances entre les sections de l'arbre en torsion ne varient pas et les lignes longitudinales d'un quadrillage tracé avant la déformation se transforment en lignes hélicoïdales. En même temps, les angles droits du quadrillage se

déforment comme pour un cisaillement pur. Cela prouve qu'un volume élémentaire prélevé dans une couche quelconque du matériau dont l'arbre est fait se trouve dans les conditions d'un cisaillement pur. Etant donné que les rayons tracés dans la section frontale de l'arbre restent rectilignes, les couches successives subissent une déformation de cisaillement de moins en moins prononcée au fur et à mesure qu'on s'approche du centre. D'après des données expérimentales, les sections planes avant la déformation de l'arbre le restent après la déformation tout en se déplaçant les unes par rapport aux autres d'un certain angle φ. C'est en cela que consiste l'hypothèse des sections planes sur laquelle se fonde la théorie élémentaire de torsion des barres.

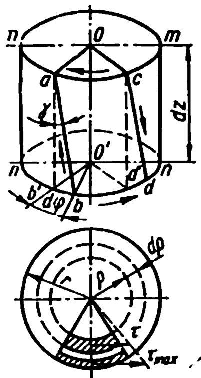


FIG. 133

Pour la couche extérieure d'un tronçon élémentaire de longueur dz, prélevé de l'arbre (fig. 133), les expressions obtenues plus haut pour le cisaillement pur restent valables, c'est-à-dire:

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma = \frac{b'b}{ab'} = \frac{r\,d\varphi}{dz}.$$

La quantité $\frac{d\varphi}{dz}$, dite *angle de torsion relatif*, se mesure en cm^{-1} et se désigne habituellement par θ.

Le rapport entre le cisaillement relatif et l'angle de torsion relatif prend la forme

$$\gamma = \theta r. \tag{9.2}$$

Exprimant le cisaillement γ dans les fibres extérieures de l'arbre par les contraintes, on trouve, en accord avec la loi de Hooke pour le cisaillement, le rapport entre les contraintes tangentielles dans les fibres extérieures τ_r et l'angle de torsion relatif θ

$$\tau_r = G\theta r. \tag{9.3}$$

Tenant compte de ce que les rayons des sections restent rectilignes on peut, par analogie avec (9.3), établir le rapport entre les contraintes tangentielles dans les sections de la barre à une distance ρ du centre de la section et l'angle de torsion relatif

$$\tau_\rho = G\theta_\rho. \tag{9.4}$$

En mettant (9.4) dans (9.1), il vient

$$M_t = G\theta \int_F \rho^2\,dF = G\theta J_\rho.$$

De là on obtient une formule permettant de déterminer l'angle de torsion relatif de l'arbre

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_t}{GJ_p}, \tag{9.5}$$

où GJ_p est la *rigidité de la section transversale de l'arbre en torsion* qui se mesure en kgf cm².

L'angle de rotation total d'un arbre de longueur l est égal à

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_t}{GJ_p}\, dz = \theta l = \frac{M_t l}{GJ_p}, \tag{9.6}$$

où GJ_p/l est la rigidité de l'arbre à la torsion qui se mesure en kgf cm (la dimension du moment).

En mettant la valeur de θ tirée de (9.5) dans (9.4) trouvons maintenant la contrainte tangentielle τ_ρ en un point quelconque de la section de l'arbre

$$\tau_\rho = \frac{M_t \rho}{J_p}. \tag{9.7}$$

La contrainte tangentielle maximale est de toute évidence égale à

$$\tau_{max} = \tau_r = \frac{M_t r}{J_p},$$

ou bien à

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p}, \tag{9.8}$$

où $W_p = \frac{J_p}{r}$ est le moment résistant polaire (cf. (2.38)).

Pour un arbre cylindrique plein, de diamètre d, le moment résistant polaire est donné par la formule (2.38) et aussi par

$$\tau_{max} = \frac{16 M_t}{\pi d^3}. \tag{9.9}$$

Pour un arbre cylindrique creux W_p se détermine d'après (2.39) et

$$\tau_{max} = \frac{16 M_t}{\pi D^3 (1 - \alpha^4)}, \tag{9.10}$$

où $\alpha = \frac{d}{D}$ est le rapport du diamètre intérieur de l'arbre à son diamètre extérieur.

La condition de résistance de l'arbre en torsion s'écrit

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_p} \leqslant [\tau]. \quad (9.11)$$

De là, le moment résistant de l'arbre en torsion doit être

$$W_p \geqslant \frac{M_t}{[\tau]}. \quad (9.12)$$

En vertu de (9.9) le diamètre d'un arbre cylindrique plein se détermine de la condition

$$d \geqslant \sqrt[3]{\frac{16M_t}{\pi[\tau]}}, \quad (9.13)$$

alors que d'après (9.10) le diamètre extérieur d'un arbre cylindrique creux se détermine, pour α imposé, de la condition

$$D \geqslant \sqrt[3]{\frac{16\,M_t}{\pi(1-\alpha^4)\,[\tau]}}. \quad (9.14)$$

Si l'on exprime le moment de torsion par la puissance N en ch et le nombre de tours par minute par n, on aura

$$M_t = 71620\,\frac{N}{n}, \quad \text{kgf cm}, \quad (9.15)$$

et la formule (9.13) se transforme en

$$d \geqslant 71{,}4\sqrt[3]{\frac{N}{n[\tau]}}, \quad (9.16)$$

alors que la formule (9.14) s'écrit

$$D \geqslant 71{,}4\sqrt[3]{\frac{N}{n[\tau](1-\alpha^4)}}. \quad (9.17)$$

Si la puissance K est donnée en kilowatts (1 ch = 0,736 kW), le moment de torsion peut être exprimé par

$$M_t = \frac{71620}{0{,}736}\,\frac{K}{n} = 97360\,\frac{K}{n}\ \text{kgf cm}. \quad (9.18)$$

Outre la résistance on calcule les arbres à la rigidité tout en limitant les angles de torsion relatifs à une certaine valeur admissible $[\theta]$:

$$\theta_{max} = \frac{M_t}{GJ_p} \leqslant [\theta], \tag{9.19}$$

d'où le moment d'inertie polaire garantissant une rigidité admissible

$$J_p \geqslant \frac{M_t}{G[\theta]}. \tag{9.20}$$

Par conséquent, le diamètre d'un arbre cylindrique plein doit être

$$d \geqslant \sqrt[4]{\frac{32\,M_t}{\pi G[\theta]}}, \tag{9.21}$$

tandis que le diamètre extérieur d'un arbre cylindrique creux D, pour un α donné,

$$D \geqslant \sqrt[4]{\frac{32\,M_t}{\pi(1-\alpha^4)\,G[\theta]}}. \tag{9.22}$$

Comme il existe dans les sections transversales de l'arbre des contraintes tangentielles distribuées, d'après (9.7), selon une loi linéaire (fig.134,a),

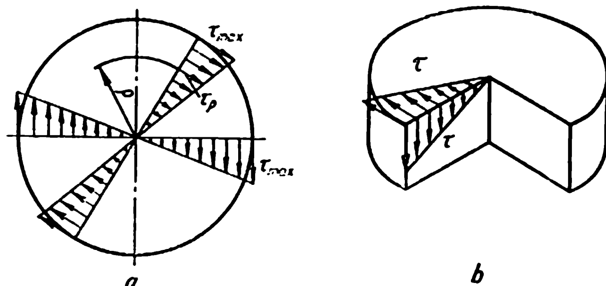


FIG. 134

en raison de la loi de la parité des contraintes tangentielles, il doit y avoir dans les sections longitudinales de l'arbre des contraintes tangentielles de valeurs égales et de signes inverses (fig. 134, b).

Dans les plans inclinés à 45° par rapport aux sections dans lesquelles agissent des contraintes tangentielles maximales apparaissent également des contraintes normales principales de valeurs égales aux contraintes tangentielles appartenant au point considéré de la section, comme le montre la fig. 135. Par conséquent, le type de destruction (cisaillement ou rupture) de l'arbre lors de sa torsion doit être en rapport avec la capacité du matériau de résister à l'action des contraintes tangentielles ou normales. Ainsi, lors de la torsion des arbres en bois dont les fibres vont dans le sens longi-

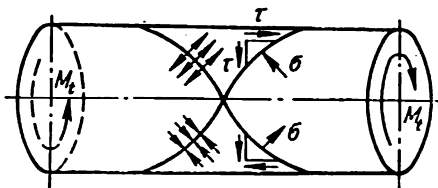


FIG. 135

tudinal, celles-ci se désintègrent sous l'effet des contraintes tangentielles dirigées le long des fibres (criques longitudinales) (fig. 136). La destruction due à la torsion des arbres en fonte se produira sous l'effet des contraintes de traction normales dont la valeur maximale est atteinte dans les sections qui suivent la ligne hélicoïdale et coupent la génératrice à 45°, comme l'indique la fig. 137.

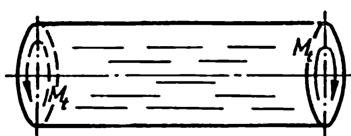


FIG. 136

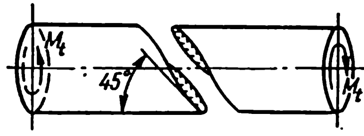


FIG. 137

§ 47. Torsion des barres de section quelconque

L'hypothèse de sections planes n'est pas applicable à la torsion des barres de section quelconque (carrée, triangulaire, elliptique, etc.). Les calculs de torsion plus précis pour de telles barres peuvent être faits par des méthodes de la théorie d'élasticité. Les formules définitives pour le calcul des contraintes tangentielles maximales τ_{max}, de l'angle de torsion relatif θ

et de l'angle de torsion total φ d'une barre, de longueur l, se présentent comme:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t} ; \tag{9.23}$$

$$\theta = \frac{M_t}{GJ_t} ; \tag{9.24}$$

$$\varphi = \frac{M_t l}{GJ_t} . \tag{9.25}$$

Dans ces formules J_t et W_t sont des caractéristiques géométriques qu'on appelle par convention moment d'inertie et moment résistant en torsion et qui ont pour dimensions respectives cm^4 et cm^3 (cf. tabl. 1).

La distribution des contraintes tangentielles dans la *section d'une barre rectangulaire* est montrée sur la fig. 138. Les contraintes maximales apparaissent dans les couches extérieures à la mi-longueur du côté long de la section (points C et D). On les détermine d'après la formule (9.23), où

$$W_t = \alpha hb^2 \tag{9.26}$$

(h est le côté long; b, le côté court de la section rectangulaire).

Les contraintes à la mi-longueur du côté court (aux points A et B) peuvent être exprimées par l'intermédiaire de τ_{max}:

$$\tau = \overset{*}{\gamma}\tau_{max}. \tag{9.27}$$

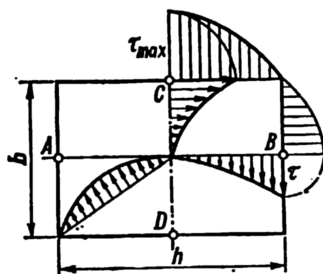


FIG. 138

L'angle de torsion relatif est déterminé d'après la formule (9.24) dans laquelle l'expression donnant le moment d'inertie en torsion J_t est

$$J_t = \beta hb^3. \tag{9.28}$$

Les valeurs des coefficients α, β et $\overset{*}{\gamma}$ qui dépendent du rapport $\frac{h}{b}$ sont données ci-dessous:

$\frac{h}{b}$	1	1,5	1,75	2,0	2,5	3,0
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,256	0,267
β	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263
γ^*	1,000	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753
$\frac{h}{b}$	4,0	6,0	8,0	10		∞
α	0,282	0,299	0,307	0,313		0,333
β	0,281	0,299	0,307	0,313		0,333
γ^*	0,745	0,743	0,742	0,742		0,743

Les conditions de résistance et celles de rigidité à utiliser lors du calcul de torsion d'une barre de section rectangulaire s'écrivent respectivement:

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{\alpha h b^2} \leqslant [\tau]; \tag{9.29}$$

$$\theta_{max} = \frac{M_t}{\beta h b^3 G} \leqslant [\theta]. \tag{9.30}$$

Pour le calcul de torsion d'une barre ayant pour *section* un *trapèze isocèle* on peut utiliser en tant que valeurs approximatives de τ_{max} et θ les valeurs obtenues pour une barre de section rectangulaire équivalente d'après le schéma de la fig. 139.

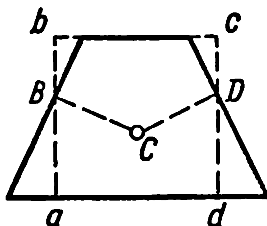


FIG. 139

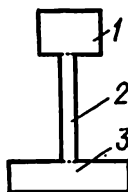


FIG. 140

Pour la torsion d'une barre de *section complexe fermée faite d'éléments rectangulaires* (fig. 140) le moment d'inertie est

$$J_t = J_{t_1} + J_{t_2} + J_{t_3} + \ldots = \Sigma J_{t_n}, \tag{9.31}$$

où $n - 1, 2, 3\ldots$ sont les numéros des éléments simples constitutifs de la section considérée.

Etant donné que l'angle de torsion est le même pour l'ensemble de la section et pour chacun de ses éléments

$$\theta = \frac{M_t}{GJ_t} = \frac{M_{t_1}}{GJ_{t_1}} = \frac{M_{t_2}}{GJ_{t_2}} = \ldots = \frac{M_{t_n}}{GJ_{t_n}},$$

les moments de torsion sollicitant un élément quelconque de la section sont proportionnels à sa rigidité

$$M_{t_1} = M_t \frac{J_{t_1}G}{J_t G} = M_t \frac{J_{t_1}}{J_t};$$

$$M_{t_2} = M_t \frac{J_{t_2}}{J_t}; \quad \ldots; \quad M_{t_n} = M_t \frac{J_{t_n}}{J_t}.$$

Idlen résulte que les contraintes tangentielles maximales dans un élément n de la section sont

$$\tau_{t_n} = \frac{M_{t_n}}{W_{t_n}} = \frac{M_t}{W_{t_n}} \left(\frac{J_{t_n}}{J_t}\right) = \frac{M_t}{J_t} \left(\frac{J_{t_n}}{W_{t_n}}\right).$$

Il est évident que

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{J_t} \left(\frac{J_{t_n}}{W_{t_n}}\right)_{max} = \frac{M_t}{W_t}, \tag{9.32}$$

où

$$W_t = \frac{J_t}{\left(\frac{J_{t_n}}{W_{t_n}}\right)_{max}}. \tag{9.33}$$

Pour une barre de *section élliptique* (fig. 141)

$$W_t = \frac{\pi b^2 h}{16}, \tag{9.34}$$

où b et h sont respectivement les dimensions du petit et du grand axe de l'ellipse.

Les contraintes tangentielles maximales τ_{max} apparaissent dans les points extérieurs de la section situés sur les petits demi-axes et on les détermine à l'aide de la formule:

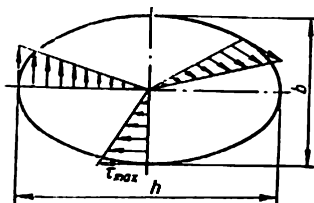


FIG. 141

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{W_t} = \frac{16M_t}{\pi b^2 h} . \quad (9.35)$$

Les tensions dans les points extérieurs situés sur les grands demi-axes sont

$$\tau' = \frac{\tau_{max}}{m} ,$$

où $m = \frac{h}{b}$.

Le moment conventionnel d'inertie en torsion

$$J_t = \frac{\pi hb}{64} (h^2 + b^2). \quad (9.36)$$

Le tableau 16 représente des formules approximatives pour la détermination de la contrainte tangentielle maximale τ_{max} à l'aide de l'angle de rotation relatif θ pour une série de profilés.

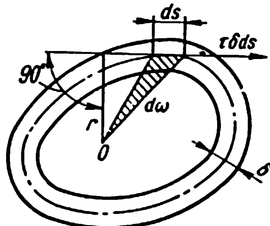


FIG. 142

Lors de la torsion des *profilés fermés à parois minces* (fig. 142) dont les parois sont assez minces pour que les contraintes tangentielles puissent être considérées comme homogènes sur toute l'épaisseur de la paroi, égales aux contraintes agissant à la mi-épaisseur de la paroi et dirigées suivant la tangente à la ligne moyenne de la paroi, les contraintes tangentielles peuvent être déterminées d'après la *formule de Bredt:*

$$\tau = \frac{M_t}{2\omega\delta} , \quad (9.37)$$

où ω est la surface limitée par la ligne médiane de la section à paroi mince; δ, l'épaisseur de la paroi.

Si l'épaisseur de la paroi du profilé n'est pas constante sur tout le pourtour, la contrainte tangentielle maximale dans un tel profilé à paroi mince s'évalue par

$$\tau_{max} = \frac{M_t}{2\omega\delta_{min}} . \quad (9.38)$$

L'angle de torsion relatif d'une barre à paroi mince d'épaisseur variable est donné par la formule

$$\theta = \frac{M_t}{4G\omega^2} \oint \frac{ds}{\delta}, \tag{9.39}$$

où s est la longueur du pourtour fermé.

L'angle de torsion total d'une barre de longueur l sera

$$\varphi = \frac{M_t l}{4G\omega^2} \oint \frac{ds}{\delta}. \tag{9.40}$$

La formule (9.39) peut être récrite

$$\theta = \frac{M_t}{GJ_t},$$

où

$$J_t = \frac{4\omega^2}{\oint \frac{ds}{\delta}}.$$

Lorsque l'épaisseur de la paroi est constante pour tout le pourtour, la formule (9.39) se transforme en

$$\theta = \frac{M_t s}{4G\omega^2\delta}. \tag{9.41}$$

Dans le cas particulier d'un tube circulaire à paroi mince et au rayon de la ligne médiane R, pour $\delta = \text{const}$,

$$\omega = \pi R^2; \qquad \oint \frac{ds}{\delta} = \frac{2\pi R}{\delta}.$$

D'après (9.37) et (9.41) il vient

$$\tau = \frac{M_t}{2\pi R^2\delta};$$

$$\theta = \frac{M_t}{2\pi R^3\delta G}.$$

Pour la torsion de *profilés ouverts à paroi mince* (profilés en U, en double T, en L) (fig. 143) on peut utiliser la théorie relative au calcul de torsion des barres de section rectangulaire. Dans ce cas on divise le profilé en éléments rectangulaires dont l'épaisseur h est sensiblement inférieure à leur longueur b. D'après les données de la page 287, on a $\frac{h}{b} > 10$, $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$.

Alors, pour un profilé complexe, on a d'après (9.31)

$$J_t = \eta \frac{1}{3} \sum b_n^3 h_n, \qquad (9.42)$$

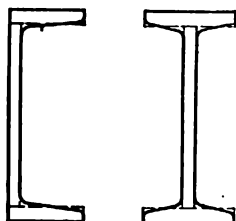


FIG. 143

où η est un coefficient de correction rendant compte de l'approche schématique adoptée consistant à substituer des rectangles à la section réelle.

Voici les valeurs du coefficient η pour les profilés courants:

section en L	$\eta = 1,00$;
section en double T	$\eta = 1,20$;
section en T	$\eta = 1,15$;
section en U	$\eta = 1,12$.

Dans les profilés à parois minces au pourtour ouvert il est convenu de désigner la longueur du pourtour par s et l'épaisseur par δ. La formule (9.42) s'écrit alors

$$J_t = \eta \frac{1}{3} \sum_n \delta_n^3 s_n. \qquad (9.43)$$

Les contraintes tangentielles maximales dans un profilé ouvert sont données par la formule

$$\tau_{max} = \frac{M_t \cdot \delta_{max}}{J_t}, \qquad (9.44)$$

où

$$\delta_{max} = \left(\frac{J_{t_n}}{W_{t_n}} \right)_{max}.$$

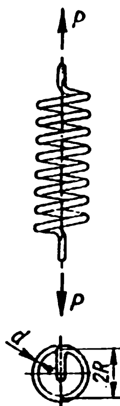


FIG. 144

§ 48. Calcul des ressorts hélicoïdaux

Ressorts hélicoïdaux cylindriques. Les formules approximatives pour le calcul des contraintes apparaissant dans les ressorts hélicoïdaux à faible pas se trouvant en traction ou en compression (fig. 144) peuvent être établies à partir de l'analyse des efforts internes existant dans la section d'une spire (fig. 145), efforts qui remplacent l'influence de la partie inférieure du ressort mentalement sectionnée. Sous l'effet d'une force transversale $Q = P$ et du moment de torsion égal au produit de l'effort de traction par le rayon moyen R du ressort $M_t = PR$, dans la section d'une spire apparaissent deux groupes de contraintes tangentielles: les *contraintes dues au cisaillement* qu'on considère, par convention, comme uniformément distribuées et, égales à

$$\tau' = \frac{Q}{F} = \frac{4P}{\pi d^2},$$

et les *contraintes dues à la torsion* dont la valeur maximale est

$$\tau''_{max} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{16PR}{\pi d^3},$$

d étant le diamètre de la section transversale du fil dont est fait le ressort.

Le caractère de la distribution des contraintes τ' et τ'' agissant dans la section d'une spire est montré sur les fig. 146, *a* et 146, *b* respectivement. De ce tableau de distribution des contraintes, on déduit que dans les fibres extérieures de la spire situées du côté de l'axe du ressort (point A), les directions des contraintes τ' et τ''_{max} se confondent. Par conséquent les contraintes maximales dans le ressort sont:

$$\tau_{max} = \tau' + \tau''_{max} = \frac{4P}{\pi d^2} + \frac{16PR}{\pi d^3},$$

ou bien

$$\tau_{max} = \frac{16PR}{\pi d^3}\left(1 + \frac{d}{4R}\right). \qquad (9.45)$$

Lors du calcul d'un ressort de diamètre moyen R important fait en fil fin pour lequel $\frac{d}{4R} \ll 1$,

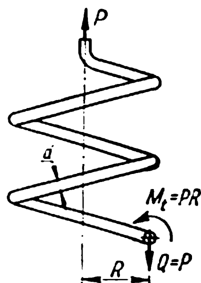


FIG. 145

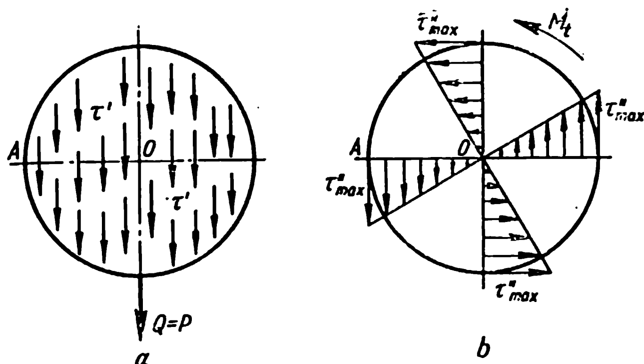


FIG. 146

la contrainte maximale peut être déterminée, avec un degré de précision suffisant, par la formule

$$\tau_{max} = \frac{16PR}{\pi d^3} . \qquad (9.46)$$

En pratique, quand on a à calculer des ressorts on introduit dans la formule (9.46) un *coefficient de correction k* rendant compte aussi bien de l'influence de la force tranchante que de certains autres facteurs (flexion du tige du ressort, déformations longitudinales, etc.). Dans ce cas la formule (9.46) s'écrira

$$\tau_{max} = k\frac{M_t}{W_p} = k\frac{16PR}{\pi d^3} . \qquad (9.46a)$$

Les valeurs du coefficient de correction k dépendent du rapport du rayon du ressort R au rayon de la spire r et s'expriment par la formule

$$k = \frac{4m-1}{4m-4} + \frac{0,615}{m} , \qquad (9.47)$$

avec $m = \frac{R}{r}$.

Les valeurs du coefficient k pour divers rapports $\frac{R}{r}$ sont

$\frac{R}{r}$	3	4	5	6	7	8	9	10
k	1,58	1,40	1,31	1,25	1,21	1,18	1,16	1,14

L'*allongement* (ou l'*aplatissement* en compression) *du ressort* est donné par la formule

$$\lambda = \frac{64\,PR^3n}{Gd^4}, \qquad (9.48)$$

n étant le nombre de spires du ressort.

Quand on calcule les ressorts à la résistance dans le cas d'une charge statique, les contraintes admissibles en cisaillement doivent être choisies en fonction du diamètre du fil. Soit d le diamètre du fil en acier trempé à ressorts; on aura: pour $d = 6$ mm, $[\tau] = 50$ kgf/mm²; pour $d = 10$ mm, $[\tau] = 40$ kgf/mm²; pour $d = 12$ mm, $[\tau] = 35$ kgf/mm²; si le fil est en acier au chrome et nickel, pour $d = 12$ à 16 mm, $[\tau] = 70$ kgf/mm²; s'il est en bronze au phosphore avec $G = 4{,}4 \cdot 10^5$ kgf/cm², pour $d = 16$ mm, $[\tau] = 13$ kgf/mm².

Dans le cas d'une charge variable les valeurs de $[\tau]$ indiquées plus haut doivent être diminuées de 30% environ; si le ressort doit fonctionner en régime continu, sous charges variables, on diminue $[\tau]$ de 60 %.

Souvent, quand on a à calculer les ressorts amortisseurs contre des chocs violents, on adopte comme base de calcul l'énergie cynétique T que doit absorber le ressort pendant son service.

Avec cette approche (énergétique) du problème, le volume du ressort pour une contrainte admissible $[\tau]$ donnée se détermine par la formule

$$V = \frac{4GT}{[\tau]^2}.$$

Si on fabrique le ressort d'après le volume ainsi déterminé, on doit choisir ses dimensions R, d et n de façon à éviter que pour un aplatissement λ de vérification du ressort, les spires avoisinantes ne se touchent.

Ressorts hélicoïdaux coniques. Il arrive que dans la pratique on utilise des ressorts hélicoïdaux coniques (sous forme de cône tronqué). Si R_1 et R_2 sont respectivement les rayons minimal et maximal des spires extrêmes du ressort, la contrainte tangentielle maximale peut être déterminée d'après la formule (9.45) ou (9.46) après y avoir substitué la valeur du grand rayon R_2 au rayon R:

$$\tau_{max} = \frac{16\,PR_2}{\pi d^3}.$$

Le taux de compression du ressort conique est donné par la formule

$$\lambda = \frac{16\,Pn}{d^4G}(R_1^2 + R_2^2)(R_1 + R_2).$$

§ 49. Concentration des contraintes en torsion

La contrainte maximale dans la zone des concentrateurs (entailles, rainures, orifices, filets, etc.) peut être déterminée dans le cas de la torsion d'après la formule

$$\tau_{max} = \alpha_\tau \tau_n,$$

où τ_n est la contrainte nominale qu'on calcule par des méthodes de résistance des matériaux et notamment, pour un arbre circulaire de rayon r, à l'aide de la formule

$$\tau_n = \frac{M_t}{J_p} r;$$

α_τ étant le coefficient indiquant combien de fois la contrainte nominale augmente au voisinage du concentrateur. Le coefficient α_τ est déterminé par des méthodes de la théorie d'élasticité ou par des méthodes expéri-

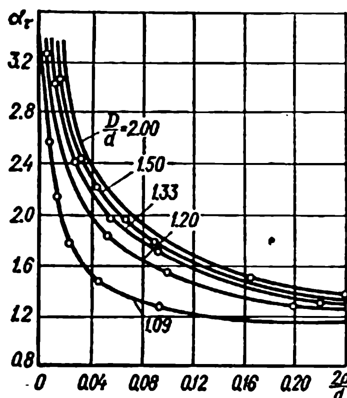


FIG. 147

mentales utilisant des modèles élastiques; on l'appelle habituellement coefficient théorique de concentration.

La fig. 147 donne les diagrammes de la fonction $\alpha_\tau = f\left(\frac{2\rho}{d}\right)$ pour divers rapports $\frac{D}{d}$ (fig. 148).

Pour le cas de la torsion d'un arbre creux à paroi mince garni d'orifices transversaux de faible diamètre (fig. 149, *a*) le coefficient de concentration au voisinage de l'orifice est égal à 4.

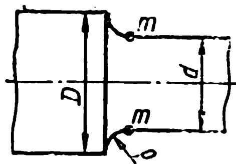


FIG. 148

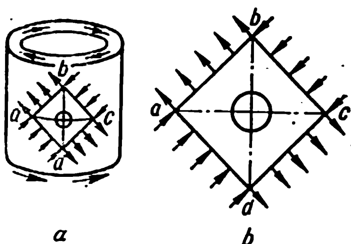


FIG. 149

En effet, si à l'aide de plans principaux dont les faces sont sollicitées par des contraintes normales $\sigma = \tau$ (sur les plans *ab* et *cd* — de traction, sur les plans *ad* et *bc* — de compression) on délimite autour de l'orifice un élément quelconque (fig. 149, *b*) et qu'on dessine les schémas des

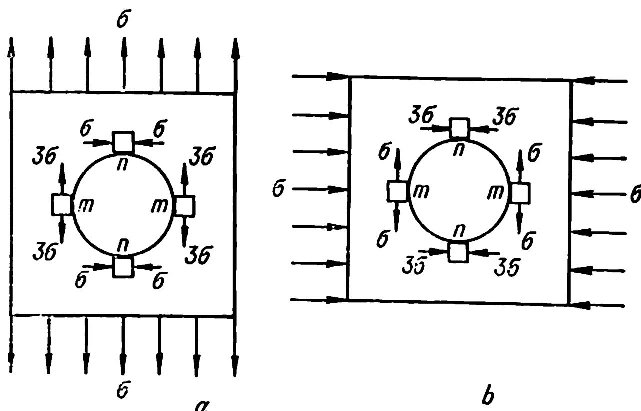


FIG. 150

contraintes de traction (fig. 150, *a*) et de compression (fig. 150, *b*), existant au voisinage de l'orifice, on trouve respectivement pour les points *m* (cf. § 27)

$$\sigma_{\max} = 3\sigma + \sigma = 4\sigma;$$

et pour les points n

$$\sigma_{\min} = -\sigma - 3\sigma = -4\sigma.$$

Comme

$$\sigma_n = \sigma = \tau = \frac{M_t}{W_p},$$

on a

$$\sigma_{\max} = 4\sigma_n = 4\frac{M_t}{W_p}.$$

Ainsi, dans le cas considéré, le coefficient de concentration $\alpha_\tau = 4$.

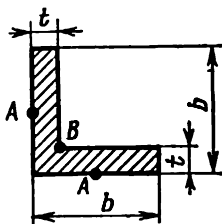
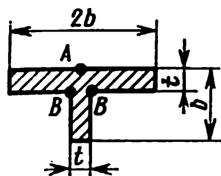
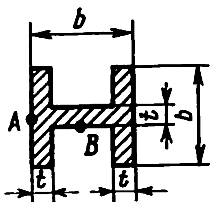
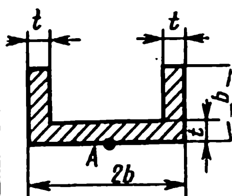
Pour les données plus complètes concernant les coefficients de concentration en torsion voir l'*Appendice 2*.

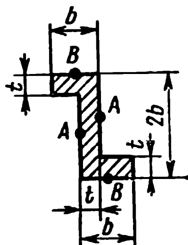
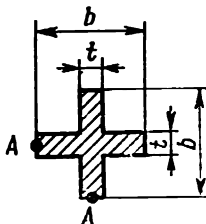
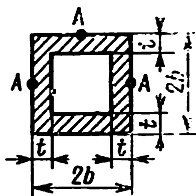
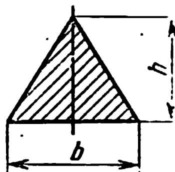
Formules de calcul approximatives pour la détermination de la contrainte tangentielle maximale τ_{max} à l'aide de l'angle de rotation relatif θ pour des barres à section non circulaire

Forme de la section transversale de la barre	τ_{max} en kgf/cm² et point dans lequel elle apparait
	$2G\theta \dfrac{a^2 b}{a^2 + b^2}$ aux points A
	$G\theta(2R - r)$ au point A
	$G\theta bK$ au milieu des côtés longs

h/b	1,0	1,2	1,5	1,8	2,0
k	0,6753	0,7587	0,8477	0,9044	0,9301

h/b	2,5	3,0	4,0	6,0	10	∞
k	0,9681	0,9855	0,9970	0,9999	1,0	1,0

Forme de la section transversale de la barre	τ_{max} en kgf/cm² et point dans lequel elle apparait
	1,18 $G\theta t$ approximativement au milieu des côtés longs, aux points *A*. Dans l'angle rentrant, au point *B*, on a une concentration de contraintes
	~ 1,13 $G\theta t$ au milieu du côté long, au point *A*. Dans les angles rentrants, aux points *B*, on a une concentration de contraintes
	Aux points *A* $\tau_{max} \approx 0{,}267\ G\theta t$. Aux points *B* $\tau_{max} \approx 0{,}26\ G\theta t$. Dans les angles rentrants, on a une concentration de contraintes
	~ 1,015 $G\theta t$ au point *A*. Dans les angles rentrants, on a une concentration de contraintes

<table>
<tr><th>Forme de la section transversale de la barre</th><th>τ_{max} en kgf/cm² et point dans lequel elle apparait</th></tr>
<tr><td>
</td><td>Aux points A $\tau_{max} \approx 1{,}04\ G\theta t$
Aux points B $\tau_{max} \approx 1{,}0\ G\theta t$
Dans les angles rentrants, on a une concentration de contraintes</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Aux points A $\tau_{max} \approx 0{,}782\ G\theta t$ pour $\frac{b}{t} > 3$ et
$\tau_{max} \approx 0{,}934\ G\theta t$ pour $1{,}5 < \frac{b}{t} < 3$.
Dans les angles rentrants, on a une concentration de contraintes</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$(\gamma + 1)G\theta t$ aux points A. Dans les angles rentrants, on a une concentration de contraintes
<table>
<tr><td>b/t</td><td>1,5</td><td>2,0</td><td>2,5</td><td>3,0</td><td>3,5</td><td>4,0</td></tr>
<tr><td>γ</td><td>1,154</td><td>1,681</td><td>2,194</td><td>2,701</td><td>3,206</td><td>3,709</td></tr>
<tr><td>b/t</td><td>5,0</td><td>10,0</td><td>20,0</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>γ</td><td>4,713</td><td>9,720</td><td>19,723</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>
</td><td>$\frac{1}{2}\ G\theta h$ au milieu des côtés</td></tr>
</table>

CHAPITRE 10

Flexion

§ 50. Contraintes normales en flexion plane

Les formules servant à calculer les contraintes normales en flexion sont d'habitude établies à partir d'une étude de la flexion plane pure (fig. 151, *a*).

La flexion pure est caractérisée par le fait que de six composantes des efforts internes seule M_x n'est pas nulle tandis que

$$N = Q_x = Q_y = 0; \quad M_y = M_z = 0.$$

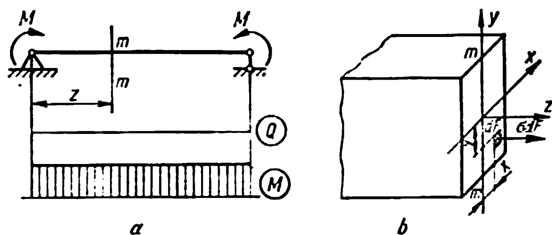


FIG. 151

La *condition d'équilibre* qui lie les contraintes et les efforts internes dans la section transversale d'une poutre (fig. 151, *b*) (l'indice x dans le symbole du moment est supprimé) a la forme

$$\int_F \sigma y \, dF = M. \tag{10.1}$$

L'*aspect géométrique* du problème se déduit de l'analyse du tableau schématique des déformations de la même poutre (fig. 152).

Etudiant la déformation d'un quadrillage tracé préalablement sur la poutre (fig. 152, *a*) on remarque aisément (fig. 152, *b*) que les lignes longitudinales du quadrillage fléchissent en flexion pure suivant un arc de cercle alors que les sections transversales restent planes et coupent les lignes longitudinales sous un angle droit. Cela prouve qu'en flexion pure les sections transversales restent planes et tournent tout en restant normales par rapport à l'axe courbé de la barre.

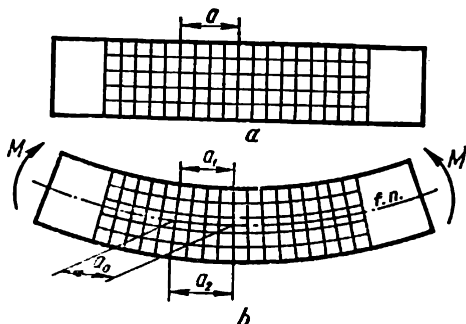


FIG. 152

Dans la zone comprimée (en haut) les fibres se raccourcissent tandis que dans la zone de traction elles s'allongent. La zone de traction et celle de compression dans la section de la barre sont séparées par une *couche neutre* ayant ρ pour rayon de courbure. La longueur de la couche neutre ne varie pas lors de la flexion.

L'allongement relatif d'une fibre se trouvant à une distance y de la couche neutre (fig. 153, *a*) peut être établi, pour le cas de la flexion pure, en analysant la déformation d'une longueur élémentaire dz de la barre (fig. 153, *b*):

$$\varepsilon = \frac{(\rho + y)\,d\theta - dz}{dz} = \frac{(\rho + y)\,d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho}. \qquad (10.2)$$

Introduisant (10.2) dans l'*équation physique* (loi de Hooke)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \qquad (10.3)$$

exprimons la contrainte normale σ par l'intermédiaire de la courbure $\frac{1}{\rho}$:

$$\sigma = \frac{E}{\rho} y. \qquad (10.4)$$

Introduisant ensuite (10.4) dans (10.1) on a

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EJ_x}, \tag{10.5}$$

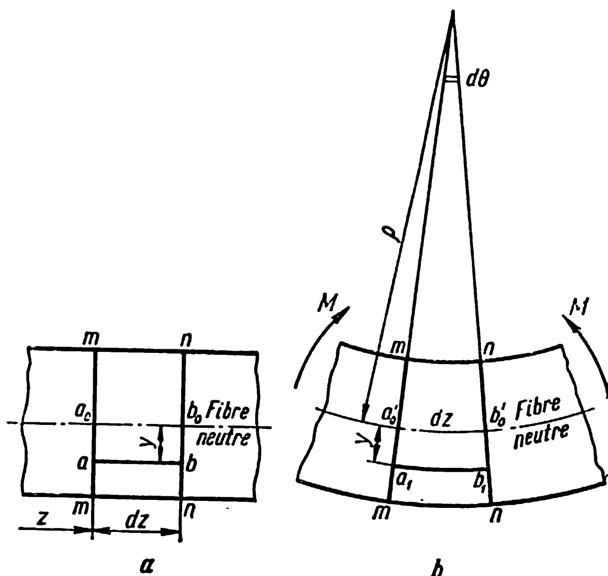


FIG. 153

et, si l'on introduit (10.5) dans (10.4), on établit la formule pour le calcul de la contrainte normale dans une couche quelconque de la section de la barre à une distance y de l'axe x:

$$\sigma = \frac{My}{J_x}. \tag{10.6}$$

L'analyse de la formule (10.6) dite *formule de Navier* montre que la variation des contraintes sur la hauteur de la section obéit à une loi linéaire; les contraintes deviennent maximales dans les couches ayant pour coordonnées y_{max} et minimales (nulles) lorsque $y = 0$, c'est-à-dire dans la couche neutre.

Introduisant σ tiré de (10.6) dans la condition $N = \int\limits_F \sigma\, dF = 0$ il vient $\int\limits_F y\, dF = S_x = 0$. Il en résulte que la ligne neutre de la section (axe x) passe par le centre de gravité de la section.

Dans le cas d'une section rectangulaire d'une barre ayant pour hauteur h

$$\sigma_{max} = \frac{My_{max}}{J_x} = \frac{M\frac{h}{2}}{J_x} = \frac{M}{W_x}, \qquad (10.7)$$

où $W_x = \frac{J_x}{y_{max}} = \frac{J_x}{\frac{h}{2}}$ est appelé *moment résistant de la section en flexion* (cf. § 11).

Il est évident que toute section ayant un axe de symétrie horizontal (fig. 154) aura un moment résistant unique en flexion dans le plan yz; ce moment est donné par la formule

$$W_x = \frac{J_x}{y_{max}}.$$

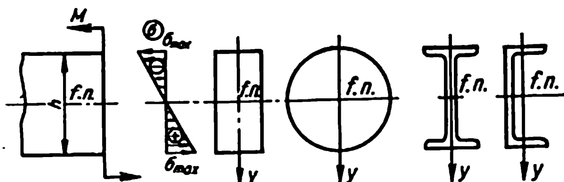


FIG. 154

Si la section n'a pas d'axe de symétrie horizontal (fig. 155) on doit distinguer deux moments résistants:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{max}} \quad \text{et} \quad W'_x = \frac{J_x}{y'_{max}}.$$

Le diagramme des contraintes normales σ dans le dernier cas n'est pas symétrique, comme c'est le cas des sections à l'axe de symétrie horizontal, mais il aura la forme que montrent les fig. 155 et 156.

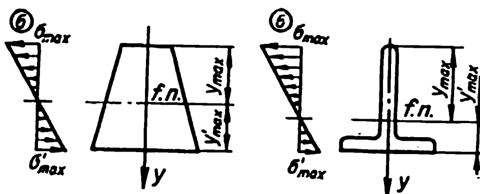


FIG. 155

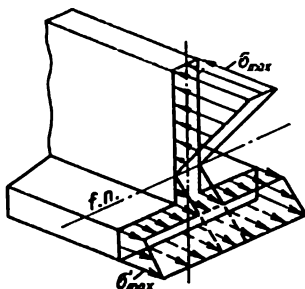


FIG. 156

Les formules servant à évaluer les contraintes normales établies à l'aide de l'analyse de la flexion pure sont, avec un degré de précision suffisant, valables pour la détermination des contraintes normales dans le cas général de la flexion, lorsque Q n'est pas nul.

§ 51. Contraintes tangentielles en flexion

Dans le cas général de flexion transversale (fig. 157, *a*), où les sections de la barre supportent, outre le moment fléchissant M, l'action d'une force transversale Q, dans une section de la poutre apparaissent non seulement des contraintes normales σ mais aussi des contraintes tangentielles τ dont la résultante est égale à Q.

L'établissement de la formule servant à calculer les contraintes tangentielles dans une section se fonde sur la méthode des coupures, la dépendance différentielle entre le moment et la force transversale et la loi de réciprocité des contraintes tangentielles.

Considérant les conditions d'équilibre de l'élément $A_1m_1m_2A_2$ (fig. 157, *a*, *b*, *c*, *d*) délimité par les sections A_1B_1, A_2B_2 et m_1, m_2 dans la barre sollicitée par une force concentrée P (fig. 157, *a*) on a

$$N_1 + T = N_2, \qquad (10.8)$$

$$T = \tau' b\, dz; \tag{10.9}$$

$$N_1 = \int_F \sigma' dF = \int_F \frac{M\eta}{J_x} dF = \frac{M}{J_x} S_x(y); \tag{10.10}$$

$$N_2 = \int_F \sigma'' dF = \int_F \frac{(M+dM)\eta}{J_x} dF = \frac{M+dM}{J_x} S_x(y). \tag{10.11}$$

Introduisant (10.9)-(10.11) dans (10.8) et tenant compte de la loi de réciprocité des contraintes tangentielles, on obtient la *formule de Jouravski* qui sert à déterminer les contraintes tangentielles en flexion transversale d'une barre de section quelconque

$$\tau' = \tau = \frac{QS_x(y)}{b(y)J_x}, \tag{10.12}$$

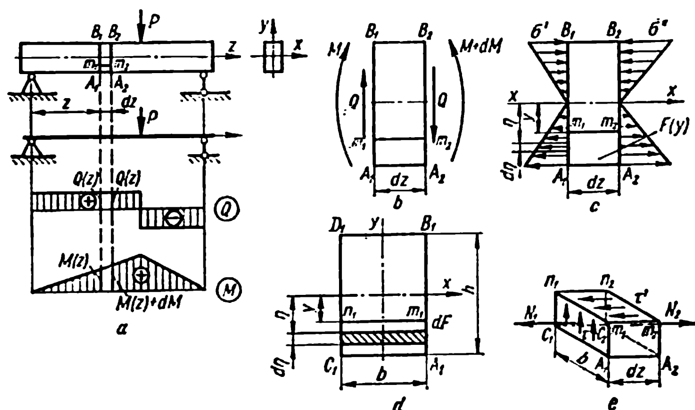


FIG. 157

où $S_x(y)$ est le moment statique rapporté à la ligne neutre de la tranche de l'aire $F(y)$ située soit au-dessus soit en dessous de la couche considérée à une distance y de la couche neutre de la barre; $b(y)$, largeur de la section dans la couche considérée de matériau. Le caractère de variation des contraintes tangentielles suivant la hauteur de la barre dépend, dans le cas général, de la forme qu'a la section de cette dernière.

Dans la section considérée Q et J_x étant des constantes (dans le cas d'une section rectangulaire la largeur b l'est également), la loi de variation

des contraintes tangentielles dans une section est déterminée, en vertu de (10.12), par la loi de variation du moment statique $S_x(y)$. En particulier, en considérant le moment statique de l'aire $C_1n_1m_1A_1$ (fig. 157, *d*), on constate que

$$S(y) = F(y)\, y_{c.gr} = \frac{bh^2}{8}\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right), \tag{10.13}$$

ce qui revient à dire que le moment statique varie suivant la hauteur de la section d'après une loi parabolique. Il est évident que les contraintes tangentielles varient elles aussi suivant la hauteur de la barre d'après la même loi, pour atteindre leur maximum lorsque $y = 0$:

$$\tau_{max} = \frac{QS_{max}}{bJ_x} = \frac{Q \cdot \frac{bh^2}{8}}{b \cdot \frac{bh^3}{12}} = \frac{3}{2}\,\frac{Q}{F}, \tag{10.14}$$

où $F = bh$ est l'aire de la section de la barre.

Aux points les plus éloignés de la ligne neutre, dans les fibres extérieures $y = \pm \frac{h}{2}$ et on a également $\tau = 0$.

Le diagramme des contraintes tangentielles dans une section rectangulaire d'une barre, qu'on a tracé à partir de la formule (10.12) en tenant compte de (10.13), est reproduit sur la fig. 158. Cela donne

$$\tau = \frac{3Q}{2bh}\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right). \tag{10.15}$$

La formule (10.15) montre que les contraintes tangentielles maximales dans une barre de section rectangulaire agissant dans la couche neutre diffèrent une fois et demie des contraintes moyennes qu'on pourrait obtenir de la formule $\tau_{moy} = \frac{Q}{F}$, autrement dit

$$\tau_{max} = 1{,}5\, \tau_{moy}. \tag{10.16}$$

Pour une section circulaire (fig. 159) la formule de Jouravski qui donne la composante verticale de la contrainte tangentielle totale peut être écrite dans la forme suivante:

$$\tau = \frac{4Q}{3\pi R^2}\left(1 - \frac{y^2}{R^2}\right). \tag{10.17}$$

Dans ce cas aussi, τ varie suivant la hauteur d'après une loi parabolique. Aux points A les plus éloignés de la ligne neutre (pour $y = \pm R$),

$\tau = 0$. La contrainte tangentielle maximale se localisera en des points situés sur la ligne neutre (pour $y = 0$):

$$\tau_{max} = \frac{4}{3}\frac{Q}{\pi R^2} = 1,33\frac{Q}{F}.$$

La fig. 159 reproduit le diagramme de τ tracé pour une section transversale circulaire à partir de la formule (10.17).

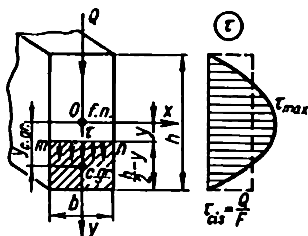


FIG. 158

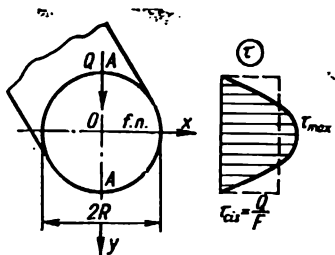


FIG. 159

La formule permettant d'exprimer les contraintes tangentielles maximales pour les sections transversales de forme quelconque peut être représentée, par analogie avec (10.14), sous la forme

$$\tau_{max} = k\frac{Q}{F}, \tag{10.18}$$

où k est le coefficient qui dépend de la forme de la section. Ainsi, par exemple, pour un rectangle $k = 1,5$, pour un cercle $k = 1,33$.

Le diagramme des contraintes normales et tangentielles tracé d'après la formule de Navier et celle de Jouravski pour une poutre en double T n° 12 ($J_x = 403$ cm^4; $S_{max} = 38,5$ cm^3), ayant $M=200$ kgfm et $Q = 1$ t, est reproduit sur la fig. 160. L'allure irrégulière du tracé s'explique par une variation très brusque de l'épaisseur de la poutre à la jointure de l'aile et de l'âme de la poutre.

§ 52. Calcul de résistance en flexion

Dans le cas général de flexion d'une poutre pour lequel $M \neq 0$ et $Q \neq 0$ (fig. 161, *a*) les divers éléments sont soumis à des contraintes différentes en raison d'une répartition irrégulière des contraintes normales et tangentielles (fig. 161, *b*). Seules les fibres extérieures (éléments 1, 2, 12, 13, 14)

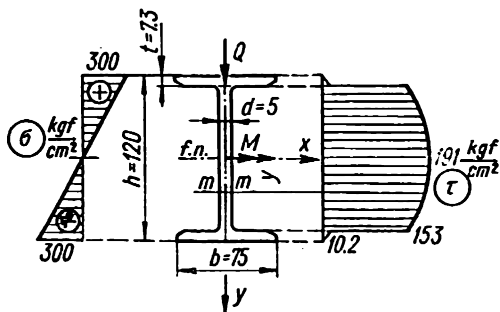


FIG. 160

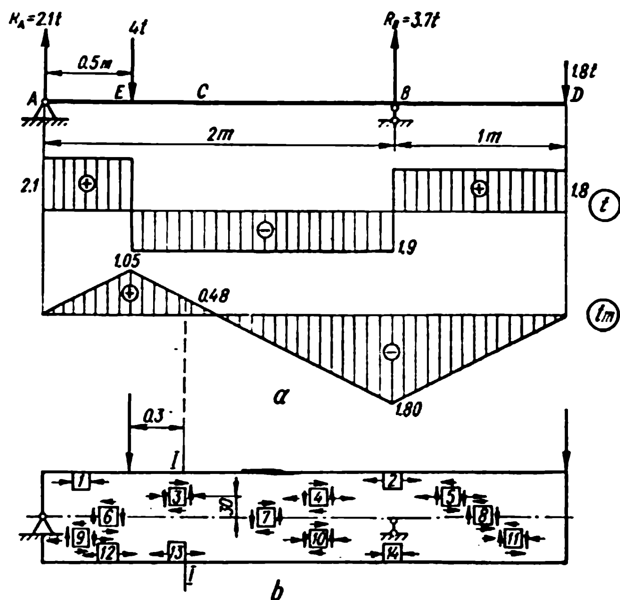


FIG. 161

se trouvent, dans ce cas, dans un état de contrainte linéaire (traction ou compression), tandis que tous les autres éléments prélevés sur la hauteur de la poutre (3-11) éprouvent un état de contrainte plan, les éléments (6, 7, 8) de la couche neutre se trouvant en état de cisaillement pur. On notera qu'en cas de déformation de flexion, les valeurs maximales des contraintes normales et celles des contraintes tangentielles se trouvent en des points différents de la section. Dans les points où σ est maximal (fibres extérieures de la poutre) $\tau = 0$, par contre, là où τ est maximal (couche neutre) $\sigma = 0$.

Il est donc logique de considérer séparément deux conditions de résistance se rapportant aux différents points d'une barre:

a) pour les contraintes normales

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} \leqslant [\sigma], \tag{10.19}$$

b) pour les contraintes tangentielles

$$\tau_{max} = \frac{Q_{max} S_{max}}{bJ} \leqslant [\tau]. \tag{10.20}$$

D'habitude on détermine à partir de la condition de résistance par rapport aux contraintes normales les dimensions de la poutre dont on a choisi d'avance la forme de la section transversale

$$W \geqslant \frac{M_{max}}{[\sigma]}, \tag{10.21}$$

et ensuite, on vérifie si la section choisie de la poutre satisfait à la condition de résistance par rapport aux contraintes tangentielles (10.20).

Cependant, pour les calculs des poutres, plus spécialement des poutres à forme optimale de la section assurant pour un poids minimal la résistance nécessaire (poutres en double T, en T, profilés en U et autres), une telle approche ne garantit pas ipso facto la résistance de la poutre. Très souvent dans des sections d'une poutre il existe des points supportant l'action simultanée d'importantes contraintes normales (voisines des contraintes maximales) et tangentielles.

En particulier, une telle combinaison de σ et τ se rencontre pour une poutre en double T en flexion dans la zone de jointure de l'aile et de l'âme (fig. 160). Dans des cas pareils il convient de vérifier la résistance de la poutre par rapport aux contraintes principales.

Dans le cas général d'un état de contrainte plan caractérisant un élément du matériau d'une poutre (par exemple, l'élément 5 de la fig. 161, *b*) qui est soumis à l'action de $\sigma_x = \sigma$ déterminé d'après la formule de Navier ainsi que de $\tau_\alpha = \tau_\beta = \tau$ déterminé d'après la formule de Jouravski et

quand $\sigma_\beta = 0$, les contraintes principales sont données par les formules (cf. § 33):

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2}\left[\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right]; \\ \sigma_2 &= 0; \\ \sigma_3 &= \frac{1}{2}\left[\sigma - \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (10.22)$$

Connaissant les contraintes principales on peut, se servant de diverses théories de résistance, exprimer les contraintes équivalentes lesquelles ne doivent pas dépasser les contraintes admissibles.

Ainsi, les conditions de résistance correspondant aux diverses théories de résistance peuvent être mises sous la forme (cf. § 37).

$$\sigma_{\text{éqI}} = \frac{1}{2}\left[\sigma + \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}\right] \leqslant [\sigma]; \qquad (10.23)$$

$$\sigma_{\text{éqII}} = 0{,}35\sigma + 0{,}65\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leqslant [\sigma] \text{ (pour } \mu = 0{,}3\text{)}; \qquad (10.24)$$

$$\sigma_{\text{éqIII}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leqslant [\sigma]; \qquad (10.25)$$

$$\sigma_{\text{éqIV}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leqslant [\sigma]; \qquad (10.26)$$

$$\sigma_{\text{éqM}} = \frac{1-m}{2}\sigma + \frac{1+m}{2}\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leqslant [\sigma], \qquad (10.27)$$

où

$$m = \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]}.$$

Quand on a à vérifier la résistance d'une poutre par rapport aux contraintes principales il s'avère souvent indispensable de connaître non seulement les valeurs des contraintes principales en tel point mais aussi leurs directions.

En particulier, cela s'impose quand on projette les poutres en béton armé dont l'armature doit être disposée de manière à résister à l'action des contraintes de traction. Pour n'importe quelle poutre on peut tracer une ligne dont la tangente caractérisera en un point quelconque la direction des contraintes principales. Cette courbe est appelée *trajectoire des contraintes principales*. La forme des trajectoires des contraintes principales dépend du type de la charge et des conditions de fixation de la poutre.

Il est évident que par chaque point de la poutre passent deux trajectoires des contraintes principales, respectivement σ_1 et σ_3, qui se coupent en formant un angle droit. Dans les poutres en béton armé on cherche d'ordinaire à disposer l'armature suivant la trajectoire des contraintes principales de traction (fig. 162).

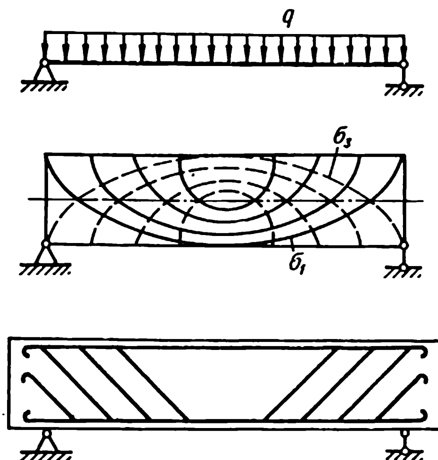


FIG. 162

§ 53. Concentration des contraintes en flexion

En flexion tout comme en traction ou en torsion c'est dans les endroits où la section transversale accuse des modifications les plus fortes de la forme ou des dimensions qu'on assiste à des concentrations des contraintes. Sous des charges statiques la concentration des contraintes dans des pièces faites en matériaux plastiques ne présente pas de danger grâce à une redistribution des contraintes dans la zone de concentration suite à l'écoulement du matériau. Pour des matières fragiles on ne peut plus compter sur la redistribution des contraintes ni fixer le plafond des contraintes maximales à la limite d'écoulement, aussi doit-on tenir compte de la concentration des contraintes pour des sollicitations statiques. Les contraintes maximales admissibles dans la zone d'un concentrateur ne doivent pas atteindre la limite d'écrouissage temporaire du matériau qui dans ce cas constitue bien sa résistance limite.

On peut tenir compte de l'influence d'une concentration qui apparaît en *l'endroit où le diamètre d'un arbre change brusquement* (fig. 163, *a*) par l'introduction d'un coefficient de concentration α:

$$\sigma_{max} = \alpha\sigma_{nom},$$

où $\sigma_{nom} = \frac{Pl}{W}$ est la valeur calculée pour un arbre de diamètre égal au plus petit diamètre de l'arbre étudié (fig. 163, *b*) en l'absence du concentrateur.

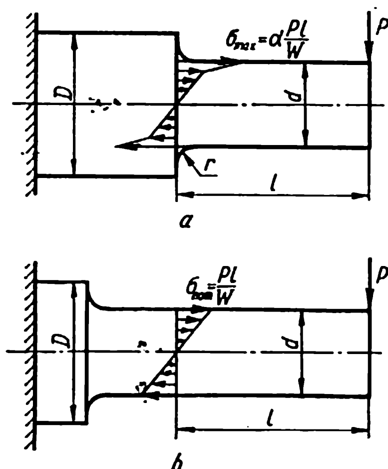


FIG. 163

Les valeurs du coefficient de concentration α pour différents rapports entre les diamètres $\frac{D}{d}$ et différents rayons de l'arrondi du congé r, calculées d'après des méthodes de la théorie de l'élasticité pour $\frac{D}{d} = 3$ et $\frac{D}{d} = 1{,}5$ sont présentées sous forme de graphiques $\alpha = f\left(\frac{r}{d}\right)$ sur la fig. 164.

Les contraintes maximales dans la zone du *concentrateur d'une plaque à deux entailles de forme hyperbolique* qui est soumise à la flexion pure dans

le plan de la plaque (fig. 165) peuvent être déterminées au moyen de la formule suivante établie par des méthodes de la théorie de l'élasticité:

$$\sigma_{max}=\sigma_{nom}\frac{4\frac{a}{\rho}\sqrt{\frac{a}{\rho}}}{3\left[\sqrt{\frac{a}{\rho}}+\left(\frac{a}{\rho}-1\right)\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{\rho}}\right]},$$

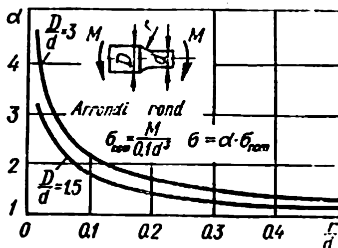


FIG. 164

où

$$\sigma_{nom}=\frac{3M}{2a^2\delta}\quad(\delta - \text{épaisseur de la plaque}).$$

La fig. 166 montre un diagramme donnant σ_{max} en fonction du quotient $\frac{a}{\rho}$. La fig. 167 montre, pour différents rapports de la longueur

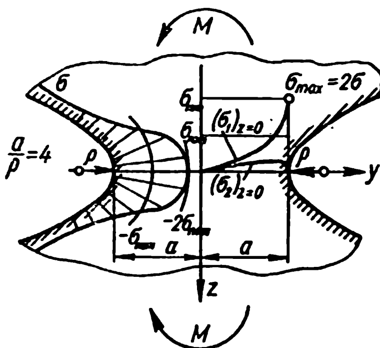


FIG. 165

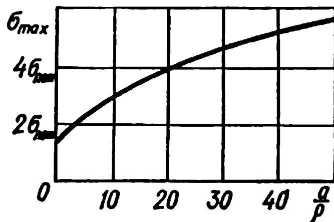


FIG. 166

de la plaque H à son épaisseur h au voisinage d'une entaille de rayon ρ, comment le coefficient théorique de concentration α dépend de la relation $\frac{\rho}{h}$.

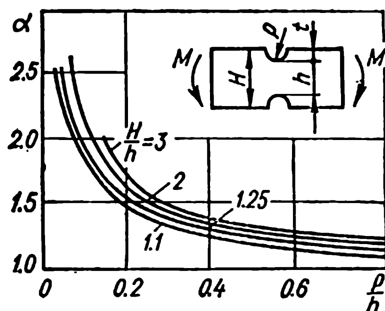


FIG. 167

La fig. 168 présente le diagramme de distribution des contraintes dans la zone d'un *concentrateur ayant la forme d'un orifice elliptique perforé dans une plaque large* se trouvant en flexion pure dans son propre plan

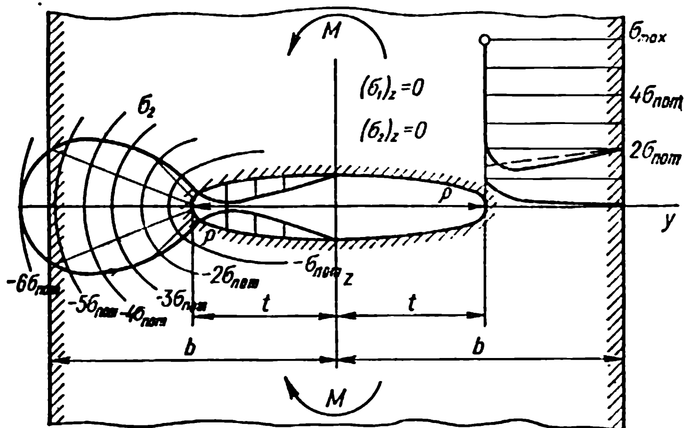


FIG. 168

pour le cas où $\frac{t}{\rho} = 25$. Au fur et à mesure qu'on s'éloigne du fond de l'entaille de même que dans le sens de l'axe y, les contraintes tombent rapidement. La ligne en pointillé montre la distribution des contraintes calculées à partir de la théorie élémentaire de flexion en tenant compte d'un affaiblissement de la section dû à la présence d'un orifice.

La contrainte maximale relevée près du fond de l'entaille peut être évaluée à l'aide de la formule

$$\sigma_{max} = \sigma_{nom}\left(1 + \sqrt{\frac{t}{\rho}}\right),$$

où

$$\sigma_{nom} = \frac{3Mt}{2\delta b^3} \quad (\delta \text{ — épaisseur de la plaque}).$$

Le diagramme de la fig. 169 est la représentation graphique de σ_{max} en fonction du quotient $\frac{t}{\rho}$.

Pour une section circulaire $\sigma_{max} = 2\sigma$. Pour $\rho \to \infty$ $\sigma_{max} \to \sigma$.

Pour une *entaille circulaire profonde pratiquée dans un corps de révolution* (fig. 170) la contrainte maximale en flexion se localise au voisinage du fond de l'entaille où le matériau est en état de contrainte volumique.

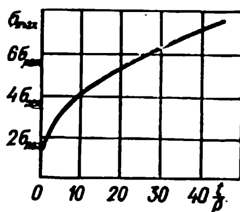


FIG. 169

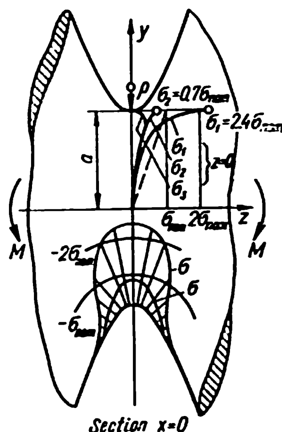


FIG. 170

La fig. 170 montre la distribution de l'ensemble des trois contraintes principales (σ_1, σ_2 et σ_3) et la fig. 171, la distribution des contraintes σ_1 et σ_2 au fond de l'entaille en fonction du quotient $\frac{a}{\rho}$ pour divers coefficients de Poisson.

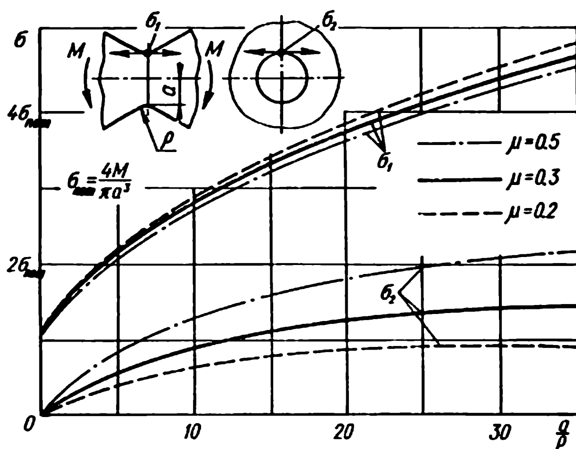


FIG. 171

Pour les *entailles peu profondes pratiquées dans des pièces de révolution*, la valeur du coefficient de concentration dépend principalement du rapport de l'arrondi r sur le diamètre de l'entaille. La fig. 172 donne une dépendance graphique de $\alpha = f\left(\frac{r}{d}\right)$ pour ce cas particulier.

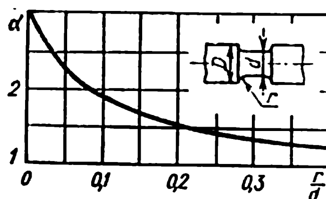


FIG. 172

Les concentrateurs assez répandus dans des pièces de machines travaillant à la flexion sont des *orifices transversaux* de différents types. Dans ce cas la concentration dépend du rapport du diamètre de l'orifice transversal d au diamètre D de la pièce dans laquelle cet orifice est pratiqué. La valeur de α en fonction de $\frac{d}{D}$ est donnée sous forme de diagramme sur la fig. 173.

Notons enfin qu'en flexion non seulement la concentration des contraintes normales mais aussi celle des contraintes tangentielles peuvent

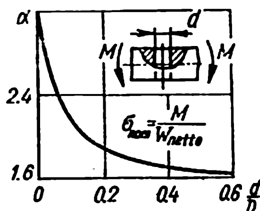


FIG. 173

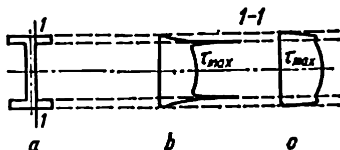


FIG. 174

se manifester aux endroits de passage brusque, c'est le cas notamment de la section 1-1 de la poutre en double T de la fig. 174, *a*, *b*. Cependant, la présence des arrondis aux jointures de l'aile et de l'âme de la poutre atténue la concentration des contraintes de sorte que celle-ci correspond non plus au diagramme de la fig. 174, *b* mais bien à celui de la fig. 174, *c*.

§ 54. Equation différentielle de l'axe curviligne d'une poutre (de la ligne élastique)

Il arrive en pratique qu'on ait à calculer les poutres en flexion non seulement à la résistance mais aussi à la rigidité ou à la déformabilité. La *déformabilité* de la poutre dans une section quelconque est caractérisée par la flèche w et l'angle de rotation θ. Les données relatives à w et θ en tant que fonctions de l'axe des coordonnées coïncidant avec l'axe de la poutre peuvent être obtenues si l'on connaît l'équation de l'axe curviligne de la poutre (la ligne élastique).

On appelle *ligne élastique* la courbe plane que décrit l'axe de la poutre en flexion plane. Les fig. 175 et 176 donnent les lignes élastiques en traits fins.

L'établissement de l'équation de la ligne élastique ne présente pas de difficultés à partir du moment où l'on connaît l'expression de la *courbure*

en fonction du moment fléchissant $M(z)$ pour la section choisie et la rigidité en flexion EJ de la section transversale de la poutre (cf. § 50)

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{M(z)}{EJ} \tag{10.28}$$

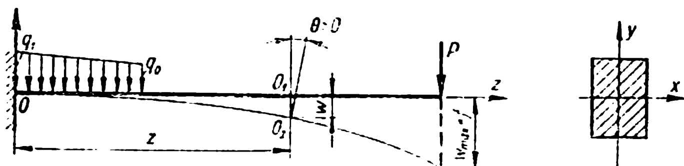


FIG. 175

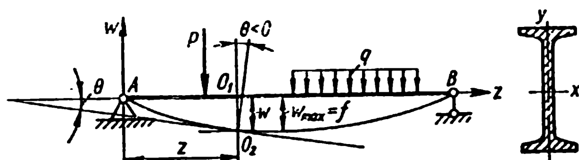


FIG. 176

de même que l'expression de la courbure en fonction des coordonnées w et z d'un point de la section considérée, expression qu'on connaît du cours des mathématiques supérieures:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\frac{d^2w}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dw}{dz}\right)^2\right]^{3/2}}. \tag{10.29}$$

On suppose ici que la courbure $\left(\frac{1}{\rho}\right)$ est positive, si la courbe est convexe dans le sens positif de l'axe w (fig. 177). Dans ce cas le signe de la courbure coïncide avec celui de la deuxième dérivée w. Dans la formule (10.28) le signe «plus» correspond à l'axe w dirigé vers le haut, et le signe «moins», vers le bas (cf. fig. 177).

Conservant la direction de l'axe w vers le haut, adoptée précédemment, on peut égaler les seconds membres des expressions (10.28) et

(10.29) en les affectant dans les deux cas du signe «plus». L'équation exacte de l'axe curviligne de la poutre s'écrira alors

$$\frac{\dfrac{d^2w}{dz^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dw}{dz}\right)^2\right]^{3/2}}=\frac{M(z)}{EJ}. \tag{10.30}$$

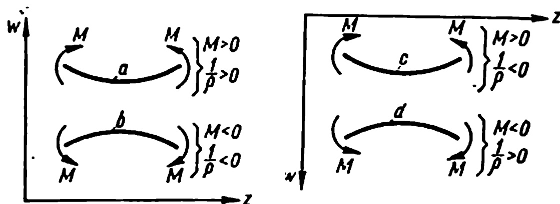


FIG. 177

Si l'axe w était dirigé vers le bas, on devrait affecter le deuxième membre de (10.30) du signe «moins».

Etant donné la faible valeur de la déformation de la poutre ($w_{max}=$ $=(0{,}01-0{,}001)\,l$ et $\theta_{max}\leqslant 1°$) on peut négliger le terme $\left(\dfrac{dw}{dz}\right)^2\approx\theta^2$ de la formule (10.30). L'équation différentielle (10.30) s'écrira alors

$$\frac{d^2w}{dz^2}=\frac{M(z)}{EJ}. \tag{10.31}$$

C'est là *l'équation différentielle initiale* (approximative) *de l'axe curviligne de la poutre* dont la solution doit fournir l'équation de la ligne élastique $w=f(z)$ et l'équation de l'angle de rotation $\theta=\dfrac{dw}{dz}=f_1(z)$.

Intégrant l'équation (10.31) une première fois, il vient

$$\theta(z)=\frac{dw}{dz}=\int\frac{M(z)}{EJ}\,dz+C_1. \tag{10.32}$$

Intégrant une seconde fois, il vient

$$w(z)=\int dz\int\frac{M(z)}{EJ}\,dz+C_1z+C_2, \tag{10.33}$$

où C_1 et C_2 sont les constantes de l'intégration à déterminer en fonction des conditions limites (conditions existant sur les bouts de la poutre).

Si l'un des bouts de la poutre est encastré (fig. 178) la flèche et l'angle de rotation sont nuls pour le bout encastré

$$w_B = 0; \quad \theta_B = 0.$$

Pour une poutre ayant deux appuis articulés (fig. 176) les flèches sur ces deux appuis sont nulles:

$$w_A = 0; \quad w_B = 0.$$

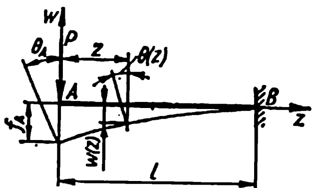


FIG. 178

Tenant compte de la dépendance différentielle entre le moment fléchissant $M(z)$ et la charge répartie (cf. § 18), il vient:

$$\frac{d^2M(z)}{dz^2} = q(z),$$

on peut écrire l'expression de la ligne élastique (10.31) sous la forme

$$\frac{d^2}{dz^2}\left[EJ(z)\,\frac{d^2w(z)}{dz^2}\right] = q(z). \qquad (10.34)$$

C'est sous cette forme que l'équation différentielle est d'ordinaire utilisée pour le calcul des poutres reposant sur un appui élastique ainsi que pour l'étude des vibrations des poutres.

Afin d'illustrer, par voie d'intégration de l'équation différentielle (10.31), l'établissement de l'équation de la ligne élastique $w = f(z)$ et de celle de l'angle de rotation $\theta = f(z)$ ainsi que pour déterminer les flèches maximales w_{max} et les angles θ_{max} (qui présentent une très grande importance pratique) étudions quelques exemples.

Pour une *console de section transversale constante soumise à l'action d'une force ponctuelle P sur son extrémité libre* (fig. 178), le moment fléchissant à une distance z de l'extrémité est

$$M(z) = -Pz,$$

et l'équation différentielle de l'axe curviligne de la console (fig. 10.31) prend la forme

$$\frac{d^2w}{dz^2} = -\frac{Pz}{EJ}.$$

Intégrant deux fois, il vient

$$\frac{dw}{dz} = \theta(z) = -\frac{Pz^2}{2EJ} + C_1,$$

$$w(z) = -\frac{Pz^3}{6EJ} + C_1 + C_2,$$

C_1 et C_2 se déterminent à partir des conditions limites:

$$\text{pour } z = l \quad w = 0;$$

$$\text{pour } z = l \quad \theta = 0.$$

D'après la deuxième condition on a

$$C_1 = \frac{Pl^2}{2EJ};$$

et d'après la première

$$C_2 = -\frac{Pl^3}{3EJ}.$$

L'équation de la flèche et celle de l'angle de rotation seront

$$w(z) = -\frac{Pl^3}{6EJ}\left[2 - 3\frac{z}{l} + \left(\frac{z}{l}\right)^3\right]; \qquad (10.35)$$

$$\theta(z) = \frac{Pl^2}{2EJ}\left[1 - \left(\frac{z}{l}\right)^2\right]. \qquad (10.36)$$

Les valeurs maximales de w et θ se situent au point A, sur l'extrémité libre de la poutre

$$w_{max} = f_A = -\frac{Pl^3}{3EJ}; \qquad (10.37)$$

$$\theta_{max} = \theta_A = \frac{Pl^2}{2EJ}. \qquad (10.38)$$

La valeur négative de f_A signifie que la flexion est dirigée dans le sens opposé à la direction positive de l'axe w, tandis que la valeur positive de θ montre que la rotation de la section se fait dans le sens opposé aux aiguilles d'une montre.

Pour la flexion d'une *poutre sollicitée par une charge uniformément répartie* q (fig. 179) *et ayant des appuis articulés à ses extrémités* l'expression du moment fléchissant est

$$M(z) = \frac{ql}{2}z - \frac{qz^2}{2};$$

l'équation différentielle de l'axe curviligne de la poutre (10.31) prend alors la forme

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{1}{EJ}\left(\frac{ql}{2}\cdot z - \frac{qz^2}{2}\right).$$

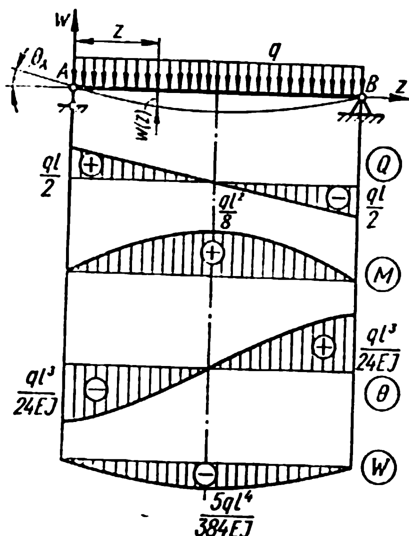


FIG. 179

Intégrant deux fois on obtient

$$\theta(z) = \frac{dw}{dz} = \frac{ql}{4EJ}z^2 - \frac{q}{6EJ}z^3 + C_1;$$

$$w(z) = \frac{ql}{12EJ}z^3 - \frac{qz^4}{24EJ} + C_1z + C_2.$$

Les conditions limites sont:

pour $z = 0$, $w = 0$;

pour $z = l$, $w = 0$.

D'après la première condition, $w(0) = C_2 = 0$; d'après la seconde

$$C_1 = -\frac{ql^3}{24EJ}.$$

Introduisant les valeurs de C_1 et C_2 dans les expressions pour $w(z)$ et $\theta(z)$ on obtient l'équation de la ligne élastique et celle de l'angle de rotation

$$\left.\begin{aligned} w(z) &= -\frac{ql^3 z}{24EJ}\left[1 - 2\left(\frac{z}{l}\right)^2 + \left(\frac{z}{l}\right)^3\right]; \\ \theta(z) &= -\frac{ql^3}{24EJ}\left[1 - 6\left(\frac{z}{l}\right)^2 + 4\left(\frac{z}{l}\right)^3\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (10.39)$$

La valeur maximale de la flèche coïncide avec le milieu de la travée

$$w_{max} = f = -\frac{5}{384}\frac{ql^4}{EJ}. \qquad (10.40)$$

La valeur maximale de l'angle de rotation coïncide avec les appuis

$$\theta(0) = \theta_A = -\frac{ql^3}{24EJ}; \qquad (10.41)$$

$$\theta_A = -\theta_B.$$

On trouve au tableau 20 l'équation de l'axe curviligne de la poutre, les valeurs des flèches maximales et celles des angles de rotation maximaux des sections d'appui pour divers schémas d'application de la charge sur les poutres les plus simples.

Lorsqu'on détermine les déplacements des sections des poutres il est parfois utile de se servir de la *méthode grapho-analytique* fondée sur l'analogie qui existe entre l'équation différentielle de la ligne élastique (10.31) et la relation différentielle (3.3) qui lie le moment fléchissant à l'intensité de la charge répartie. Ladite analogie permet de calculer la flèche w, si l'on connaît $\frac{M(z)}{EJ}$, tout comme on calcule $M(z)$ connaissant $q(z)$. L'ordonnée du diagramme réel $M(z)$ divisée par EJ est considérée comme l'intensité d'une *certaine charge fictive*

$$q_f(z) = \frac{M(z)}{EJ}.$$

La flèche $w(z)$ et l'angle de rotation $\theta(z)$ recherchés de la poutre donnée (la poutre réelle) sont alors déterminés respectivement comme le moment fléchissant $M_f(z)$ et l'effort tranchant $Q_f(z)$ dans une section z de la poutre fictive, suite à l'action de la charge fictive q_f.

Pour une poutre de section transversale constante, en guise d'intensité de la force fictive, il est plus commode d'adopter une quantité de EJ fois plus grande, autrement dit, l'ordonnée du diagramme réel de $M(z)$

$$\bar{q}_f(z) = M(z).$$

Dans ce cas

$$\left.\begin{aligned} w(z) &= \frac{\bar{M}_f(z)}{EJ}; \\ \theta(z) &= \frac{\bar{Q}_f(z)}{EJ}. \end{aligned}\right\} \qquad (10.42)$$

$\bar{M}_f(z)$ et $\bar{Q}_f(z)$ étant respectivement le moment fléchissant et l'effort tranchant dans une poutre fictive, suite à l'action de la charge fictive $\bar{q}_f(z)$ égale au diagramme $M(z)$ de la poutre réelle.

La poutre fictive a des tronçons de longueur égale à celle des tronçons de la poutre réelle et ses appuis sont choisis de façon à satisfaire les conditions de déformation de la poutre réelle. Au tableau 17 on trouve des combinaisons entre les fixations des appuis de la poutre réelle et de la poutre fictive.

L'ordre à suivre pour déterminer la déformation est le suivant. On trace le diagramme du moment fléchissant de la poutre réelle; on choisit le schéma correspondant de la poutre fictive; la poutre fictive est soumise à une sollicitation représentée par le diagramme du moment fléchissant de la poutre réelle; dans la section choisie de la poutre fictive, on détermine les moment fléchissants fictifs $\bar{M}_f(z)$ et l'effort tranchant $\bar{Q}_f(z)$ à l'aide des formules (10.42) et l'on calcule la flèche et l'angle de rotation pour la section choisie *).

Lors du calcul des $M_f(z)$ et des $Q_f(z)$ dans le cas où le diagramme du moment fléchissant dans la poutre réelle qui doit représenter la charge fictive accuse une configuration compliquée, on le subdivise en figures plus simples (voir par exemple la fig. 240) dont on connaît les aires et les positions des centres de gravité (tableau 23).

§ 55. Détermination des déplacements dans les poutres par la méthode de paramètres initiaux

La détermination des déplacements par la méthode d'intégration directe de l'équation différentielle de la ligne élastique pour le cas de poutres ayant un nombre important de tronçons dont chacun possède sa propre

---

*) La méthode grapho-analytique exposée plus haut, dite aussi *méthode de Mohr* et fondée sur l'identité des équations différentielles, n'est pas la seule possible. On a récemment proposé d'autres analogies permettant de substituer à la détermination des facteurs de force et de déformation dans une barre donnée la détermination de ces facteurs dans une autre barre (fictive) (cf. Annexe, p. 785).

équation du moment fléchissant présente des difficultés considérables dues à la nécessité de déterminer les constantes arbitraires d'intégration. Quand on intègre les équations différentielles pour n tronçons on a affaire à $2n$ constantes d'intégration. Ajoutant aux deux conditions principales aux extrémités de la poutre $2(n-1)$ conditions faisant état d'une conjugaison continue et régulière des tronçons de la ligne élastique, on doit établir $2n$ équations qui serviront à déterminer ces constantes arbitraires.

La tâche devient très ardue même pour trois tronçons. On peut sensiblement simplifier la technique de calcul des constantes d'intégration en la ramenant à la détermination de deux inconnues seulement: la flèche et l'angle de rotation pour une origine des coordonnées choisie. Cette méthode appelée *méthode des paramètres initiaux* est fondée sur les principes suivants:

1. L'origine des coordonnées est choisie au point situé à l'extrême gauche de la poutre étudiée; cette origine sera commune pour tous les tronçons.

2. L'expression pour le moment fléchissant $M(z)$ est obtenue en calculant les moments créés par les forces situées à gauche de la section considérée à une distance z de l'origine des coordonnées.

3. Si l'on introduit dans l'équation un moment extérieur concentré M appliqué à une distance a de l'origine des coordonnées on le multiplie par un facteur $(z-a)^0$ égal à 1.

4. Dans le cas où il y a discontinuité de la charge répartie (par exemple dans la section $z = d$ sur la fig. 180, *b*) on la prolonge jusqu'au bout du tronçon considéré; pour compenser alors la charge réelle qui sollicite la poutre on introduit une charge compensatrice de sens inverse (la charge supplémentaire extrapolée et la charge compensatrice sont d'habitude indiquées en pointillés).

5. Pour tous les tronçons on fait l'intégration sans ouvrir les parenthèses.

Avec une telle approche l'expression du moment fléchissant fatiguant un tronçon quelconque est représentée à l'aide des facteurs de force agissant à gauche de la section considérée y compris le moment fléchissant M_0 et l'effort tranchant Q_0 sollicitant la section qui coïncide avec l'origine des coordonnées. Les grandeurs M_0 et Q_0 ainsi que la flèche w_0 et l'angle de rotation θ_0 relevés à l'origine des coordonnées sont appelés *paramètres initiaux*. Le moment fléchissant pour la poutre représentée sur la fig. 180, *a*

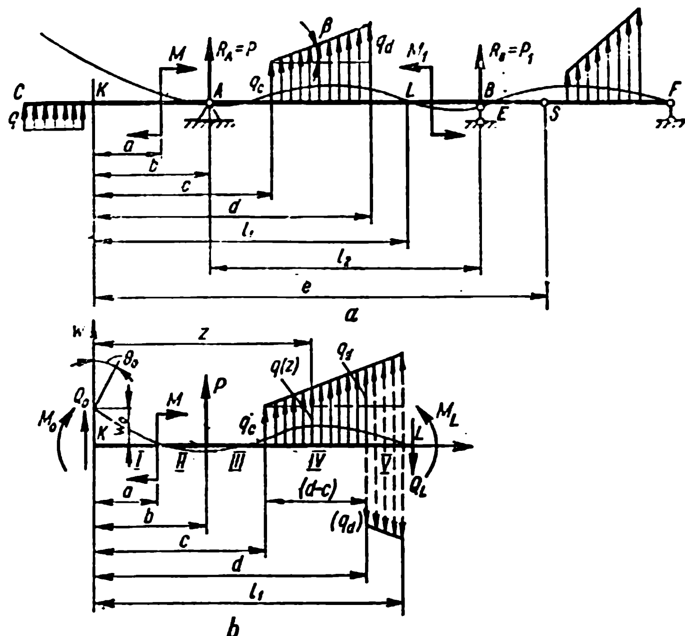


FIG. 180

avec l'origine des coordonnées choisie au point K à une distance z (dans le quatrième tronçon de la poutre) est

$$M(z) = M_0 + Q_0 z + M(z-a)^0 + P(z-b) +$$

$$+ q_c \frac{(z-c)^2}{2} + k \frac{(z-c)^3}{6},$$

où

$$k = \operatorname{tg} \beta = \frac{q_d - q_c}{d - c}.$$

Après l'introduction du moment fléchissant dans l'équation différentielle (10.31), sa double intégration et la détermination des constantes d'intégration qui s'avèrent être les paramètres initiaux

$$C_1 = \theta_0 \quad \text{et} \quad C_2 = w_0,$$

les équations $\theta(z) = f_1(z)$ et $w(z) = f(z)$ peuvent être écrites sous leur forme la plus générale de la manière suivante:

$$\theta(z) = \theta_0 + \frac{1}{EJ}\left[M_0 \frac{z}{1!} + \sum M \frac{(z-a)}{1!} + Q_0 \frac{z^2}{2!} + \right.$$
$$+ \sum P \frac{(z-b)^2}{2!} + \sum q_c \frac{(z-c)^3}{3!} - \sum q_d \frac{(z-d)^3}{3!} +$$
$$\left. + \sum k \frac{(z-c)^4}{4!} - \sum k \frac{(z-d)^4}{4!}\right]; \qquad (10.43)$$

$$w(z) = w_0 + \theta_0 z + \frac{1}{EJ}\left[M_0 \frac{z^2}{2!} + \sum M \frac{(z-a)^2}{2!} + \right.$$
$$+ Q_0 \frac{z^3}{3!} + \sum P \frac{(z-b)^3}{3!} + \sum q_c \frac{(z-c)^4}{4!} -$$
$$\left. - \sum q_d \frac{(z-d)^4}{4!} + \sum k \frac{(z-c)^5}{5!} - \sum k \frac{(z-d)^5}{5!}\right]. \qquad (10.44)$$

L'équation ainsi obtenue (10.44) est généralement appelée *équation universelle de la ligne élastique*, car elle peut être utilisée pour tous les schémas de calcul des poutres.

On introduit dans les équations (10.43) et (10.44) les charges situées à gauche de la section considérée, les signes respectifs des termes d'addition étant déterminés par ceux des facteurs de force. Ainsi, la détermination des déplacements par la méthode des paramètres initiaux se ramène en définitive à la détermination des valeurs des paramètres initiaux Q_0, M_0, θ_0 et w_0. Ce faisant, on détermine les paramètres initiaux statiques Q_0 et M_0 de la condition d'équilibre de la poutre et les paramètres initiaux géométriques θ_0 et w_0 des conditions existant aux appuis. Pour déterminer les paramètres initiaux Q_0 et M_0 on peut se servir des données du tableau 9; pour les paramètres θ_0 et w_0, des données du tableau 20.

Utilisons l'équation universelle que nous venons d'établir pour calculer les flèches de la console (fig. 181, *a*, *b*) en des points $z = a$ et $z = 2a$. L'équation de la ligne élastique pour le tronçon où la charge q est appliquée a la forme suivante

$$w(z) = w_0 + \theta_0 z + \frac{1}{EJ}\left[M_0 \frac{z^2}{2!} + Q_0 \frac{z^3}{3!} - q \frac{z^4}{4!}\right].$$

D'après la condition d'équilibre de la poutre on a

$$M_0 = M_A = -\frac{qa^2}{2};$$
$$Q_0 = R_a = qa.$$

Comme l'origine des coordonnées coïncide avec le point de fixation, les paramètres initiaux géométriques — flexion et angle de rotation à l'origine des coordonnées — sont nuls:

$$w_0 = 0; \quad \theta_0 = 0.$$

L'équation des flèches pour le premier tronçon *AC* est donc

$$w(z) = \frac{1}{EJ}\left[-\frac{qa^2}{2}\frac{z^2}{2!} + \frac{qaz^3}{3!} - \frac{qz^4}{4!}\right].$$

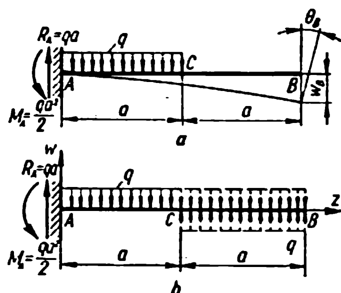


FIG. 181

Pour $z = a$

$$w_C = -\frac{qa^4}{8EJ}.$$

L'équation des flèches pour le second tronçon *CB* est

$$w(z) = \frac{1}{EJ}\left[-\frac{qa^2}{2}\frac{z^2}{2!} + qa\frac{z^3}{3!} - q\frac{z^4}{4!} + q\frac{(z-a)^4}{4!}\right].$$

Posant $z = 2a$ on a pour la flèche de l'extrémité libre

$$w_B = -\frac{7qa^4}{24EJ}.$$

Après avoir déterminé les flèches et les angles de rotation on peut vérifier la rigidité de la poutre et choisir sa section à partir de la condition de rigidité:

$$w_{max} = f < [f].$$

Les valeurs admissibles des flèches $[f]$ sont établies en fonction des conditions d'exploitation ou à partir des données expérimentales.

Dans le cas d'un calcul du déplacement des poutres dotées d'une articulation intermédiaire, les équations universelles (10.43) et (10.44) doivent être écrites sous la forme suivante:

$$\theta(z) = \theta_0 + \alpha(z-e)^0 + \frac{1}{EJ}\left[M_0\frac{z}{1!} + \sum M\frac{(z-a)}{1!} + Q_0\frac{z^2}{2!} + \sum P\frac{(z-b)^2}{2!} + \sum q_c\frac{(z-c)^3}{3!} - \sum q_d\frac{(z-d)^3}{3!} + \sum k\frac{(z-c)^4}{4!} - \sum k\frac{(z-d)^4}{4!}\right], \quad (10.45)$$

$$w(z) = w_0 + \theta_0 z + \alpha(z-e) + \frac{1}{EJ}\left[M_0\frac{z^2}{2!} + \sum M\frac{(z-a)^2}{2!} + Q_0\frac{z^3}{3!} + \sum P\frac{(z-b)^3}{3!} + \sum q_c\frac{(z-c)^4}{4!} - \sum q_d\frac{(z-d)^4}{4!} + \sum k\frac{(z-c)^5}{5!} - \sum k\frac{(z-d)^5}{5!}\right], \quad (10.46)$$

où α est l'angle dont diffèrent les angles de rotation des barres aboutissant à l'articulation intermédiaire, c'est-à-dire

$$\theta(e)_g + \alpha = \theta(e)_{dr},$$

où $\theta(e)_{dr}$ est l'angle de rotation de la barre droite au point S (fig. 180); $\theta(e)_g$, l'angle de rotation de la barre gauche dans la même articulation S.

Les termes d'addition accompagnés du facteur $(z-j)<0$, avec $j = a, b, c, d$, ne sont pas pris en considération dans les calculs. L'angle d'inclinaison réciproque α constitue une inconnue supplémentaire dans les équations (10.45) et (10.46). Tout comme les paramètres initiaux w_0 et θ_0, l'angle α se détermine à partir des conditions existant sur les appuis. En fonction du schéma de calcul adopté pour la poutre on peut envisager deux cas fondamentaux de représentation des conditions d'appuis:

1. L'angle de rotation α peut être déterminé en supposant nulle la flèche sur l'appui droit (fig. 182).

2. L'angle α est déterminé avec θ_0 en posant nulles les flèches sur les appuis B et C et en résolvant le système de deux équations algébriques (fig. 183).

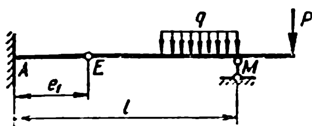


FIG. 182

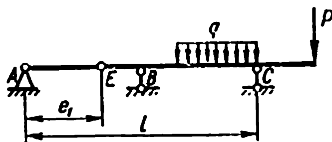


FIG. 183

§ 56. Calcul à la résistance et à la rigidité des poutres de section variable

Barres à gradins. Pour le calcul à la résistance d'une barre à gradins réalisée en matériau plastique la condition de résistance s'écrit

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} \leqslant [\sigma]. \tag{10.47}$$

Pour les barres en matière fragile on doit tenir compte de la concentration des contraintes aux jonctions de deux sections de diamètres différents. Dans ce cas la condition de résistance doit s'écrire sous la forme

$$\sigma_{max} = \alpha\sigma_n = \alpha \frac{M}{W} \leqslant [\sigma], \tag{10.48}$$

où α est le coefficient théorique de concentration des contraintes (cf. Appendice 2). Dans les deux formules, W est le moment résistant de la section affaiblie.

Pour déterminer la déformation de la poutre à gradins (fig. 184, *a*) on doit écrire l'équation différentielle de l'axe curviligne de la poutre pour chaque gradin dont les rigidités en flexion des sections transversales sont respectivement EJ_1; EJ_2; EJ_3;...:

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{M(z)}{EJ_1}; \quad \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{M(z)}{EJ_2}; \quad \frac{d^2w}{dz^2} = \frac{M(z)}{EJ_3}, \ldots \tag{10.49}$$

Substituons à la poutre à gradins une poutre équivalente de section constante ayant pour moment d'inertie J_0 égal au moment d'inertie d'un des tronçons de la poutre, du second par exemple $J_0 = J_2$. Multipliant

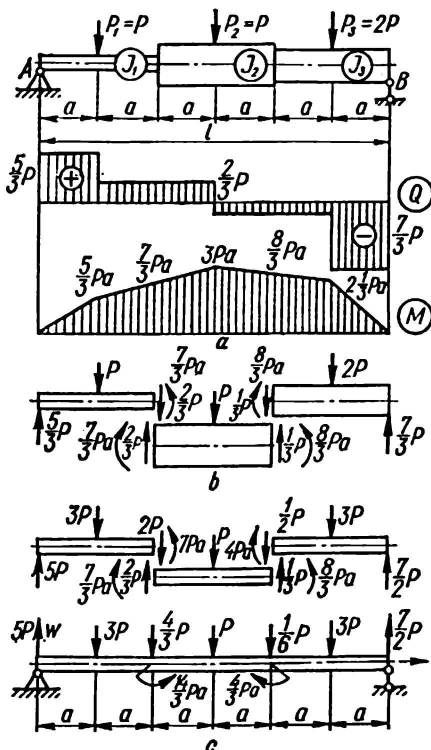


FIG. 184

par J_0 le numérateur et le dénominateur du deuxième membre de l'équation différentielle (10.49) écrite pour un tronçon quelconque n, il vient

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{M(z)}{EJ_n}\frac{J_0}{J_0} = \frac{M(z)}{EJ_0}\frac{J_0}{J_n} = \frac{M(z)}{EJ_0}\beta_n, \qquad (10.50)$$

où $\beta_n = \frac{J_0}{J_n}$ est le coefficient de réduction. Dans l'exemple reproduit sur la fig. 184 $J_1 : J_2 : J_3 = 1 : 3 : 2$ et $\beta_1 = 3$; $\beta_2 = 1$; $\beta_3 = \frac{3}{2}$.

Comme le moment fléchissant est une fonction linéaire de la charge, ce sont toutes les charges extérieures de cette partie avec les efforts internes Q et M aux jonctions des gradins qu'on peut multiplier par le coefficient de réduction au lieu du moment fléchissant et cela quelle que soit la partie du segment de la poutre (fig. 184, *b*, *c*). Joignant diverses parties entre elles et additionnant les efforts internes existant aux jonctions, on obtient une poutre de section constante ayant EJ_0 comme rigidité en flexion et sollicitée par des charges extérieures réduites (c'est-à-dire multipliée par β_n). Cela étant, ce sera aux jonctions qu'on observera de brusques variations des efforts tranchants et des moments fléchissants, variations égales respectivement à

$$\Delta Q_1 = Q_1(\beta_2 - \beta_1); \qquad \Delta Q_2 = Q_2(\beta_3 - \beta_2);$$
$$\Delta M_1 = M_1(\beta_2 - \beta_1); \quad \Delta M_2 = M_2(\beta_3 - \beta_2).$$

Aux jonctions des parties de la poutre il convient d'appliquer des efforts et des moments concentrés supplémentaires qu'on détermine à l'aide de formules réduites.

La poutre équivalente ainsi obtenue (fig. 184, *d*) possède une ligne élastique coïncidant complètement avec celle de la poutre à gradins considérée (fig. 184, *a*).

Les déplacements d'une telle poutre peuvent être évalués en intégrant l'équation différentielle

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{M_{réd}(z)}{EJ_0}, \qquad (10.51)$$

où $M_{réd}$ est le moment créé par les charges extérieures réduites et les charges supplémentaires ΔQ et ΔM que l'on détermine comme pour une poutre ordinaire chargée d'après le schéma de la fig. 184, *d*. Pour évaluer w et θ on peut utiliser aussi les équations universelles (10.43) et (10.44) de la méthode des paramètres initiaux, en considérant la poutre réduite comme une poutre ayant une section constante et une rigidité en flexion de la section transversale égale à EJ_0.

Poutres à section variant de façon continue sur leur longueur. Si les dimensions de la section d'une poutre varient de façon continue le long de son axe longitudinal, les formules établies à partir de l'hypothèse des sections transversales planes ne se vérifient plus comme d'ailleurs cette hypothèse elle-même. Cependant comme en témoignent les résultats des calculs faits à l'aide des méthodes de la théorie de l'élasticité, dans le cas où l'angle d'inclinaison de la génératrice de la surface de la barre par rapport à son axe ne dépasse pas 15 à 20°, la distribution des contraintes normales sur la hauteur de la section peut être considérée com-

me linéaire. Aussi peut-on naturellement se servir de la condition de la résistance ordinaire ainsi que de l'équation différentielle de la ligne élastique

$$\sigma_{max} = \frac{M(z)}{W(z)} \leqslant [\sigma]; \tag{10.52}$$

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{M(z)}{EJ(z)}. \tag{10.53}$$

Les erreurs que donne le calcul des contraintes tangentielles à l'aide de la formule de Jouravski

$$\tau = \frac{QS(y)}{b(z)J(z)} \tag{10.54}$$

sont dans ce cas plus importantes que pour le calcul des contraintes normales d'après la formule de Navier

$$\sigma = \frac{M(z)y}{J(z)}. \tag{10.55}$$

La formule (10.53) qui est l'équation différentielle de la flèche d'une poutre de section variable peut être écrite sous la forme

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{M_{réd}(z)}{EJ_0}, \tag{10.56}$$

où $M_{réd}(z) = \frac{J_0}{J(z)} M(z)$ est le moment fléchissant réduit dont la signification diffère de $M_{réd}$ qui entre dans la formule (10.51); J_0, moment d'inertie d'une section quelconque, qui est d'habitude soit minimal soit maximal.

La poutre dont le moment de résistance varie proportionnellement au moment fléchissant dû à l'action des charges extérieures est appelée *poutre d'égale résistance en flexion*. Une telle poutre est calculée à l'aide de la formule

$$W(z) = \frac{M(z)}{[\sigma]}. \tag{10.57}$$

Dans une poutre d'égale résistance en flexion, les contraintes maximales dans une section quelconque sont identiques et égales aux contraintes admissibles $[\sigma]$. A titre d'exemple d'une poutre d'égale résistance on peut

citer la console de la fig. 185 qui a une largeur constante b et une hauteur variable $h(z)$ pouvant être déterminée de la formule (10.57). Ainsi

$$W(z) = \frac{bh^2(z)}{6} = \frac{M(z)}{[\sigma]} = \frac{Pz}{[\sigma]},$$

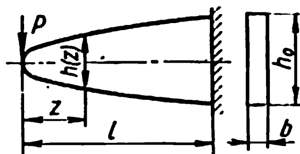


FIG. 185

d'où on tire

$$h(z) = \sqrt{\frac{6P}{b[\sigma]}} \cdot \sqrt{z}. \qquad (10.58)$$

Par conséquent, la hauteur de la poutre varie selon une loi parabolique atteignant son maximum en l'endroit de l'encastrement:

$$h_0 = h(l) = \sqrt{\frac{6P}{b[\sigma]}} \cdot \sqrt{l}.$$

Puisque d'après (10.58) au point d'application de la force ($z = 0$) $h(0) = 0$, la hauteur de la section frontale se détermine à partir de la condition de cisaillement

$$\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{P}{F} = \frac{3}{2}\frac{P}{bh} < [\tau],$$

d'où on tire

$$h \geqslant \frac{3P}{2b[\tau]}.$$

Les poutres de configuration parabolique (très pratiques du point de vue de l'économie du matériau) sont rarement utilisées à cause des difficultés que présente leur fabrication. En pratique on utilise souvent les poutres d'égale résistance en flexion qui ont une hauteur constante h et une largeur $b(z)$ variable (fig. 186).

La loi de variation de la largeur $b(z)$ est donnée par (10.57). On a alors

$$W(z) = \frac{b(z)h^2}{6} = \frac{M(z)}{[\sigma]} = \frac{Pz}{2[\sigma]},$$

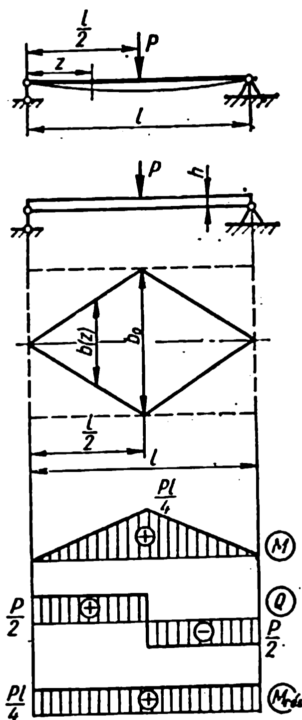


FIG. 186

d'où on obtient une dépendance linéaire

$$b(z) = \frac{3P}{h^2[\sigma]} z.$$

Pour $z = \frac{l}{2}$

$$b_0 = b\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{3Pl}{2h^2[\sigma]}.$$

La flèche maximale d'une telle poutre d'égale résistance en flexion s'évalue d'après (10.56). Connaissant J_0, $J(z)$ et leur rapport

$$J_0 = \frac{b_0h^3}{12}; \quad J(z) = \frac{b(z)h^3}{12};$$

$$\frac{J_0}{J(z)} = \frac{b_0}{b(z)} = \frac{l}{2z},$$

on peut déterminer le moment réduit

$$M_{réd}(z) = \frac{M(z)}{J(z)} J_0 = \frac{Pz}{2} \frac{J_0}{J(z)} = \frac{Pl}{4}.$$

Introduisant $M_{réd}$ dans (10.56), il vient

$$\frac{d^2w}{dz^2} = \frac{Pl}{4EJ_0}.$$

Après avoir intégré deux fois, on trouve

$$\frac{dw}{dz} = \theta(z) = \frac{1}{EJ_0}\left(\frac{Pl}{4} z + C_1\right);$$

$$w(z) = \frac{1}{EJ_0}\left(\frac{Plz^2}{8} + C_1z + C_2\right).$$

Les constantes d'intégration C_1 et C_2 s'obtiennent de la condition

$$w(0) = 0; \quad \theta\left(\frac{l}{2}\right) = 0,$$

d'où on tire

$$C_1 = -\frac{Pl^2}{8}; \quad C_2 = 0.$$

Alors

$$w(z) = \frac{1}{EJ_0}\left(\frac{Pl}{8}z^2 - \frac{Pl^2}{8}z\right),$$

et

$$w_{max} = f = w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{Pl^3}{32EJ_0}.$$

On voit que la flèche maximale d'une poutre d'égale résistance en flexion est 1,5 plus importante que la flèche d'une poutre de section constante ayant pour rigidité en flexion EJ_0.

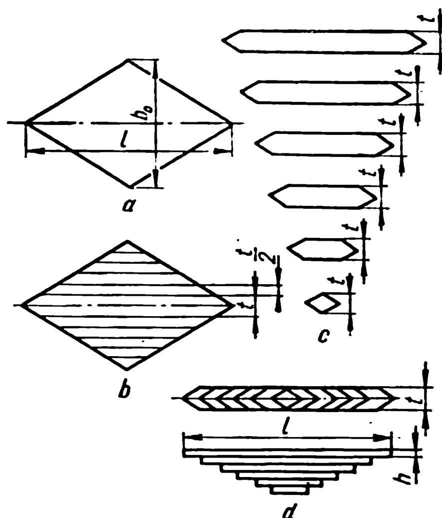


FIG. 187

La théorie exposée ci-dessus permet un degré d'approximation suffisant dans le calcul des ressorts (fig. 187, *a*, *b*, *c*, *d*).

Dans ce cas la largeur des sections frontales de la poutre s'évalue d'après la condition de cisaillement (fig. 188, *a*, *b*)

$$\tau_{max} = \frac{P}{F} = \frac{P}{b_\tau h} \leqslant [\tau],$$

d'où on tire

$$b_\tau = \frac{P}{h[\tau]}.$$

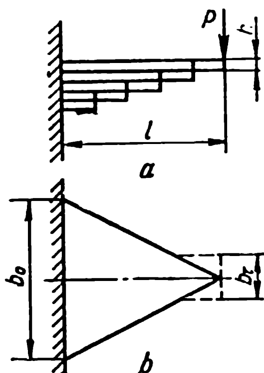


FIG. 188

Les formules qui servent au calcul des dimensions de la section transversale et de la flèche maximale des poutres d'égale résistance sont consignées au tableau 18. Le tableau 19 contient les équations de la ligne élastique et des angles de rotation des sections transversales d'une poutre cantilever ayant une hauteur variable, pour certains cas d'application de la charge.

§ 57. Calcul à la flexion tenant compte des forces d'inertie

L'effet des forces d'inertie est à prendre en considération lorsqu'on calcule les éléments des structures soumises à de fortes accélérations. A titre d'exemple considérons une bielle de connexion *AB* (fig. 189) reliant deux essieux dont l'un (O_1) est moteur. Un élément quelconque de la bielle de connexion qui décrit une circonférence de rayon *r* avec la vitesse angulaire égale à ω subit une accélération centripète égale à $\omega^2 r$. L'intensité de l'effort réparti le long de la bielle de connexion s'exprime par

$$q_i = \frac{\gamma F}{g} \omega^2 r,$$

où F est l'aire de la section transversale de la bielle de connexion; γ, le poids spécifique du matériau, g, l'accélération de la pesanteur.

La position la plus dangereuse de la bielle de connexion est la position la plus basse A_1B_1 pour laquelle les charges dues aux forces d'inertie q_i et au poids propre q_{pp} s'additionnent:

$$q_{max} = q_i + q_{pp} = \frac{\gamma F}{g} \omega^2 r + \gamma F = \gamma F \left(1 + \frac{\omega^2 r}{g}\right).$$

Assimilant la bielle de connexion à une poutre posée sur deux appuis articulés, trouvons le moment fléchissant maximum

$$M_{max} = \frac{q_{max} l^2}{8} = \frac{\gamma F l^2}{8} \left(1 + \frac{\omega^2 r}{g}\right)$$

et la contrainte maximale

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{F}{W} \frac{\gamma l^2}{8} \left(1 + \frac{\omega^2 r}{g}\right).$$

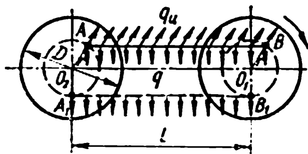


FIG. 189

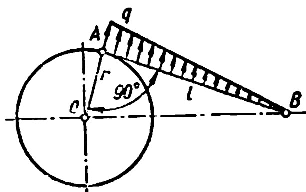


FIG. 190

On doit également tenir compte des forces d'inertie en calculant la bielle d'une machine à piston (fig. 190). Cette bielle est sollicitée par une charge d'inertie répartie qui varie suivant une loi linéaire comme le montre la figure. L'intensité maximale de la charge d'inertie s'observe au point A lorsque la bielle forme avec la manivelle un angle de 90°:

$$q_{max} = \frac{\gamma F}{g} \omega^2 r,$$

où r est le rayon de la manivelle.

Le moment fléchissant maximal dans la bielle (qu'on assimile à une poutre aux appuis articulés) se localise, comme on sait, à une distance $\frac{l}{\sqrt{3}}$ du point B:

$$M_{max} = \frac{q_{max} l^2}{9\sqrt{3}},$$

et la contrainte maximale

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W}.$$

Introduisant q_{max}, il vient

$$\sigma_{max} = \frac{q_{max} l^2}{9\sqrt{3}\,W} = \frac{F\gamma l^2 \omega^2 r}{9\sqrt{3}\,W}.$$

§ 58. Contraintes tangentielles dans des poutres-profilés à paroi mince en flexion. Centre de flexion.

La formule de Jouravski donne de bons résultats dans les cas où la largeur de la poutre (de section *mn*, fig. 191) est suffisamment petite par rapport à la hauteur *h*.

Dans les sections m_1n_1 des ailes d'un profilé à paroi mince (fig.191,*c*, *d*,*f*), les contraintes τ parallèles à l'effort Q sont suffisamment petites pour qu'on puisse se permettre de les négliger. Mais dans ces ailes apparaissent des contraintes tangentielles τ_{aile} qui sont perpendiculaires à l'effort Q. Tenant compte de la faible épaisseur de l'aile t on peut estimer que les contraintes tangentielles τ_{aile} sont réparties uniformément dans l'épaisseur de l'aile. Leur valeur s'obtiendra alors à l'aide de la formule

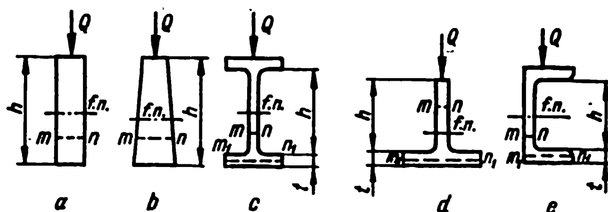


FIG. 191

$$\tau_{aile} = \frac{QS(x)}{Jt}, \tag{10.59}$$

établie à partir des conditions d'équilibre d'un élément dz de l'aile d'un profilé en double T (fig. 192) pour lequel le moment statique est

$$S(x) = \left(\frac{b}{2} - x\right) t \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2}\right). \tag{10.60}$$

Comparant les formules (10.59) et (10.60) on s'aperçoit que la loi de distribution des contraintes tangentielles sur la largeur de l'aile est déterminée par celle de variation du moment statique $S(x)$, en d'autres mots les τ_{aile} se répartissent suivant une loi linéaire.

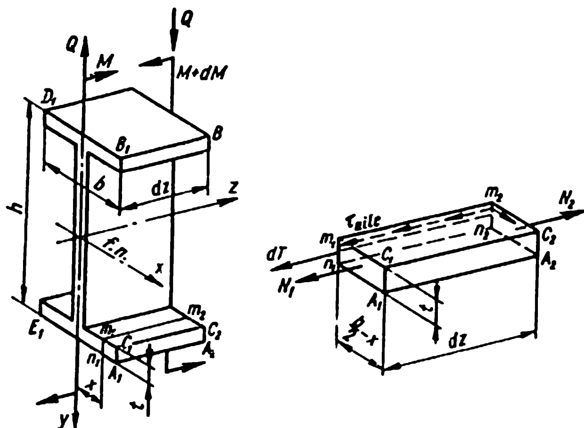


FIG. 192

Les diagrammes des contraintes tangentielles tracés pour un profilé en double T n° 20 des Normes pour $Q = 10\ 000$ kgf sont reproduits sur la fig. 193.

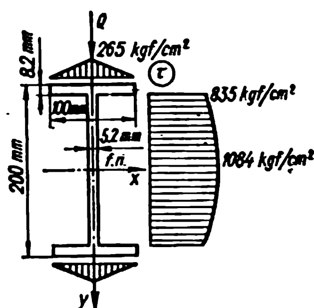


FIG. 193

Les contraintes tangentielles dans les ailes des profilés à paroi mince exercent une influence considérable sur le caractère de l'état de contrainte d'une barre et le type de sa déformation.

Si la section a deux axes de symétrie et que le plan des forces passe par l'un des axes (fig. 194, *a*) on assiste à l'apparition, dans la section,

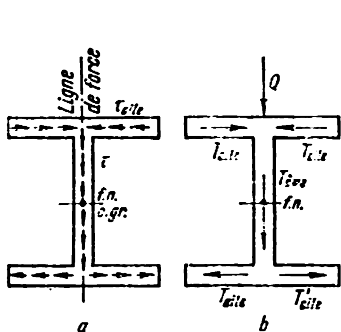


FIG. 194

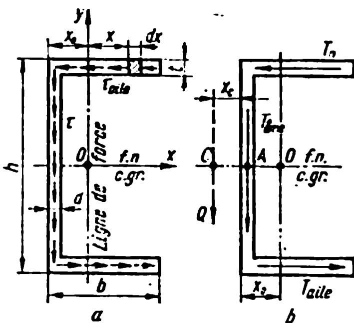


FIG. 195

des résultantes d'efforts agissant dans l'âme, $T_{\text{âme}}$ et dans l'aille, T_{aile} (fig. 194, *b*). En raison de la symétrie des ailes, les efforts T_{aile} s'équilibrent mutuellement sur chacune d'elles.

Il en est autrement si l'axe central principal perpendiculaire à la ligne neutre ne constitue pas l'axe de symétrie (fig. 195, *a*). Les contraintes tangentielles dans l'âme de la poutre et dans les ailes doivent être ramenées respectivement aux efforts $T_{\text{âme}}$ et T_{aile} (fig. 195, *b*). Ce faisant on néglige les contraintes tangentielles verticales dans les ailes. L'effort tranchant sera

$$Q = T_{\text{âme}}.$$

A noter que cette force ne passe pas par le centre de gravité et, comme elle est la résultante de la force $T_{\text{âme}}$ et des deux forces T_{aile} qui forment un couple, elle se trouve déplacée à une distance x_C (fig. 195, *b*) et coupe la ligne neutre au point C.

Le déplacement x_C peut être déterminé d'après la condition

$$\Sigma M_A = Q\left(x_C + \frac{d}{2}\right) - T_{\text{aile}}(h - t) = 0,$$

d'où on tire

$$x_C = \frac{T_{\text{aile}}}{Q}(h - t) - \frac{d}{2}. \qquad (10.61)$$

Tenant compte de ce que

$$T_{\text{aile}} = t \int_{-(x_0-d)}^{b-x_0} \tau_{\text{aile}}\, dx = \int_{-(x_0-d)}^{b-x_0} \frac{QS(x)}{Jt}\, dx =$$

$$= t \int_{-(x_0-d)}^{b-x_0} \frac{Q(b-x_0-x)\, t\, \frac{h-t}{2}}{Jt}\, dx = \frac{Qt(h-t)(b-d)^2}{4J},$$

on peut écrire la formule (10.61) sous sa forme définitive

$$x_C = \frac{t(h-t)^2 (b-d)^2}{4J} - \frac{d}{2}.$$

La conséquence du déplacement de la résultante par rapport au centre de gravité de la section à une distance $x_c + x_0$, comme le montre le schéma de la fig. 196, *a*, est que la charge extérieure P agissant dans le plan zy provoque dans la section de la poutre non seulement un moment fléchissant variable suivant la longueur $M(z) = Pz$, mais aussi un moment de torsion (fig. 196, *b*) $M_t = P(x_0 + x_C)$ suite au déplacement de l'effort

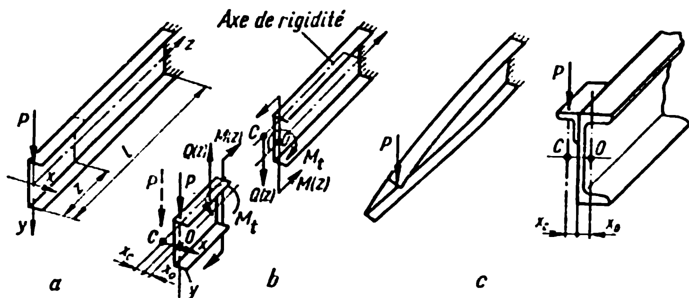


FIG. 196

tranchant $Q = P$ (résultante des efforts $T_{\text{âme}}$ et T_{aile}). Aussi la poutre subit-elle non seulement une flexion mais aussi une torsion (fig. 196, *f*).

Pour éviter la torsion on utilise en pratique des sections symétriques constituées de deux profilés en U ou bien on met le point d'application de la charge en dehors du plan principal de manière qu'il passe par le point C (fig. 106, *d*).

Dans ce cas l'élément de la poutre de longueur z est complètement équilibré par les forces P, $Q(z) = P$ et le moment $M(z) = Pz$ et il n'y a donc pas de torsion. Aussi appelle-t-on le point C *centre de flexion* ou *centre de rigidité*. Les centres de flexion de toutes les sections d'une poutre se situent sur une droite qu'on appelle *axe de rigidité* de la poutre (fig. 196,*b*). Il est évident que pour les barres à double symétrie l'axe de rigidité de la poutre coïncide avec l'axe servant de lieu géométrique des centres de gravité.

§ 59. Calcul des poutres à fondement élastique

Lorsqu'une poutre repose sur un fondement élastique continu (fig. 197), on suppose que la réaction du fondement en un point quelconque est proportionnelle à la flèche élastique w en ce point.

Désignant le coefficient de proportionnalité qui a la dimension $\frac{\text{force}}{(\text{longueur})^2}$ par α on obtient que l'intensité de la réaction est αw.

Ainsi pour une charge extérieure répartie donnée $q(z)$ la charge répartie totale agissant sur la poutre est

$$p(z) = q(z) - \alpha w(z). \tag{10.62}$$

Le calcul des poutres reposant sur un fondement élastique constitue un problème hyperstatique. L'intensité de la réaction d'appui est liée à la déformation de la poutre et de ce fait pour résoudre le problème il faut

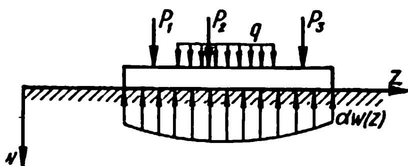


FIG. 197

trouver d'abord la ligne élastique de la poutre. L'équation différentielle de l'axe incurvé de la poutre, compte tenu des directions adoptées sur

la fig. 197 pour l'axe de w et de la charge q et en vertu de (10.34), peut s'écrire sous la forme

$$\frac{d^4w(z)}{dz^4} = \frac{1}{EJ}[q(z) - \alpha w(z)]. \tag{10.63}$$

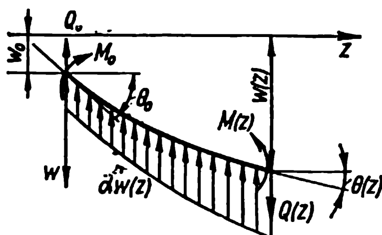


FIG. 198

Si la charge répartie est absente, $q(z) = 0$ (fig. 198) et l'équation (10.63) se transforme en

$$\frac{d^4w(z)}{dz^4} = -\frac{\alpha}{EJ}w(z). \tag{10.64}$$

Soit l'origine des coordonnées coïncide avec l'extrémité gauche du tronçon considéré pour lequel les paramètres initiaux sont w_0, θ_0, M_0 et Q_0. Introduisant la désignation

$$L = \sqrt[4]{\frac{4EJ}{\alpha}}$$

(L a la dimension de la longueur) et remplaçant la variable indépendante z par une abscisse adimensionnelle

$$\xi = \frac{z}{L},$$

mettons l'équation (10.64) sous la forme

$$\frac{d^4w}{d\xi^4} + 4w = 0.$$

La résolution générale de cette équation est

$$w = C_1e^{\xi}\cos\xi + C_2e^{\xi}\sin\xi + C_3e^{-\xi}\cos\xi + C_4e^{-\xi}\sin\xi. \tag{10.65}$$

Calculant les dérivées respectives de (10.65), exprimons par ces dernières Q, M et θ:

$$\frac{dw}{d\xi} = \theta L = C_1 e^{\xi}(\cos\xi - \sin\xi) + C_2 e^{\xi}(\cos\xi + \sin\xi) -$$

$$- C_3 e^{-\xi}(\cos\xi + \sin\xi) + C_4 e^{-\xi}(\cos\xi - \sin\xi); \qquad (10.66)$$

$$\frac{d^2w}{d\xi^2} = -\frac{M(z)L^2}{EJ} = -2(C_1 e^{\xi}\sin\xi - C_2 e^{\xi}\cos\xi - C_3 e^{-\xi}\sin\xi +$$

$$+ C_4 e^{-\xi}\cos\xi); \qquad (10.67)$$

$$\frac{d^3w}{d\xi^3} = -\frac{Q(z)L^3}{EJ} = -2[C_1 e^{\xi}(\cos\xi + \sin\xi) - C_2 e^{\xi}(\cos\xi -$$

$$- \sin\xi) - C_3 e^{-\xi}(\cos\xi - \sin\xi) - C_4 e^{-\xi}(\cos\xi + \sin\xi)]. \qquad (10.68)$$

Posant dans (10.65)-(10.68) $\xi = 0$ on obtient les expressions pour les paramètres initiaux

$$w_0 = C_1 + C_3;$$

$$L\theta_0 = C_1 + C_2 - C_3 + C_4;$$

$$L^2M_0 = (-2C_2 + 2C_4)EJ;$$

$$L^3Q_0 = (2C_1 - 2C_2 - 2C_3 - 2C_4)EJ.$$

Résolvant ce système de quatre équations linéaires par rapport aux constantes d'intégration on trouve les équations de ces dernières exprimées en fonction des paramètres initiaux dans la forme suivante:

$$C_1 = \frac{w_0}{2} + \frac{L\theta_0}{4} + \frac{L^3Q_0}{8EJ};$$

$$C_2 = \frac{L\theta_0}{4} - \frac{L^2M_0}{4EJ} - \frac{L^3Q_0}{8EJ};$$

$$C_3 = \frac{w_0}{2} - \frac{L\theta_0}{4} - \frac{L^3Q_0}{8EJ};$$

$$C_4 = \frac{L\theta_0}{4} + \frac{L^2M_0}{4EJ} - \frac{L^3Q_0}{8EJ}.$$

Introduisant les valeurs des constantes d'intégration dans (10.65)-(10.68), il vient

$$w(z) = w_0 Y_1(\xi) + L\theta_0 Y_2(\xi) - \frac{L^2 M_0}{EJ} Y_3(\xi) - \frac{L^3 Q_0}{EJ} Y_4(\xi);$$

$$\theta(z) = \theta_0 Y_1(\xi) - \frac{LM_0}{EJ} Y_2(\xi) - \frac{L^2 Q_0}{EJ} Y_3(\xi) - \frac{4w_0}{L} Y_4(\xi);$$

$$M(z) = M_0 Y_1(\xi) + LQ_0 Y_2(\xi) + \alpha L^2 w_0 Y_3(\xi) + \alpha L^3 \theta_0 Y_4(\xi);$$

$$Q(z) = Q_0 Y_1(\xi) + \alpha L w_0 Y_2(\xi) + \alpha L^2 \theta_0 Y_3(\xi) - \frac{4}{L} M_0 Y_4(\xi),$$

où Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 sont les fonctions de A. Krylov *);

$$Y_1(\xi) = \operatorname{ch} \xi \cos \xi = \frac{1}{2} (e^{\xi} + e^{-\xi}) \cos \xi;$$

$$Y_2(\xi) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} \xi \sin \xi + \operatorname{sh} \xi \cos \xi) =$$

$$= \frac{1}{4} [(e^{\xi} + e^{-\xi}) \sin \xi + (e^{\xi} - e^{-\xi}) \cos \xi];$$

$$Y_3(\xi) = \frac{1}{2} \operatorname{sh} \xi \sin \xi = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (e^{\xi} - e^{-\xi}) \sin \xi \right];$$

$$Y_4(\xi) = \frac{1}{4} (\operatorname{ch} \xi \sin \xi - \operatorname{sh} \xi \cos \xi) =$$

$$= \frac{1}{8} [(e^{\xi} + e^{-\xi}) \sin \xi - (e^{\xi} - e^{-\xi}) \cos \xi].$$

Quand on calcule les dérivées des fonctions de Krylov les relations importantes suivantes sont vérifiées:

$$LY_1' = -4Y_4; \quad LY_2' = Y_1; \quad LY_3' = Y_2; \quad LY_4' = Y_3.$$

Pour le cas général (fig. 199) lorsqu'un tronçon Oz supporte l'action d'un moment concentré M_i en un point d'abscisse a_i, la force ponctuelle P_i en un point d'abscisse b_i et la charge uniformément répartie q_c sur le

---

*) Les valeurs de ces fonctions sont données dans l'*Appendice 4*.

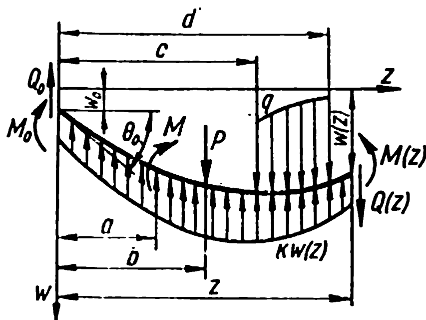


FIG. 199

tronçon de $z = c$ jusqu'à $z = d$, les équations générales pour w, θ, Q et M ont la forme suivante:

$$w(z) = w_0 Y_1\left(\frac{z}{L}\right) + \theta_0 L Y_2\left(\frac{z}{L}\right) -$$

$$- \frac{1}{EJ}\left\{M_0 L^2 Y_3\left(\frac{z}{L}\right) + \right.$$

$$+ Q_0 L^3 Y_4\left(\frac{z}{L}\right) + L^2 \sum M_i Y_3\left(\frac{z-a_i}{L}\right) - L^3 \sum P_i Y_4\left(\frac{z-b_i}{L}\right) +$$

$$\left. + \frac{L^4}{4} \sum q_i \left[Y_1\left(\frac{z-c_i}{L}\right) - Y_1\left(\frac{z-d_i}{L}\right)\right]\right\}; \qquad (10.69)$$

$$\theta(z) = \theta_0 Y_1\left(\frac{z}{L}\right) - \frac{1}{EJ}\left\{M_0 L Y_2\left(\frac{z}{L}\right) + Q_0 L^2 Y_3\left(\frac{z}{L}\right) + \right.$$

$$+ \frac{4EJ}{L} w_0 Y_4\left(\frac{z}{L}\right) + L \sum M_i Y_2\left(\frac{z-a_i}{L}\right) - L^2 \sum P_i Y_3\left(\frac{z-b_i}{L}\right) -$$

$$\left. - L^3 \sum q_i \left[Y_4\left(\frac{z-c_i}{L}\right) - Y_4\left(\frac{z-d_i}{L}\right)\right]\right\}; \qquad (10.70)$$

$$M(z)=M_0Y_1\left(\frac{z}{L}\right)+Q_0LY_2\left(\frac{z}{L}\right)+\alpha L^2w_0Y_3\left(\frac{z}{L}\right)+\alpha L^3\theta_0Y_4\left(\frac{z}{L}\right)+$$
$$+\sum M_iY_1\left(\frac{z-a_i}{L}\right)-L\sum P_iY_2\left(\frac{z-b_i}{L}\right)+L^2\sum q_i\left[Y_3\left(\frac{z-c_i}{L}\right)-\right.$$
$$\left.-Y_3\left(\frac{z-d_i}{L}\right)\right]; \qquad (10.71)$$

$$Q(z)=Q_0Y_1\left(\frac{z}{L}\right)+\alpha Lw_0Y_2\left(\frac{z}{L}\right)+\alpha L^2\theta_0Y_3\left(\frac{z}{L}\right)-\frac{4M_0}{L}Y_4\left(\frac{z}{L}\right)-$$
$$-\frac{4}{L}\sum M_iY_4\left(\frac{z-a_i}{L}\right)-\sum P_i\,Y_1\left(\frac{z-b_i}{L}\right)+$$
$$+L\sum q_i\left[Y_2\left(\frac{z-c_i}{L}\right)-Y_2\left(\frac{z-d_i}{L}\right)\right]. \qquad (10.72)$$

Ainsi, connaissant les paramètres initiaux w_0, θ_0, M_0 et Q_0 on peut déterminer les grandeurs $w(z)$, $\theta(z)$, $M(z)$ et $Q(z)$, pour chaque section de coor donnée z, à l'aide des formules (10.69)-(10.72).

Les paramètres initiaux pour chaque point concret peuvent être déterminés à partir des conditions sur les extrémités de la poutre. Ces conditions sont consignées au tableau ci-bas pour diverses fixations de la poutre lorsque l'origine des coordonnées coïncide avec son extrémité gauche.

Conditions sur les extrémités de la poutre		Extrémité gauche ($z = 0$)				Extrémité droite ($z = l$)			
Extrémité gauche	Extrémité droite	w	θ	M	Q	w	θ	M	Q
libre	libre	—	—	M_0	Q_0	—	—	M_l	Q_l
libre	appuyée	—	—	M_0	Q_0	0	—	M_l	—
libre	encastrée	—	—	M_0	Q_0	0	0	—	—
appuyée	appuyée	0	—	M_0	—	0	—	M_l	—
appuyée	encastrée	0	—	M_0	—	0	0	—	—
encastrée	encastrée	0	0	—	—	0	0	—	—

Notice: M_l et Q_l sont respectivement force et moment extérieurs concentrés sur l'appui droit.

Choisissant l'origine des coordonnées sur l'extrémité gauche de la poutre à une travée on connait toujours deux paramètres initiaux. Pour trouver les deux autres on doit résoudre un système de deux équations algébriques établies pour le cas où l'extrémité droite de la poutre est encastrée.

§ 60. Flexion des poutres dont le matériau n'obéit pas à la loi de Hooke

Les diagrammes de traction et de compression pour les matériaux qui n'obéissent pas à la loi de Hooke (fonte, pierre, etc.) montrent que les contraintes s'accroissent plus lentement que les déformations et que le décalage entre l'augmentation des contraintes et celle des déformations est plus important en traction qu'en compression (fig. 200). Dans ce cas la ligne neutre ne passe pas par le centre de gravité de la section tranversale, mais se déplace vers le centre de courbure de l'axe de la poutre (fig. 201). Connaissant le rayon de courbure de la couche neutre ρ on détermine en vertu de l'hypothèse des sections planes l'allongement relatif d'une fibre se trouvant à une distance y de la couche neutre à l'aide de la formule déjà connue

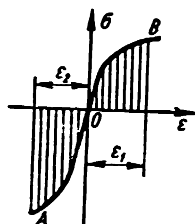


FIG. 200

$$\varepsilon = \frac{y}{\rho}. \qquad (10.73)$$

C'est la raison pour laquelle il convient avant tout de trouver la position et le rayon de courbure de la couche neutre.

Etudions une poutre de section rectangulaire faite en un matériau qui n'obéit pas à la loi de Hooke (fig. 202). Tenant compte du fait que

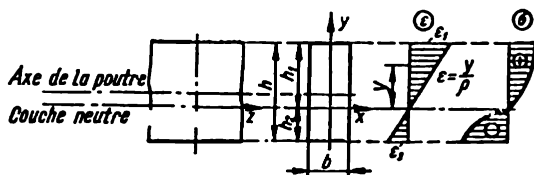


FIG. 201

pour divers matériaux les relations $\varepsilon = f(\sigma)$ en compression et en traction peuvent être mises sous la forme

$$\varepsilon_{tr} = k_{tr}\sigma_{tr}^{n}; \quad \varepsilon_{com} = k_{com}\sigma_{com}^{m}, \qquad (10.74)$$

où k_{tr}, k_{com}, n et m sont des grandeurs caractérisant les propriétés physiques des matériaux, la position de la couche neutre peut être déterminée à partir des conditions

$$\Sigma Z = \int_F \sigma \, dF = 0;$$

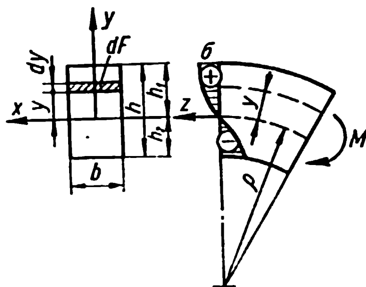


FIG. 202

$$\Sigma M_x = \int_F \sigma y \, dF - M = 0$$

ou alors

$$b\left(\int_0^{h_1} \sigma_{tr} \, dy - \int_0^{h_2} \sigma_{com} \, dy\right) = 0; \qquad (10.75)$$

$$b\left(\int_0^{h_1} \sigma_{tr} y \, dy + \int_0^{h_2} \sigma_{com} y \, dy\right) = M. \qquad (10.76)$$

En vertu de (10.74) et (10.73)

$$\sigma_{tr} = \left(\frac{\varepsilon_{tr}}{k_{tr}}\right)^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{y}{k_{tr}\rho}\right)^{\frac{1}{n}}; \quad \sigma_{com} = \left(\frac{\varepsilon_{com}}{k_{com}}\right)^{\frac{1}{m}} = \left(\frac{y}{k_{com}\rho}\right)^{\frac{1}{m}}. \qquad (10.77)$$

Introduisant (10.77) dans (10.75) et (10.76) et intégrant, on obtient respectivement

$$\frac{n}{n+1}\left(\frac{h_1}{k_{tr}\rho}\right)^{\frac{1}{n}} h_1 - \frac{m}{m+1}\left(\frac{h_2}{k_{com}\rho}\right)^{\frac{1}{m}} h_2 = 0; \qquad (10.78)$$

$$\frac{n}{2n+1} b\left(\frac{h_1}{k_{tr}\rho}\right)^{\frac{1}{n}} h_1^2 + \frac{m}{2m+1} b\left(\frac{h_2}{k_{com}\rho}\right)^{\frac{1}{m}} h_2^2 = M. \qquad (10.79)$$

Tenant compte de ce que $h_1 + h_2 = h$ trouvons des deux dernières équations ρ, h_1 et h_2 et ensuite déterminons d'après la formule (10.77) les contraintes σ_{tr} et σ_{com}.

On peut aussi résoudre le problème inverse: déterminer le moment fléchissant maximum admissible connaissant les contraintes admissibles en traction $[\sigma_{tr}]$ ou en compression $[\sigma_{com}]$. Pour ce faire à l'aide des formules (10.77), on détermine les contraintes dans les fibres extrêmes

$$(\sigma_{tr})_{max} = \sigma_1 = \left(\frac{h_1}{k_{tr}\rho}\right)^{\frac{1}{n}}; \quad (\sigma_{com})_{max} = \sigma_2 = \left(\frac{h_2}{k_{com}\rho}\right)^{\frac{1}{m}}. \qquad (10.80)$$

En vertu de (10.80) les expressions (10.78) et (10.79) peuvent être présentées sous la forme

$$\frac{n}{n+1}\sigma_1 h_1 - \frac{m}{m+1}\sigma_2 h_2 = 0; \qquad (10.81)$$

$$\frac{n}{2n+1} b\sigma_1 h_1^2 + \frac{m}{2m+1} b\sigma_2 h_2^2 = M. \qquad (10.82)$$

Outre cela, on tire de l'équation (10.80)

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{\sigma_1^n k_{tr}}{\sigma_2^m k_{com}}. \qquad (10.83)$$

Se servant des relations (10.81)-(10.83) et connaissant $[\sigma_{tr}]$ ou $[\sigma_{com}]$ on peut *) déterminer la position de l'axe neutre et les valeurs admissibles du moment fléchissant $[M]$.

Dans le cas où le matériau obéit à la loi de Hooke, mais les modules d'élasticité en traction et en compression sont différents (généralement $E_{com} > E_{tr}$), le diagramme des contraintes normales prend la forme repré-

*) Compte tenu de ce que $h_1+h_2=h$.

sentée sur la fig. 203 tandis que les contraintes maximales pour un moment fléchissant connu M dans une barre de section rectangulaire se déterminent d'après les formules

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{tr} &= \frac{3M}{bh^2}\left(1+\sqrt{\frac{E_{tr}}{E_{com}}}\right);\\ \sigma_{com} &= \frac{3M}{bh^2}\left(1+\sqrt{\frac{E_{com}}{E_{tr}}}\right).\end{aligned}\right\} \tag{10.84}$$

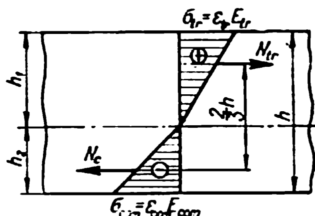


FIG. 203

Dans le cas où les contraintes se déterminent à partir des déformations relatives dans les couches extrêmes relevées à l'aide d'un tensomètre on a intérêt à écrire la formule (10.84) sous la forme suivante

$$\left.\begin{aligned}\sigma_{tr} &= \frac{3M}{bh^2}\left(1+\frac{\varepsilon_{com}}{\varepsilon_{tr}}\right);\\ \sigma_{com} &= \frac{3M}{bh^2}\left(1+\frac{\varepsilon_{tr}}{\varepsilon_{com}}\right).\end{aligned}\right\} \tag{10.85}$$

Schémas des poutres réelles et des poutres fictives correspondantes

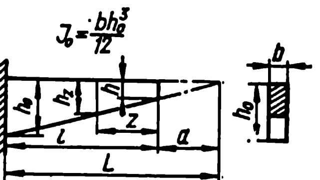
Poutre réelle	Poutre fictive
l	l
l	l
a l	a l
a l b	a l b
l	l

Poutres d'égale résistance en flexion

Schéma de la poutre et sa section transversale	Formules pour la détermination des dimensions de la section transversale et de la flèche maximale
Parabole quadratique	$h_z = \sqrt{\frac{6Pz}{b[\sigma]}}$; $f = \frac{8P}{Eb}\left(\frac{l}{h}\right)^3$
	$b_z = \frac{6Pz}{h^2[\sigma]}$, $f = \frac{6P}{Eb}\left(\frac{l}{h}\right)^3$
Parabole cubique	$d_z = \sqrt[3]{\frac{32Pz}{\pi[\sigma]}}$

Schéma de la poutre et sa section transversale	Formules pour la détermination des dimensions de la section transversale et de la flèche maximale
	$h_z = z\sqrt{\frac{3q}{b[\sigma]}}$
Parabole quadratique	$h_z = \sqrt{\frac{6Pcz}{bl[\sigma]}}$; $h_{z'} = \sqrt{\frac{6Paz'}{bl[\sigma]}}$
Ellipse	$h_z = \sqrt{\frac{3ql^2}{4b[\sigma]}\left(1 - 4\frac{z^2}{l^2}\right)}$; $f = \frac{3ql^4}{16bEh^3}$
	$b_z = \frac{3Pz}{h^2[\sigma]}$; $f = \frac{3Pl^3}{8bEh^3}$

Equation de la déformée et de l'angle de rotation des sections transversales d'une poutre cantilever de hauteur variable



$$h_z = h_0 \frac{a+z}{a+l}$$

Schéma de la poutre et de la charge	Equation de la déformée	Equation de l'angle de rotation
P, z, l	$\frac{PL^3}{EJ_0}\left[-\ln\frac{L}{a+z}+\frac{a}{2(a+z)}+\frac{2l+a}{2L^3}(l-z)-\frac{a}{2L}\right]$	$\frac{PL^3}{EJ_0}\left[\frac{2z+a}{2(a+z)^2}-\frac{2l+a}{2L^2}\right]$
p, z, l	$-\frac{pL^3}{2EJ_0}\left\{2a\ln\frac{L}{a+z}-(a+z)[\ln(a+z)-1]-\frac{4aL-a^2}{2L^2}(l-z)+(a+z)\ln L-\frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{a+z}-\frac{1}{L}\right)-L\right\}$	$-\frac{pL^3}{2EJ_0}\left[\ln\frac{L}{a+z}-2a\left(\frac{1}{a+z}-\frac{1}{L}\right)+a^2\left(\frac{1}{2(a+z)^2}-\frac{1}{2L^2}\right)\right]$

Suite

Schéma de la poutre et de la charge	Equation de la déformée	Equation de l'angle de rotation
	$-\frac{p_0L^3}{6EJ_0l}\Big\{3a(a+z)[\ln(a+z)-1]-3aL\ln L-$ $-3a^2\ln\frac{L}{a+z}+(3a\ln L+\frac{3a^2}{L}-$ $-L-\frac{a^3}{2L^2}\Big)(l-z)+\frac{1}{2}[L^2-(a+z)^2]+$ $+\frac{a^3}{2}\left(\frac{1}{a+z}-\frac{1}{L}\right)+3aL$	$\frac{p_0L^3}{6EJ_0l}\Big[-3a\ln\frac{L}{a+z}+(l-z)+$ $+3a^2\left(\frac{1}{a+z}-\frac{1}{L}\right)-$ $-\frac{a^3}{2}\left(\frac{1}{(a+z)^2}-\frac{1}{L^2}\right)\Big]$
	$\frac{ML^2}{EJ_0}\left[\frac{z}{2L^2}+\frac{1}{2(a+z)}-\frac{2l+a}{2L^2}\right]$	$\frac{ML^2}{EJ_0}\left[\frac{1}{2(a+z)^2}-\frac{1}{2L^2}\right]$

Tableau 20

Equations de la déformée, flèches maximales, angles de rotation des sections frontales et des sections d'appuis des poutres isostatiques à section transversale constante

Schéma de la poutre	Equation de la déformée $w(z)$ et flèche maximale f	Angle de rotation θ
W, M_0, A, B, Z, l	$0 \leqslant z \leqslant l$ $w_z = -\frac{M_0 l^2}{2EJ}\left(1 - \frac{z}{l}\right)^2$ $f = -\frac{M_0 l^2}{2EJ}$ pour $z = 0$	$\theta = \frac{M_0 l}{EJ}$ pour $z = 0$
W, M_1, M_2, Z, a, b, l	$0 \leqslant z \leqslant a$ $w_z = -\frac{1}{2EJ}[(M_1 + M_2)(l - z)^2 - M_1(a - z)^2 - M_2(a + b - z)^2]$ $a \leqslant z \leqslant a + b$ $w_z = -\frac{1}{2EJ}[(M_1 + M_2)(l - z)^2 - M_2(a + b - z)^2]$ $a + b \leqslant z \leqslant l$ $w_z = -\frac{(M_1 + M_2)l^2}{2EJ}\left(1 - \frac{z}{l}\right)^2$ $f = -\frac{1}{2EJ}[(M_1 + M_2)l^2 - M_1 a^2 - M_2(a + b)^2]$ pour $z = 0$	$\theta = \frac{1}{EJ}[(M_1 + M_2)l - M_1 a - M_2(a + b)]$ pour $z = 0$

Suite

Schéma de la poutre	Equation de la déformée $w(z)$ et flèche maximale f	Angle de rotation θ
W, m, Z, l	$0 \leqslant z \leqslant l$ $w_z = -\frac{ml^2}{6EJ}\left[2 - 3\frac{z}{l} + \left(\frac{z}{l}\right)^3\right]$ $f = \frac{ml^2}{3EJ}$ pour $z = 0$	$\theta = -\frac{ml^2}{2EJ}$ pour $z = 0$
W, P, Z, l	$0 \leqslant z \leqslant l$ $w_z = -\frac{Pl^3}{6EJ}\left[2 - 3\frac{z}{l} + \left(\frac{z}{l}\right)^3\right]$ $f = -\frac{Pl^3}{3EJ}$ pour $z = 0$	$\theta = \frac{Pl^2}{2EJ}$ pour $z = 0$
W, P, Z, a, b, l	$0 \leqslant z \leqslant a$ $w_z = \frac{Pb^3}{6EJ}\left(1 - 3\frac{l-z}{b}\right) = -\frac{Pb^3}{6EJ}\left(3\frac{a-z}{b} + 2\right)$ $a \leqslant z \leqslant l$ $w_z = -\frac{Pb^3}{6EJ}\left(\frac{l-z}{b} - 3\right)\left(\frac{l-z}{b}\right)^2$ $f = \frac{Pb^3}{6EJ}\left(1 - 3\frac{l}{b}\right) = -\frac{Pb^3}{6EJ}\left(2 + 3\frac{a}{b}\right)$ pour $z = 0$	$\theta = \frac{Pb^2}{2EJ}$ pour $z = 0$

W, q, z, l	$0 < z <$ $w_z = -\frac{ql^4}{24EJ}\left[3 - 4\frac{z}{l} + \left(\frac{z}{l}\right)^4\right]$ $f = -\frac{ql^4}{8EJ}$ pour $z = 0$	$\theta = \frac{ql^3}{6EJ}$ pour $z = 0$
W, q, z, b, a, l	$0 < z < b$ $w(z) = -\frac{ql^4}{24EJ}\left[3 - 4\frac{a^3}{l^3} + \frac{a^4}{l^4} - 4\left(1 - \frac{a^3}{l^3}\right)\frac{z}{l} + \frac{z^4}{l^4}\right]$ $b < z < l$ $w(z) = -\frac{ql^4}{24EJ}\left[3 - 4\frac{a^3}{l^3} + \frac{a^4}{l^4} - 4\left(1 - \frac{a^3}{l^3}\right)\frac{z}{l} + \frac{z^4}{l^4} - \frac{(z-b)^4}{l^4}\right]$ $f = -\frac{ql^4}{24EJ}\left(3 - 4\frac{a^3}{l^3} + \frac{a^4}{l^4}\right)$ pour $z = 0$	$\theta = \frac{ql^3}{6EJ}\left(1 - \frac{a^3}{l^3}\right)$ pour $z = 0$
W, q, z, l	$0 < z < l$ $w(z) = -\frac{ql^4}{120EJ}\left(4 - 5\frac{z}{l} + \frac{z^5}{l^5}\right)$ $f = -\frac{ql^4}{30EJ}$ pour $z = 0$	$\theta = \frac{ql^3}{24EJ}$ pour $z = 0$

Suite

Schéma de la poutre	Equation de la déformée $w(z)$ et flèche maximale f	Angle de rotation θ
w, q, z, l	$0 \leq z \leq l$ $w(z) = -\frac{ql^4}{120EJ}\left(11 - 15\frac{z}{l} + 5\frac{z^4}{l^4} - \frac{z^5}{l^5}\right)$ $f = -\frac{11}{120}\cdot\frac{ql^4}{EJ}$ pour $z = 0$	$\theta = \frac{ql^3}{8EJ}$ pour $z = 0$
w, q, a, l, z	$0 \leq z \leq a$ $w(z) = -\frac{qal^3}{120EJ}\left[4\left(5 - 5\frac{a}{l} + \frac{a^3}{l^3}\right) - 5\left(6 - 8\frac{a}{l} + 3\frac{a^2}{l^2}\right)\frac{z}{l} + \frac{z^5}{a^2 l^3}\right]$ $f = -\frac{qal^3}{30EJ}\left(5 - 5\frac{a}{l} + \frac{a^3}{l^3}\right)$ pour $z = 0$	$\theta = \frac{qal^2}{24EJ}\left(6 - 8\frac{a}{l} + 3\frac{a^2}{l^2}\right)$ pour $z = 0$
w, q, a, l, z	$0 \leq z \leq a$ $w(z) = -\frac{qal^3}{120EJ}\left[20 - 10\frac{a}{l} + \frac{a^3}{l^3} - 5\left(6 - 4\frac{a}{l} + \frac{a^2}{l^2}\right)\frac{z}{l} + 5\frac{z^4}{al^3} - \frac{z^5}{a^2 l^3}\right]$ $f = -\frac{qal^3}{120EJ}\left(20 - 10\frac{a}{l} + \frac{a^3}{l^3}\right)$ pour $z = 0$	$\theta = \frac{qal^2}{24EJ}\left(6 - 4\frac{a}{l} + \frac{a^2}{l^2}\right)$ pour $z = 0$

W, q, z, l, Z	$0 \leqslant z \leqslant \frac{l}{2}$ $w(z) = -\frac{109ql^4}{1920EJ}\left[1 - \frac{140}{109}\cdot\frac{z}{l} + \frac{32}{109}\cdot\frac{z^5}{l^5}\right]$ $\frac{l}{2} \leqslant z \leqslant l$ $w(z) = -\frac{109ql^4}{1920EJ}\left[1 - \frac{140}{109}\cdot\frac{z}{l} + \frac{32}{109}\cdot\frac{z^5}{l^5} - \frac{64}{109}\cdot\frac{\left(z-\frac{l}{2}\right)^5}{l^5}\right]$ $f = -\frac{10{,}9ql^4}{192EJ}$ pour $z = 0$	$\theta = \frac{7}{96}\cdot\frac{ql^3}{EJ}$ pour $z = 0$
W, q_1, q_2, l, Z	$0 \leqslant z \leqslant l$ $w(z) = -\frac{l^4}{120EJ}\left[11q_1 + 4q_2 - 5(3q_1 + q_2)\frac{z}{l} + 5q_1\frac{z^4}{l^4} + (q_2 - q_1)\frac{z^5}{l^5}\right]$ $f = -\frac{11q_1 + 4q_2}{120EJ}l^4$ pour $z = 0$	$\theta = \frac{3q_1 + q_2}{24EJ}l^3$ pour $z = 0$
W, M_0, l, Z	$0 \leqslant z \leqslant l$ $w(z) = -\frac{M_0l^2}{6EJ}\left(2\frac{z}{l} - 3\frac{z^2}{l^2} + \frac{z^3}{l^3}\right)$ $w = -\frac{M_0l^2}{16EJ}$ pour $z = \frac{l}{2}$ $f = -0{,}0642\frac{M_0l^2}{EJ}$ pour $z = 0{,}422\, l$	$\theta = -\frac{M_0l}{3EJ}$ pour $z = 0$ $\theta = \frac{M_0l}{6EJ}$ pour $z = l$

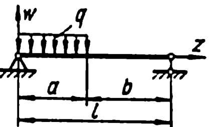
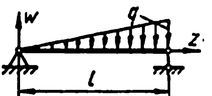
Suite

Schéma de la poutre	Equation de la déformée $w(z)$ et flèche maximale f	Angle de rotation θ
W, M_1, M_2, Z, l	$0 \leq z \leq l$ $w(z) = -\frac{l^2}{6EJ}\left[(2M_1 + M_2)\frac{z}{l} - 3M_1\frac{z^2}{l^2} + (M_1 - M_2)\frac{z^3}{l^3}\right]$ $w = -\frac{M_1 + M_2}{16EJ} l^2$ pour $z = \frac{l}{2}$	$\theta = -\left(\frac{M_1 l}{3EJ} + \frac{M_2 l}{6EJ}\right)$ pour $z = 0$ $\theta = \frac{M_1 l}{6EJ} + \frac{M_2 l}{3EJ}$ pour $z = l$
W, M_0, Z, a, l	$0 \leq z \leq a$ $w(z) = \frac{M_0 l^2}{6EJ}\left[\left(6\frac{a}{l} - 3\frac{a^2}{l^2} - 2\right)\frac{z}{l} - \frac{z^3}{l^3}\right]$ $w = \frac{M_0 l^2}{6EJ}\left(3\frac{a^2}{l^2} - \frac{a}{l} - \frac{13}{8}\cdot\frac{a^3}{l^3}\right)$ pour $z = \frac{a}{2}$ $w = \frac{M_0 l^2}{3EJ}\left(3\frac{a^2}{l^2} - \frac{a}{l} - 2\frac{a^3}{l^3}\right)$ pour $z = a$	$\theta = -\frac{M_0 l}{6EJ}\left(2 - 6\frac{a}{l} + 3\frac{a^2}{l^2}\right)$ pour $z = 0$ $\theta = -\frac{M_0 l}{EJ}\left(\frac{1}{3} - \frac{a}{l} + \frac{a^2}{l^2}\right)$ pour $z = a$ $\theta = \frac{M_0 l}{6EJ}\left(1 - 3\frac{a^2}{l^2}\right)$ pour $z = l$

W, P, Z, $\frac{l}{2}$, l	$0 \leqslant z \leqslant l/2$ $w(z) = -\frac{Pl^3}{48EJ}\left(3\frac{z}{l} - 4\frac{z^3}{l^3}\right)$ $f = -\frac{Pl^3}{48EJ}$ pour $z = \frac{l}{2}$	$\theta = -\frac{Pl^2}{16EJ}$ pour $z = 0$ $\theta = \frac{Pl^2}{16EJ}$ pour $z = l$
W, P, Z, a, b, l	$0 \leqslant z \leqslant a$ $w(z) = -\frac{Pa^2b^2}{6EJl}\left(2\frac{z}{a} + \frac{z}{b} - \frac{z^3}{a^2b}\right)$ $0 \leqslant z \leqslant l$ $w(z) = -\frac{Pa^2b^2}{6EJl}\left[2\frac{l-z}{b} + \frac{l-z}{a} - \frac{(l-z)^3}{ab^2}\right]$ $w = -\frac{Pb}{48EJ}(3l^2 - 4b^2)$ pour $z = \frac{l}{2}$ $w = -\frac{Pl^3}{3EJ}\left(\frac{ab}{l^2}\right)^2$ pour $z = a$ $f = -\frac{Pbl^2\sqrt{3}}{27EJ}\sqrt{\left(1 - \frac{b^2}{l^2}\right)^3}$ pour $z = \sqrt{\frac{l^2-b^2}{3}}$	$\theta = -\frac{Pba}{6EJl}(a + 2b) =$ $= -\frac{Pl^2}{6EJ}\left(\frac{b}{l} - \frac{b^3}{l^3}\right)$ pour $z = 0$ $\theta = \frac{Pa}{6EJl}(l^2 - a^2)$ pour $z = l$
W, P, P, Z, a, b, a, l	$0 \leqslant z \leqslant a$ $w(z) = -\frac{Pa^3}{6EJ}\left[3\left(1 + \frac{b}{a}\right)\frac{z}{a} - \frac{z^3}{a^3}\right]$ $a \leqslant z \leqslant a + b$ $w(z) = -\frac{Pa^3}{6EJ}\left[3\left(1 + \frac{b}{a}\right)\frac{z}{a} - \frac{z^3}{a^3} + \frac{(z-a)^3}{a^3}\right]$ $w = -\frac{Pa^3}{6EJ}\left(2 + 3\frac{b}{a}\right)$ pour $z = a$ $f = -\frac{Pl^3}{24EJ}\left(3\frac{a}{l} - 4\frac{a^3}{l^3}\right)$ pour $z = \frac{l}{2}$	$\theta = -\frac{Pa(a+b)}{2EJ}$ pour $z = 0$ $\theta = \frac{Pa(a+b)}{2EJ}$ pour $z = l$

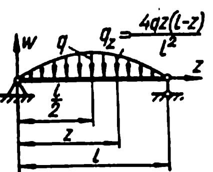
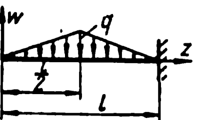
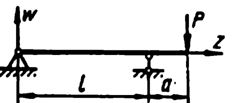
Suite

Schéma de la poutre	Equation de la déformée $w(z)$ et flèche maximale f	Angle de rotation θ
w, q, z, l	$0 \leqslant z \leqslant l$ $w(z) = -\frac{ql^4}{24EJ}\left[\frac{z}{l} - 2\left(\frac{z}{l}\right)^3 + \left(\frac{z}{l}\right)^4\right]$ $f = -\frac{5ql^4}{384EJ}$ pour $z = \frac{l}{2}$	$\theta = -\frac{ql^3}{24EJ}$ pour $z = 0$ $\theta = \frac{ql^3}{24EJ}$ pour $z = l$
w, q, z, a, b, c, l	$0 \leqslant z \leqslant a$ $w(z) = -\frac{qbl^3}{48EJ}\left[8\frac{d}{l}\left(\frac{z}{l} - \frac{z^3}{l^3}\right) - \right.$ $\left. - \frac{z}{l}\left(8\frac{d^3}{l^3} - \frac{2ab^3}{l^3} - \frac{b^3}{l^3} + 2\frac{b^3}{l^3}\right)\right]$ $a \leqslant z \leqslant a + b$ $w(z) = -\frac{qbl^3}{48EJ}\left[8\frac{d}{l}\left(\frac{z}{l} - \frac{z^3}{l^3}\right) - \right.$ $- \frac{z}{l}\left(8\frac{d^3}{l^3} - 2\frac{ab^3}{l^3} - \frac{b^3}{l^3} + 2\frac{b^3}{l^3}\right) +$ $\left. + 2\frac{(z-a)^4}{bl^3}\right]$	$\theta = -\frac{qbl^2}{24EJ}\left(4\frac{d}{l} - 4\frac{d^3}{l^3} + \right.$ $\left. + \frac{ab^2}{l^3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{b^3}{l^3} - \frac{b^3}{l^3}\right)$ pour $z = 0$ $d = c + \frac{1}{2}b$

	$0 \leq z \leq a$ $w(z) = -\frac{qa^2l}{24EJ}\left[4\left(1-\frac{a}{2l}\right)^2\frac{z}{a} - 4\frac{\left(\frac{a}{2}+b\right)z^3}{a^2l^2} + \frac{z^4}{a^2l}\right]$ $a \leq z \leq l$ $w(z) = -\frac{qa^2l}{24EJ}\left[4\left(1-\frac{a}{2l}\right)^2\frac{z}{a} - 4\frac{\left(\frac{a}{2}+b\right)z^3}{a^2l^2} + \frac{z^4}{a^2l} - \frac{(z-a)^4}{a^2l}\right]$ $w = -\frac{qa^2l}{24EJ}\left(4 - 7\frac{a}{l} + 3\frac{a^2}{l^2}\right)$ pour $z = a$	$\theta = -\frac{qa^2l}{6EJ}\left(1-\frac{a}{2l}\right)^2$ pour $z = 0$ $\theta = \frac{qa^2l}{12EJ}\left(1-\frac{a^2}{2l^2}\right)$ pour $z = l$
	$0 \leq z \leq l$ $w(z) = -\frac{ql^4}{360EJ}\left(7\frac{z}{l} - 10\frac{z^3}{l^3} + 3\frac{z^5}{l^5}\right)$ $f = -0{,}00652\frac{ql^4}{EJ}$ pour $z = 0{,}5193l$	$\theta = -\frac{7ql^3}{360EJ}$ pour $z = 0$ $\theta = \frac{8ql^3}{360EJ}$ pour $z = l$

Suite

Schéma de la poutre	Equation de la déformée $w(z)$ et flèche maximale f	Angle de rotation θ
![]	$0 \leqslant z \leqslant a$ $w(z) = -\frac{qa^3 l}{360EJ}\left[\left(40 - 45\frac{a}{l} + 12\frac{a^2}{l^2}\right)\frac{z}{a} - 10\left(3 - 2\frac{a}{l}\right)\frac{z^3}{a^2 l} + 3\frac{z^5}{a^4 l}\right]$ $a \leqslant z \leqslant l$ $w(z) = -\frac{qa^3 l}{90EJ}\left[\left(5 - 3\frac{a^2}{l^2}\right)\frac{l-z}{a} - 5\frac{(l-z)^3}{al^2}\right]$ $w = -\frac{qa^3 l}{45EJ}\left(5 - 9\frac{a}{l} + \frac{a^2}{l^2}\right)$ pour $z = a$	$\theta = -\frac{qa^2 l}{360EJ}\left(40 - 45\frac{a}{l} + 12\frac{a^2}{l^2}\right)$ pour $z = 0$ $\theta = \frac{qa^2 l}{90EJ}\left(5 - 3\frac{a^2}{l^2}\right)$ pour $z = l$
![]	$0 \leqslant z \leqslant a$ $w(z) = -\frac{qab^2 l}{360EJ}\left[\left(10 - 3\frac{b^2}{l^2}\right)\frac{z}{a} - 10\frac{z^3}{al^2}\right]$ $a \leqslant z \leqslant l$ $w(z) = -\frac{qab^2 l}{360EJ}\left[\left(10 - 3\frac{b^2}{l^2}\right)\frac{z}{a} - 10\frac{z^3}{al^2} + 3\frac{(z-a)^5}{b^3 al}\right]$ $w = -\frac{qab^2 l}{360EJ}\left(20\frac{b}{l} - 13\frac{b^2}{l^2}\right)$ pour $z = a$	$\theta = -\frac{qb^2 l}{360EJ}\left(10 - 3\frac{b^2}{l^2}\right)$ pour $z = 0$ $\theta = \frac{qb^2 l}{360EJ}\left(20 - 15\frac{b}{l} + 3\frac{b^2}{l^2}\right)$ pour $z = l$

	$f = -\frac{61}{5760}\cdot\frac{ql^4}{EJ}$ pour $z = \frac{l}{2}$	$0 = -\frac{ql^3}{30EJ}$ pour $z = 0$ $0 = \frac{ql^3}{30EJ}$ pour $z = l$
	$0 \leqslant z \leqslant l/2$ $w(z) = -\frac{ql^4}{24EJ}\left(\frac{5}{8}\cdot\frac{z}{l} - \frac{z^3}{l^3} + \frac{2}{5}\cdot\frac{z^5}{l^5}\right)$ $f = -\frac{ql^4}{120EJ}$ pour $z = \frac{l}{2}$	$0 = -\frac{5}{192}\cdot\frac{ql^3}{EJ}$ pour $z = 0$ $0 = \frac{5}{192}\cdot\frac{ql^3}{EJ}$ pour $z = l$
	$0 \leqslant z \leqslant l$ $w(z) = \frac{Pal^2}{6EJ}\left(\frac{z}{l} - \frac{z^3}{l^3}\right)$ $l \leqslant z \leqslant l + a$ $w(z) = \frac{Pal^2}{6EJ}\left[\frac{z}{l} - \frac{z^3}{l^3} + \frac{(l+a)(z-l)^3}{al^3}\right]$ $w_{max} = 0{,}0642\,\frac{Pal^2}{EJ}$ pour $z = 0{,}578l$ $w = -\frac{Pa^2}{3EJ}(l+a)$ pour $z = l + a$	$0 = \frac{Pal}{6EJ}$ pour $z = 0$ $0 = -\frac{Pal}{3EJ}$ pour $z = l$ $0 = -\frac{Pa}{6EJ}(2l + 3a)$ pour $z = l + a$

Suite

Schéma de la poutre	Equation de la déformée $w(z)$ et flèche maximale f	Angle de rotation θ
	$0 \leqslant z \leqslant a$ $w(z) = -\frac{Pa^2}{6EJ}\left[(3l+2a) - 3(l+a)\frac{z}{a} + \frac{z^3}{a^3}\right]$ $a \leqslant z \leqslant l$ $w(z) = -\frac{Pa^2}{6EJ}\left[(3l+2a) - 3(l+a)\frac{z}{a} + \right.$ $\left. + \frac{z^3}{a^3} - \frac{(z-a)^3}{a^3}\right]$ $w = -\frac{Pa^2}{6EJ}(3l+2a)$ pour $z = 0$ et $z = l + 2a$ $f = \frac{Pal^2}{8EJ}$ pour $z = a + \frac{l}{2}$	$\theta = \frac{Pal}{2EJ}$ pour $z = a$ $\theta = -\frac{Pal}{2EJ}$ pour $z = a + l$ $\theta = \frac{Pa(a+l)}{2EJ}$ pour $z = 0$ $\theta = -\frac{Pa(a+l)}{2EJ}$ pour $z = 2a + l$
	$0 \leqslant z \leqslant l$ $w(z) = \frac{qa^2l^2}{12EJ}\left(\frac{z}{l} - \frac{z^3}{l^3}\right)$ $l \leqslant z \leqslant l + a$ $w(z) = -\frac{qa^3l}{24EJ}\left[\left(4 + 3\frac{a}{l}\right) - \right.$	$\theta = \frac{qa^2l}{12EJ}$ pour $z = 0$ $\theta = -\frac{qa^2l}{6EJ}$ pour $z = l$

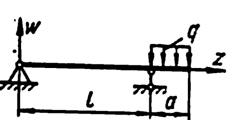
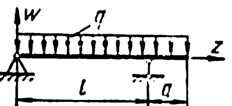
 	$-4\left(1+\frac{l}{a}\right)\left(1+\frac{a}{l}-\frac{z}{l}\right)+\frac{l^3}{a^3}\left(1+\frac{a}{l}-\frac{z}{l}\right)^4$ $w = \frac{qa^3l^3}{32EJ}$ pour $z = \frac{l}{2}$ $w_{max} = 0{,}0321\,\frac{qa^3l^3}{EJ}$ pour $z = 0{,}577\,l$ $w = -\frac{qa^3}{24EJ}(4l+3a)$ pour $z = \; + a$	$\theta = -\frac{qa^3}{6EJ}(a+l)$ pour $z = l + a$
 	$0 < z < l$ $w(z) = -\frac{ql^4}{24EJ}\left[\left(1-2\frac{a^2}{l^2}\right)\frac{z}{l}-\right.$ $\left.-2\left(1-\frac{a^2}{l^2}\right)\frac{z^3}{l^3}+\frac{z^4}{l^4}\right]$ $l < z < l + a$ $w(z) = -\frac{ql^4}{24EJ}\left[\left(4\frac{a^3}{l^3}-\frac{a}{l}+3\frac{a^4}{l^4}\right)-\right.$ $-\left(4\frac{a^2}{l^2}-1+4\frac{a^3}{l^3}\right)\left(1+\frac{a}{l}-\frac{z}{l}\right)+$ $\left.+\left(1+\frac{a}{l}-\frac{z}{l}\right)^4\right]$ $w = -\frac{ql^4}{384EJ}\left(5-12\frac{a^2}{l^2}\right)$ pour $z = \frac{l}{2}$ $w = -\frac{qa^4}{24EJ}\left(3+4\frac{l}{a}-\frac{l^3}{a^3}\right)$ pour $z = l + a$	$\theta = -\frac{ql^3}{24EJ}\left(1-2\frac{a^2}{l^2}\right)$ pour $z = 0$ $\theta = \frac{ql^3}{24EJ}\left(1+\frac{a^2}{l^2}\right)$ pour $z = l$ $\theta = -\frac{ql^3}{24EJ}\left(4\frac{a^3}{l^3}+4\frac{a^2}{l^2}-1\right)$ pour $z = l + a$

Schéma de la poutre	Equation de la déformée $w(z)$ et flèche maximale f	Angle de rotation θ
	$0 \leqslant z \leqslant a$ $w(z) = \frac{ql^4}{24EJ}\left[\left(1 - 6\frac{a^2}{l^2} - 3\frac{a^3}{l^3}\right)\frac{a}{l} - \left(1 - 6\frac{a^2}{l^2} - 4\frac{a^3}{l^3}\right)\frac{z}{l} - \frac{z^4}{l^4}\right]$ $a \leqslant z \leqslant a + l$ $w(z) = \frac{ql^4}{24EJ}\left[\left(1 - 6\frac{a^2}{l^2} - 3\frac{a^3}{l^3}\right)\frac{a}{l} - \left(1 - 6\frac{a^2}{l^2} - 4\frac{a^3}{l^3}\right)\frac{z}{l} + 2\left(1 + 2\frac{a}{l}\right)\frac{(z-a)^3}{l^3} - \frac{z^4}{l^4}\right]$ $w = \frac{qal^3}{24EJ}\left(1 - 6\frac{a^2}{l^2} - 3\frac{a^3}{l^3}\right)$ pour $z = 0$ et $z = l + 2a$ $w = -\frac{ql^4}{16EJ}\left(\frac{5}{24} - \frac{a^2}{l^2}\right)$ pour $z = a + \frac{l}{2}$	$\theta = -\frac{ql^3}{24EJ}\left(1 - 6\frac{a^2}{l^2} - 4\frac{a^3}{l^3}\right)$ pour $z = 0$ $\theta = -\frac{ql^3}{4EJ}\left(\frac{1}{6} - \frac{a^2}{l^2}\right)$ pour $z = a$ $\theta = \frac{ql^3}{4EJ}\left(\frac{1}{6} - \frac{a^2}{l^2}\right)$ pour $z = a + l$ $\theta = \frac{ql^3}{24EJ}\left(1 - 6\frac{a^2}{l^2} - 4\frac{a^3}{l^3}\right)$ pour $z = l + 2a$

CHAPITRE 11

Résistance composée

Par *résistance composée*, on comprend différentes combinaisons des états de contrainte simples (traction, compression, cisaillement, torsion, flexion). Dans le cas le plus général de chargement d'une poutre (fig. 204, *a*), on a affaire, dans ses sections transversales, à l'action de six composantes des forces internes (N, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_t) (fig. 204, *b*) qui sont liées aux quatre types de déformations simples d'une barre: traction ou compression, cisaillement, torsion et flexion.

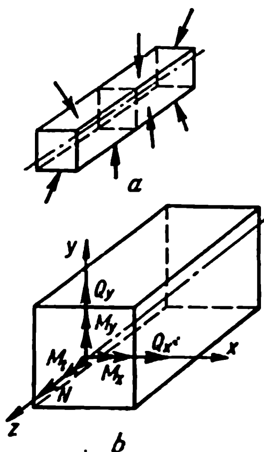


FIG. 204

En vertu de l'hypothèse sur le caractère indépendant des efforts, l'état de contrainte d'une barre rigide se détermine par voie d'addition des états de contrainte provoqués par chacun des types de chargement simple.

De la même façon, les déformations (déplacements) peuvent être déterminées par voie d'addition des déformations (déplacements) provoquées par chacune des composantes de la sollicitation.

Le *principe d'addition des efforts* ou le *principe de superposition* s'applique à tous les cas où les déformations sont petites et le matériau obéit à la loi de Hooke. En pratique, on rencontre rarement des cas où les six composantes des forces internes apparaissent en même temps dans la barre; d'ordinaire, on a affaire à différents types de leurs combinaisons.

61. Flexion composée et déviée

La *flexion composée* ou *non plane* est provoquée par des forces extérieures qui agissent dans des plans différents passant par l'axe d'une poutre (fig. 205, *a*). Dans ce cas, la déformée de la poutre ne se présente pas comme une courbe plane.

Si toutes les sollicitations qui provoquent la flexion agissent dans un même plan ne coïncidant avec aucun des plans principaux, la flexion est dite *déviée* (fig. 206, *a*).

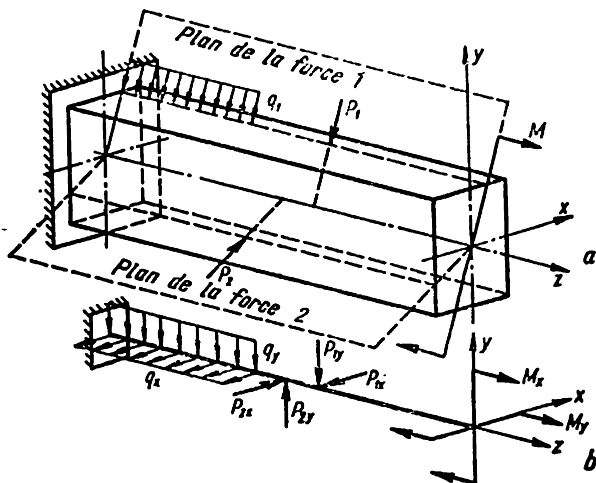


FIG. 205

D'ordinaire, on réduit la flexion composée ou déviée à deux flexions planes; pour cela, les sollicitations agissant dans des plans longitudinaux arbitraires se décomposent en composantes situées dans les plans principaux zy et zx (fig. 205, *b*, 206, *b*). Avec cela, dans la section apparaissent quatre composantes d'efforts internes: Q_x, Q_y, M_x et M_y.

Pour une action simultanée de M_x et M_y, les contraintes en des points situés, pour n'importe quelle section, dans le premier quadrant du système des coordonées xy (fig. 207, *a*) se déterminent par la formule:

$$\sigma = \frac{M_x y}{J_x} + \frac{M_y x}{J_y}. \tag{11.1}$$

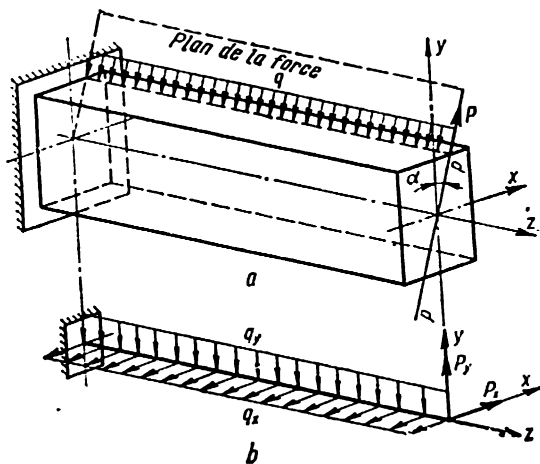


FIG. 206

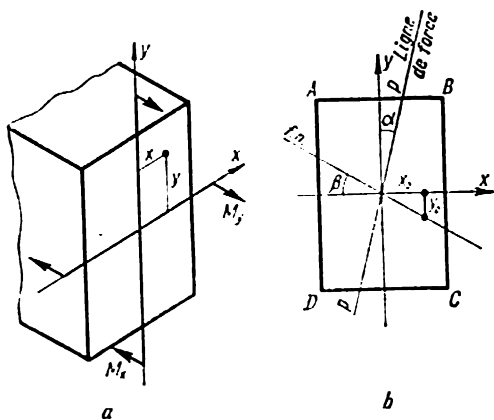


FIG. 207

Dans le cas général, quand on se sert de cette formule, il importe de tenir compte des signes accompagnant les coordonnées x et y.

En flexion déviée (fig. 208), on a les relations suivantes

$$\left.\begin{aligned} M_x &= M\cos\alpha; \\ M_y &= M\sin\alpha, \end{aligned}\right\} \qquad (11.2)$$

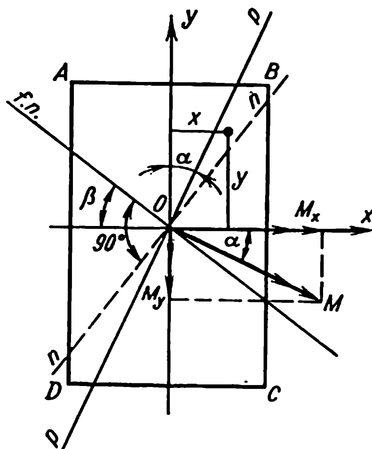


FIG. 208

M étant le moment fléchissant agissant dans une section donnée, dans le plan de la force pp (fig. 207, *b*).

La formule (11.1) peut être transcrite dans la forme suivante

$$\sigma = M\left(\frac{y\cos\alpha}{J_x} + \frac{x\sin\alpha}{J_y}\right). \qquad (11.3)$$

L'équation de la fibre neutre s'obtient de (11.1) si l'on y pose $\sigma = 0$:

$$\sigma = \frac{M_x y_0}{J_x} + \frac{M_y x_0}{J_y} = 0. \qquad (11.4)$$

L'équation (11.4) est l'équation d'une droite passant par l'origine des coordonnées. La position de la fibre neutre se détermine à l'aide de la tangente de l'angle β qu'elle forme avec l'axe principal x (fig. 207, *b*):

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{y_0}{x_0} = -\frac{M_y}{M_x}\cdot\frac{J_x}{J_y}. \qquad (11.5)$$

En construisant le diagramme vectoriel des moments (fig. 208) on détermine l'angle d'inclinaison α du plan de la force *pp* (plan dans lequel agit le moment)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{M_y}{M_x}. \tag{11.6}$$

L'angle d'inclinaison de la fibre neutre (11.5) peut alors être représenté par la formule

$$\operatorname{tg}\beta = -\frac{J_x}{J_y}\operatorname{tg}\alpha, \tag{11.7}$$

qui montre que, dans le cas général de flexion composée, quand $J_x \neq J_y$, la fibre neutre n'est pas perpendiculaire à la ligne de force.

Comme dans le cas d'une flexion déviée le rapport de M_y à M_x qui se caractérise par tg α (11.6) est constant sur toute la longueur de la barre, l'angle d'inclinaison β de la fibre neutre le sera également, c'est-à-dire la déformée va se situer dans un plan unique *n-n* (fig. 208) dit *plan de flexion*.

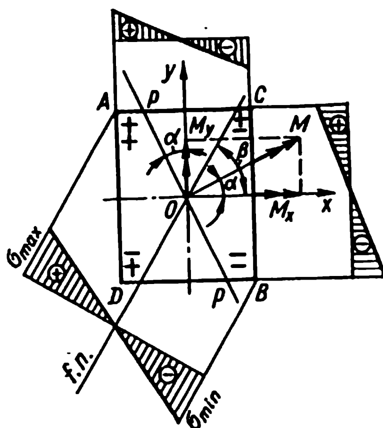


FIG. 209

Pour l'état de contrainte compliqué, le calcul de vérification de la résistance s'effectue à la base des données sur la contrainte totale la plus grande. Il est évident que, en flexion composée, les contraintes maximales σ_{max} se localiseront aux points les plus éloignés de la fibre neutre (les points *A* et *B* sur la fig. 209). Dans le cas présent, les contraintes maximales

de traction apparaissent au point A, tandis que les contraintes maximales de compression, au point B. Les conditions de résistance ont la forme suivante:

$$\sigma_{max} = \sigma_A = \frac{M_x y_A}{J_x} + \frac{M_y x_A}{J_y} < [\sigma_+]; \qquad (11.8)$$

$$\sigma_{min} = \sigma_B = -\frac{M_x y_B}{J_x} - \frac{M_y x_B}{J_y} < [\sigma_-]. \qquad (11.9)$$

Dans le cas d'une flexion déviée (fig. 207, *b*) les conditions de résistance s'écrivent comme suit:

$$\sigma_{max} = \sigma_B = M_{max}\left(\frac{x_B \sin\alpha}{J_y} + \frac{y_B \cos\alpha}{J_x}\right) < [\sigma_+]; \qquad (11.10)$$

$$\sigma_{min} = \sigma_D = -M_{max}\left(\frac{x_D \sin\alpha}{J_y} + \frac{y_D \cos\alpha}{J_x}\right) < [\sigma_-]. \qquad (11.11)$$

En particulier, pour une section rectangulaire quand

$$\frac{J_y}{x_D} = \frac{J_y}{x_B} = W_y; \quad \frac{J_x}{y_B} = \frac{J_x}{y_D} = W_x,$$

les formules (11.10) et (11.11) peuvent être représentées de la manière suivante:

$$\sigma_{max} = \sigma_B = M_{max}\left(\frac{\sin\alpha}{W_y} + \frac{\cos\alpha}{W_x}\right) < [\sigma_+]; \qquad (11.12)$$

$$\sigma_{min} = \sigma_D = -M_{max}\left(\frac{\sin\alpha}{W_y} + \frac{\cos\alpha}{W_x}\right) < [\sigma_-]. \qquad (11.13)$$

La détermination des dimensions d'une section dans le cas d'une flexion non plane s'effectue par la méthode de sélection en se fixant différents rapports des moments résistants. Les contraintes tangentielles peuvent être déterminées d'après la formule de Jouravski

$$\tau_y = \frac{Q_y S_x}{J_x b}; \quad \tau_x = \frac{Q_x S_y}{J_y h}.$$

Les déplacements se déterminent d'après le principe de l'indépendance des effets des forces. Si w est la flèche dans la direction de l'axe principal y;

v, la flèche dans la direction de l'axe principal x (fig. 210), les équations différentielles de flexion dans les plans yOz et xOz auront la forme suivante

$$EJ_x \frac{d^2w}{dz^2} = M_x; \quad EJ_y \frac{d^2v}{dz^2} = M_y. \quad (11.14)$$

Les équations (11.14) se résolvent à l'aide de n'importe laquelle des méthodes connues tout comme pour une flexion simple.

La valeur de la flèche totale dans une section quelconque d'une poutre peut être obtenue par addition géométrique des flèches des différents plans d'après la formule

$$f = \sqrt{v^2 + w^2}. \quad (11.15)$$

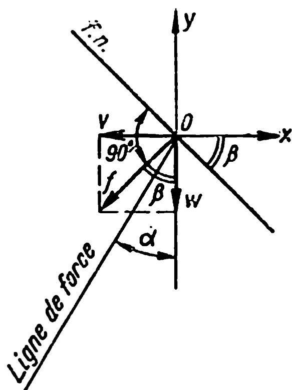


FIG. 210

§ 62. Flexion avec traction

L'action conjuguée de la flexion et de la traction (compression) a lieu dans les cas suivants: sollicitations agissant dans les plans longitudinal et transversal; traction (compression) excentrée.

Flexion composée avec traction (compression) d'une poutre droite. Pour le cas général (fig. 211, *a*) quand la poutre est soumise à l'action des forces longitudinales et transversales coupant son axe, dans sa section apparaissent les efforts M_x, M_y, Q_x, Q_y ainsi qu'un effort longitudina

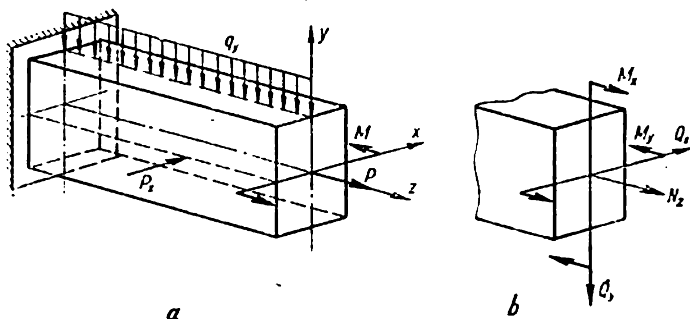


FIG. 211

dans le sens de l'axe z-N_z (fig. 211, *b*). Dans ce cas, les contraintes normales en un point quelconque se déterminent par la formule

$$\sigma = \frac{N_z}{F} + \frac{M_x}{J_x} y + \frac{M_y}{J_y} x. \qquad (11.16)$$

En supposant linéaire l'état de contrainte en un point dangereux (avec cela, les contraintes tangentielles ne sont pas prises en considération), la condition de résistance s'écrit dans la forme habituelle

$$\sigma_{max} \leqslant [\sigma]. \qquad (11.17)$$

Pour une section à symétrie double, la formule (11.16) prend la forme suivante

$$\sigma_{\pm} = \frac{N}{F} \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y}.$$

Pour le cas d'une flexion dans le plan zy

$$\sigma_{\pm} = \frac{N}{F} \pm \frac{M_x}{W_x}. \qquad (11.18)$$

On se sert également de ces formules quand on calcule à la résistance les portiques plans ainsi que les arcs de faible courbure.

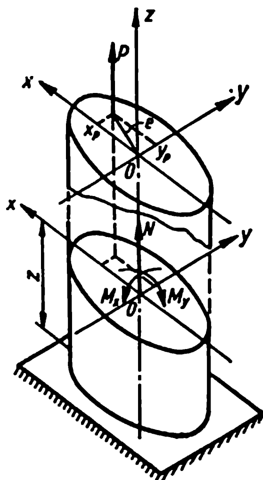


FIG. 212

Traction (compression) excentrée d'une poutre droite. Noyau central d'une section. En pratique, la flexion se trouve souvent combinée avec la traction (compression) suite à une application excentrée de la sollicitation parallèle à l'axe de la barre en sorte que la résultante P ne coïncide pas avec l'axe de cette dernière (fig. 212). Désignons les coordonnées du point d'application de la résultante par x_P et y_P, et la distance de ce point à l'axe z, appelée excentricité, par e. Les efforts internes en une section quelconque sont:

$$N = P; \quad M_y = Px_P; \quad M_x = Py_P,$$

tandis que les contraintes en un point quelconque de la section sont données par la formule

$$\sigma_z = \frac{N}{F} + \frac{M_y}{J_y} x + \frac{M_x}{J_x} y \qquad (11.19)$$

ou

$$\sigma_z = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{x_P F}{J_y} x + \frac{y_P F}{J_x} y\right). \qquad (11.20)$$

Cette formule peut également être exprimée à l'aide des rayons d'inertie

$$\sigma_z = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{x_P}{i_y^2} x + \frac{y_P}{i_x^2} y\right). \qquad (11.21)$$

L'équation de la fibre neutre $\sigma = 0$ sera obtenue de (11.21):

$$\frac{x_P}{i_y^2} x_0 + \frac{y_P}{i_x^2} y_0 = -1. \qquad (11.22)$$

Les segments formés par l'intersection de la fibre neutre avec les axes y et x (fig. 213) s'obtiennent de (11.22) si l'on y pose $x_0 = 0$, $y_0 = 0$,

$$x_{f.n} = -\frac{i_y^2}{x_P}; \quad y_{f.n} = -\frac{i_x^2}{y_P}. \qquad (11.23)$$

De (11.23) il s'ensuit que la fibre neutre coupe les axes des coordonnées en des points appartenant au quadrant qui est l'opposé de celui dans lequel se situe le point d'application de la force P.

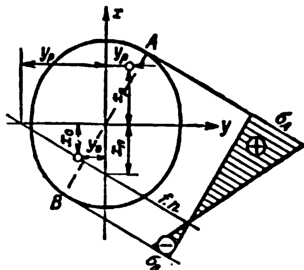


FIG. 213

Pour les points aux contraintes de traction maximales et les points aux contraintes de compression maximales (sur la fig. 213, les points A et B, respectivement), les conditions de résistance peuvent être écrites comme suit:

$$\sigma_{max} = \sigma_A = \frac{P}{F}\left(1 + \frac{x_P}{i_y^2} x_A + \frac{y_P}{i_x^2} y_A\right) < [\sigma_+]; \qquad (11.24)$$

$$\sigma_{min} = \sigma_B = \frac{P}{F}\left(1 - \frac{x_P}{i_y^2} x_B - \frac{y_P}{i_x^2} y_B\right) < [\sigma_-]. \qquad (11.25)$$

Les diagrammes des tensions σ_z sont présentés sur la fig. 213.

Pour une barre de section rectangulaire, il est commode de présenter la condition de résistance de la manière suivante:

$$\sigma_{max} = \frac{P}{F} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leqslant [\sigma]. \tag{11.26}$$

Les formules (11.24)-(11.26) restent également valables dans le cas où la force P est une force de compression à condition qu'il n'y ait pas de danger de flambement.

La distance qui sépare la fibre neutre du centre de gravité et les dimensions des zones qui, dans la section, supportent des contraintes de traction et des contraintes de compression, dépendent de l'excentricité e. Il est évident que l'une ou l'autre de ces zones peut être absente (en traction, la zone de compression; en compression, la zone de traction), la fibre neutre ne coupera pas alors la section.

Il est d'un grand intérêt pratique, surtout pour les cas d'une compression excentrée des colonnes faites en matériaux qui résistent mal à la traction (par exemple, une maçonnerie en briques), de savoir la valeur maximale de l'excentricité pour laquelle les contraintes de traction seront absentes dans la section, c'est-à-dire lorsque la fibre neutre sera tangente au contour de la section.

On appelle ***noyau central de section*** *un domaine entourant le centre de gravité pour lequel une force P appliquée en son intérieur provoque en tous les points de la section transversale des contraintes d'un même signe.* Pour déterminer le noyau central de section, il faut se fixer différentes positions de la fibre neutre en traçant cette dernière tangentiellement au contour, de telle manière qu'elle ne le coupe nulle part (fig. 214) et calculer les coordonnées des points correspondants d'application de la force d'après les formules suivantes qui se déduisent de (11.23):

$$y_P = -\frac{i_x^2}{y_{f.n}}; \quad x_P = -\frac{i_y^2}{x_{f.n}}. \tag{11.27}$$

Les points ainsi obtenus détermineront le contour du noyau central de section.

Quand on fait tourner la fibre neutre par rapport à un certain point immobile appartenant au contour de la section, par exemple le point A, le point d'application de la force se déplace suivant une certaine droite, par exemple, la droite *2-3*.

Pour construire le noyau central de section d'une figure quelconque, par exemple d'un rectangle (fig. 215), il convient de considérer différentes positions de la fibre neutre qui coïncident avec les côtés de la section.

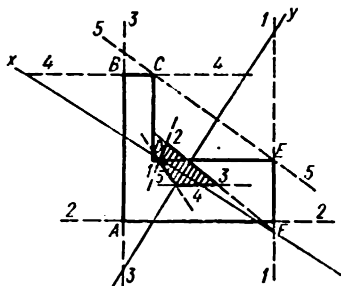


FIG. 214

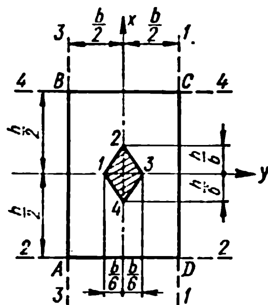


FIG. 215

Après avoir fait coïncider la fibre neutre avec le côté *CD* (position *1-1*), nous aurons: $y_{f.n} = b/2$; $x_{f.n} = \infty$; alors, en vertu de (11.27)

$$y_P = -\frac{i_x^2}{y_{f.n}} = -\frac{b}{6}\,; \quad x_P = -\frac{i_y^2}{\infty} = 0,$$

avec

$$i_x^2 = \frac{J_x}{F} = \frac{hb^3}{12\,bh} = \frac{b^3}{12}\,; \quad i_y^2 = \frac{J_y}{F} = \frac{bh^3}{12\,bh} = \frac{h^2}{12}\,.$$

De cette façon, nous déterminerons la coordonnée du point *1* du noyau central de section. En faisant coïncider la position de la fibre neutre avec le côté *AD* (position *2-2*) nous obtiendrons de façon analogue

$$y_{f.n} = \infty; \quad x_{f.n} = -\frac{h}{2}$$

et les coordonnées du point *2* du noyau seront

$$y_P = 0; \quad x_P = -\frac{i_y^2}{x_{f.n}} = -\frac{h^2}{12\left(-\frac{h}{2}\right)} = \frac{h}{6}\,.$$

En se fixant les positions correspondantes de la fibre neutre *3-3* et *4-4*, nous déterminerons de façon analogue les coordonnées des points *3* et *4* du noyau.

Le tableau 21 donne la forme et les dimensions du noyacentral de section pour différentes sections d'une poutre.

§ 63. Flexion avec torsion

Arbre rond. L'action combinée de la flexion et de la torsion constitue le cas le plus caractéristique des arbres. A ce type d'état de contrainte sont propres cinq composantes d'efforts internes:

$$M_t = M_z\ ; \quad M_y; \quad M_x; \quad Q_y \quad \text{et} \quad Q_x.$$

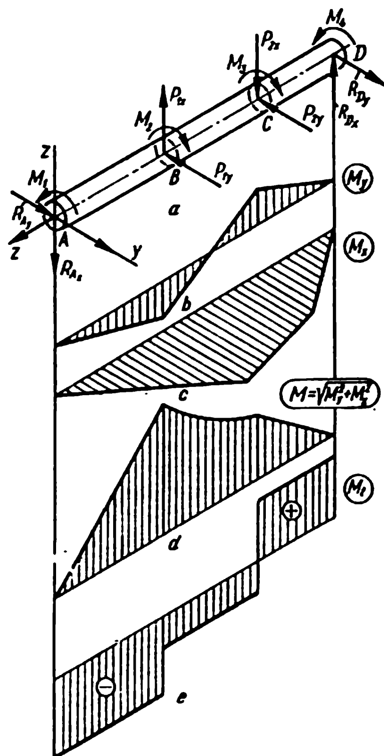


FIG. 216

Lors du calcul des arbres, on construit d'abord les diagrammes des moments fléchissants M_x et M_y, du moment résultant M et aussi des moments de torsion M_t et puis, on établit la section dangereuse (fig. 216, *a*,

b, c, d, e). Le moment fléchissant résultant se détermine à l'aide de la formule

$$M=\sqrt{M_x^2+M_y^2}. \tag{11.28}$$

C'est à partir de M et de M_t dans la section fatiguée qu'on détermine les contraintes normales et tangentielles que supportent les points dangereux (fig. 217):

$$\sigma_{max}=\frac{M}{W}=\frac{\sqrt{M_x^2+M_y^2}}{W}\,; \tag{11.29}$$

$$\tau_{max}=\frac{M_t}{W_p}. \tag{11.30}$$

Les contraintes principales au point le plus fatigué (le point B sur la fig. 218) seront (voir § 52)

$$\sigma_1=\frac{1}{2}\left(\sigma+\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\right);\quad \sigma_2=0;\quad \sigma_3=\frac{1}{2}\left(\sigma-\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\right). \tag{11.31}$$

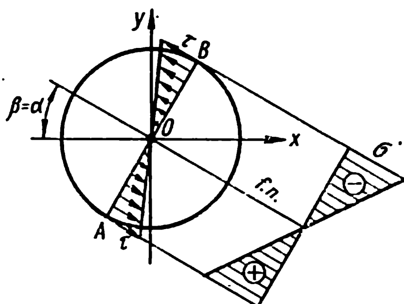


FIG. 217

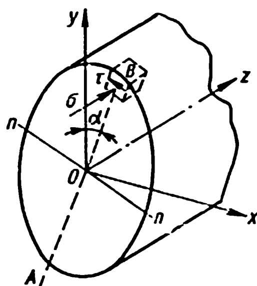


FIG. 218

Pour vérifier la résistance d'un élément prélevé au voisinage du point fatigué, il faut utiliser l'une des formules de la théorie de résistance correspondante:

$$\sigma_{\acute{e}q\,M}=\frac{1-m}{2}\sigma+\frac{1+m}{2}\sqrt{\sigma^2+4\tau^2}\leqslant[\sigma]; \tag{11.32}$$

$$\sigma_{\acute{e}q\,IV}=\sqrt{\sigma^2+3\tau^2}\leqslant[\sigma], \tag{11.33}$$

avec

$$m = \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]}.$$

La formule (11.32) est valable pour $m < 1$ pour les matières fragiles et, pour $m = 1$, pour les matières plastiques.

Mettant dans les formules (11.32) et (11.33) les expressions pour les contraintes et, tenant compte de ce que $W_p = 2W$, nous aurons

$$\sigma_{\text{éq}\,M} = \frac{1}{W}\left[\frac{1-m}{2}\sqrt{M_x^2 + M_y^2} + \frac{1+m}{2}\sqrt{M_t^2 + M_x^2 + M_y^2}\right] \leqslant [\sigma]; \tag{11.34}$$

$$\sigma_{\text{éq}\,\text{IV}} = \frac{1}{W}\sqrt{0{,}75\,M_t^2 + M_x^2 + M_y^2} \leqslant [\sigma]. \tag{11.35}$$

Dans ces formules, les seconds cofacteurs représentent les moments réduits M_r dont l'effet équivaut à celui de l'action combinée des moments M_x, M_y et M_t en accord avec les théories de résistance adoptées

$$M_{r\,M} = \frac{1-m}{2}\sqrt{M_x^2 + M_y^2} + \frac{1+m}{2}\sqrt{M_t^2 + M_x^2 + M_y^2}; \tag{11.36}$$

$$M_{r\,\text{IV}} = \sqrt{0{,}75\,M_t^2 + M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{0{,}75\,M_t^2 + M^2}. \tag{11.37}$$

Pour les autres théories de résistance, on aura par analogie:

$$M_{r\,\text{I}} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{M_x^2 + M_y^2} + \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_t^2}\right]; \tag{11.38}$$

$$M_{r\,\text{II}} = 0{,}35\sqrt{M_x^2 + M_y^2} + 0{,}65\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_t^2} \tag{11.39}$$

(pour $\mu = 0{,}3$);

$$M_{r\,\text{III}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_t^2}. \tag{11.40}$$

Les conditions de résistance (11.34) et (11.35) peuvent être transformées en une seule formule

$$\sigma_{\text{éq}} = \frac{M_r}{W} \leqslant [\sigma]. \tag{11.41}$$

D'où

$$W \geqslant \frac{M_r}{[\sigma]}, \tag{11.42}$$

et le diamètre de l'arbre se déterminera de la condition:

$$d \geqslant \sqrt[3]{\frac{32\,M_r}{\pi[\sigma]}} \approx \sqrt[3]{10\,\frac{M_r}{[\sigma]}}. \tag{11.43}$$

Les formules ci-dessus restent entièrement en vigueur pour le cas du calcul des arbres de section annulaire.

Poutre de section rectangulaire. Quand une poutre de section rectangulaire est sollicitée par un système de forces P_1 et P_2 (fig. 219, *a*) qui provoquent dans la section les moments M_x, M_y et M_t, le calcul s'effectue dans l'ordre suivant. Les forces extérieures se décomposent en composantes ramenées à l'axe de l'arbre. Pour trouver la section fatiguée, on trace les diagrammes des M_x, M_y et M_t (fig. 219, *b*). Après avoir établi, d'après ces diagrammes, la section fatiguée *1-1* située à gauche du point d'application de la force P_2, on y détermine le point dangereux en traçant les diagrammes des contraintes provoquées par tous les facteurs de force (fig. 220, *a, b, c, d, e, f*):

$$\sigma_z(M_x);\quad \sigma_z(M_y);\quad \tau_{xz}(Q_x);$$
$$\tau_{yz}(Q_y);\quad \tau(M_t).$$

Le diagramme $\tau(M_t)$ atteint son maximum, que nous désignerons par $\tau_{max}(M_t)$, pour le côté long du contour. Nous désignerons par $\tau'_{max}(M_t)$ l'ordonnée la plus grande du diagramme $\tau(M_t)$ sur le côté court. Ces contraintes peuvent être calculées d'après les formules connues qui décrivent la torsion des poutres à section rectangulaire (voir § 47):

$$\tau_{max}(M_t) = \tau_L = \tau_N = \frac{M_t}{\alpha h b^2};$$

$$\tau'_{max}(M_t) = \tau_M = \tau_K = \gamma\tau_{max}(M_t).$$

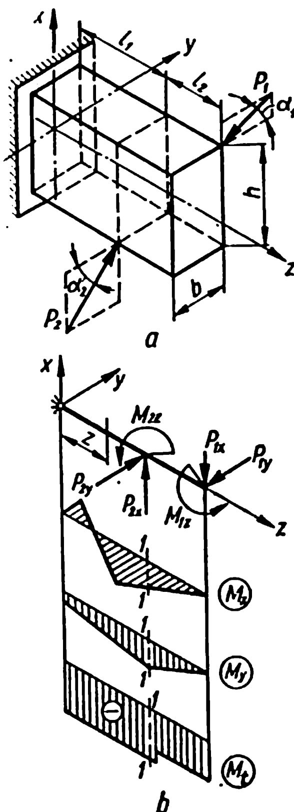


FIG. 219

Dans ce cas, les σ_{max} dues à la flexion ne coïncident pas avec les τ_{max} dues à la torsion, aussi, pour déterminer le point représentant le plus de danger, est-on obligé de considérer la combinaison des contraintes en quelques points. D'ordinaire, on se contente de trois points: un des points angulaires (A ou C) et les points situés au milieu des côtés long (les points L ou N) et court (les points M ou K) du rectangle. Ainsi, pour les points C, L, K, nous aurons

$$\sigma_C = \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leqslant [\sigma]; \tag{11.44}$$

$$\tau_L = \frac{M_t}{\alpha hb^2} \pm \frac{3}{2}\frac{Q_x}{bh}; \tag{11.45}$$

$$\tau_K = \overset{*}{\gamma}\frac{M_t}{\alpha hb^2} \pm \frac{3}{2}\frac{Q_y}{bh}. \tag{11.46}$$

D'ordinaire, les contraintes tangentielles dues aux efforts tranchants Q_x et Q_y ne sont pas importantes et peuvent donc être négligées.

Les contraintes équivalentes aux points L et K, d'après la IV-ième théorie de résistance et la théorie de Coulomb-Moore, sont:
au point L

$$\sigma_{\text{éq IV}} = \sqrt{\left(\frac{M_x}{W_x}\right)^2 + 3\left(\frac{M_t}{\alpha hb^2}\right)^2} \leqslant [\sigma]; \tag{11.47}$$

$$\sigma_{\text{éq }M} = \frac{1-m}{2}\frac{M_x}{W_x} + \frac{1+m}{2}\sqrt{\left(\frac{M_x}{W_x}\right)^2 + 4\left(\frac{M_t}{\alpha hb^2}\right)^2} \leqslant [\sigma]; \tag{11.48}$$

au point K

$$\sigma_{\text{éq IV}} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 3\left(\overset{*}{\gamma}\frac{M_t}{\alpha hb^2}\right)^2} \leqslant [\sigma]; \tag{11.49}$$

$$\sigma_{\text{éq }M} = \frac{1-m}{2}\frac{M_y}{W_y} + \frac{1+m}{2}\sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y}\right)^2 + 4\left(\overset{*}{\gamma}\frac{M_t}{\alpha hb^2}\right)^2} \leqslant [\sigma]. \tag{11.50}$$

Ainsi, le point le plus dangereux se détermine uniquement au terme d'un calcul des contraintes équivalentes en tous les trois points (C, L et K) d'après les formules (11.44), (11.47)-(11.50). Avec cela, la position du

point le plus dangereux dépend, dans chaque cas concret, du rapport entre les moments M_x, M_y et M_t.

Cas général d'application des forces sur la poutre. Si la section d'une barre est soumise à l'action d'une force axiale N_z, des moments fléchissants M_x et M_y situés dans les plans principaux ainsi que du moment de torsion M_t, la condition de résistance au point K, selon la IV-ième théorie de résistance par exemple (fig. 220, *a*), sera

$$\sigma_{\text{éq IV}} = \sqrt{\left(\frac{M_y}{W_y} + \frac{N_z}{F}\right)^2 + 3\left(\gamma \frac{M_t}{\alpha hb^2}\right)^2} < [\sigma], \qquad (11.51)$$

au point L, de façon analogue

$$\sigma_{\text{éq IV}} = \sqrt{\left(\frac{M_x}{W_x} + \frac{N_z}{F}\right)^2 + 3\left(\frac{M_t}{\alpha hb^2}\right)^2} < [\sigma]. \qquad (11.52)$$

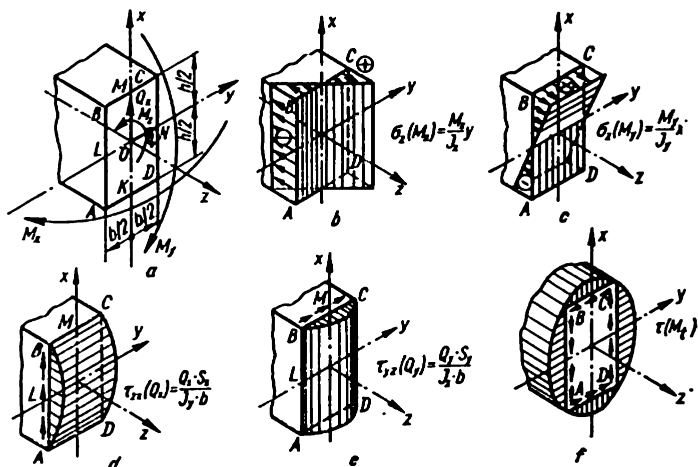
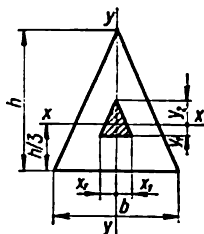
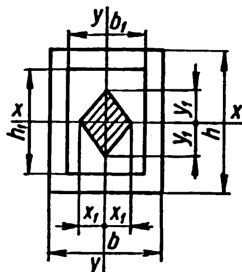


FIG. 220

Forme et dimensions du noyau central de section

Section transversale; noyau central de section (hachuré)	Dimensions du noyau central de section
Carré Le noyau est un carré	$x_1 = y_1 = \frac{h}{6}$; $x_2 = y_2 = \frac{h}{3}$; $r_{min} = 0{,}0589\ h$
Rectangle Le noyau est un losange	$x_1 = \frac{b}{6}$; $y_1 = \frac{h}{6}$; $x_2 = \frac{b}{3}$; $y_2 = \frac{h}{3}$; $r_{min} = \frac{bh}{6\sqrt{b^2 + h^2}}$

Section transversale; noyau central de section (hachuré)	Dimensions du noyau central de section
Triangle isocèle  Le noyau est semblable à la section transversale	$x_1 = \frac{b}{8}$; $y_1 = \frac{h}{12}$; $y_2 = \frac{h}{6}$. Pour $h = \frac{\sqrt{3}}{2} b$ (triangle équilatéral) $x_1 = \frac{b}{8}$; $y_1 = \frac{\sqrt{3}}{24} b$; $y_2 = \frac{\sqrt{3}}{12} b$
Rectangle creux  Le noyau est un losange	$x_1 = \frac{1}{6} \frac{hb^3 - h_1 b_1^3}{b(bh - b_1 h_1)}$; $y_1 = \frac{1}{6} \frac{bh^3 - b_1 h_1^3}{h(bh - b_1 h_1)}$. Pour $h = b$ et $h_1 = b_1$ (carré creux) $r_{min} = 0{,}0589\, h \left[1 + \left(\frac{h_1}{h}\right)^2\right]$

Section transversale; noyau central de section (hachuré)	Dimensions du noyau central de section
Octogone Le noyau est un octogone	$r_{min} = 0{,}2256\ R.$ Si l'octogone est creux (les rayons des circonférences: circonscrite, R_2; inscrite, R_1, et l'épaisseur de la paroi, $0{,}924\ (R_2 - R_1)$), alors $$r_{min} = 0{,}2256\ R_2 \left[1 + \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2\right]$$
Cercle Le noyau est un cercle	$$r = \frac{D}{8}$$

Section transversale; noyau central de section (hachuré)	Dimensions du noyau central de section
Cercle creux 2r, y, x, x, d, D, y Le noyau est un cercle	$r = \frac{D}{8}\left[1 + \left(\frac{d}{D}\right)^2\right]$
Tube à paroi mince y, δ, x, x, D, 2r, y Le noyau est un cercle	$r = \frac{D}{4}$

Théorèmes généraux sur les systèmes élastiques. Méthodes générales de détermination des déplacements

§ 64. Forces et déplacements généralisés

Les charges extérieures qu'on rencontre en résistance des matériaux et en mécanique des constructions sont très variées et représentent, d'ordinaire, un groupe de forces. Le travail effectué par un groupe de forces constantes peut être représenté sous forme de produit de deux grandeurs

$$A = P\Delta_P, \qquad (12.1)$$

dans lequel le facteur P dépend uniquement des forces du groupe et porte le nom de *force généralisée* tandis que Δ_P dépend des déplacements et porte le nom de *déplacement généralisé*.

C'est ainsi que par force généralisée on comprendra toute charge (forces ponctuelles, moments concentrés, charges réparties) susceptible d'effectuer un travail sur un déplacement généralisé correspondant.

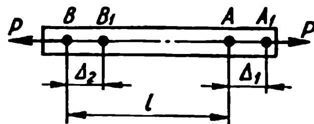


FIG. 221

Par exemple, si on considère le travail d'un système de forces agissant sur une barre (fig. 221), on aura

$$A = P\Delta_1 - P\Delta_2 = P(\Delta_1 - \Delta_2) = P\Delta_P,$$

P étant la force généralisée; $\Delta_P = \Delta_1 - \Delta_2 = \Delta l$, le déplacement généralisé.

Le travail du système de forces de la fig. 222 sera

$$A = P \cdot AA_1 + P \cdot BB_1 = P(OA + OB)\,d\theta = Pa\,d\theta = M\,d\theta.$$

Ici, c'est le moment $M = Pa$ qui est la force généralisée, tandis que l'angle de rotation $d\theta$, le déplacement généralisé correspondant.

Pour le système des forces de la fig. 223, la force généralisée sera le moment M tandis que le déplacement généralisé, la variation de l'angle α entre les éléments AB et CD, c'est-à-dire

$$\Delta_P = d\theta_1 + d\theta_2.$$

D'ordinaire, il est convenu de désigner les déplacements généralisés (tant linéaires qu'angulaires) par des lettres Δ et δ accompagnées d'indices

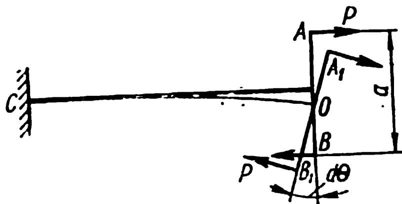


FIG. 222

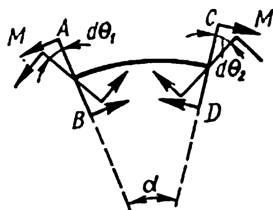


FIG. 223

doubles correspondants. Le premier indice sert à montrer le point et la direction du déplacement; le second, le facteur de force à l'origine de ce déplacement. Par exemple, Δ_{PP} signifie le déplacement du point d'application de la force P dans le sens d'action de cette dernière, déplacement dû à cette même force P (fig. 224, *a*). Δ_{MM} est le déplacement du point d'application du moment M dans le sens d'action de ce dernier quand ce déplacement est dû à l'action de ce même moment (fig. 224, *b*).

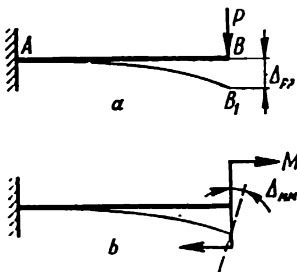


FIG. 224

Pour désigner un déplacement total provoqué par une série de facteurs de forces, des indices accompagnant Δ on retient seulement le premier. C'est ainsi que la déflexion totale et l'angle de rotation de l'extrémité d'une poutre (fig. 225) s'exprimeront respectivement par les formules

$$\left.\begin{aligned} \Delta_P &= \Delta_{PP} + \Delta_{PQ} + \Delta_{PM}; \\ \Delta_M &= \Delta_{MP} + \Delta_{MQ} + \Delta_{MM}. \end{aligned}\right\} \qquad (12.2)$$

Il est convenu de désigner les déplacements suscités par une force unitaire ($\bar{P} = 1$) ou un moment unitaire ($\bar{M} = 1$) par la lettre δ et de

leur conférer le nom de *déplacement spécifique*. Si une force unitaire $P = 1$ est à l'origine d'un déplacement δ_P, le déplacement total Δ_P dû à la force P sera

$$\Delta_P = P\delta_P. \tag{12.3}$$

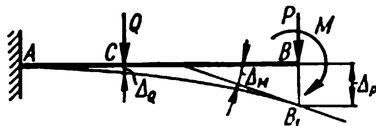


FIG. 225

De là on déduit l'unité de mesure du déplacement spécifique

$$[\sigma] = \frac{\text{unité de mesure du déplacement généralisé}}{\text{unité de mesure de la force généralisée}} . \tag{12.4}$$

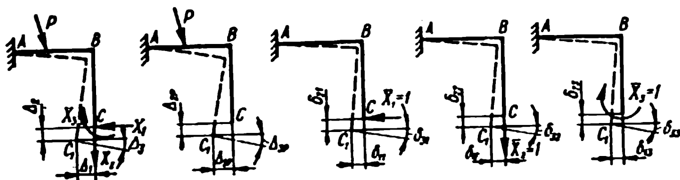


FIG. 226

Si on désigne les facteurs de force agissant sur un système par X_1, X_2, X_3, etc. (fig. 226), on peut exprimer les déplacements dans la direction de chacun d'entre eux à l'aide des formules suivantes

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \Delta_{1P} + X_1\delta_{11} + X_2\delta_{12} + X_3\delta_{13}; \\ \Delta_2 &= \Delta_{2P} + X_1\delta_{21} + X_2\delta_{22} + X_3\delta_{23}; \\ \Delta_3 &= \Delta_{3P} + X_1\delta_{31} + X_2\delta_{32} + X_3\delta_{33}, \end{aligned} \tag{12.5}$$

où

$$X_1\delta_{11} = \Delta_{11}; \quad X_2\delta_{12} = \Delta_{12}; \quad X_3\delta_{13} = \Delta_{13}; \ldots,$$

$$X_i\,\delta_{mi} = \Delta_{mi}.$$

On peut établir l'unité de mesure des déplacements δ_{mi} en multipliant la dernière égalité par X_m. Avec cela, l'expression $X_m X_i \delta_{mi} = X_m \Delta_{mi}$ a l'unité de mesure du travail (kgfcm), d'où nous obtenons

$$[\delta_{mi}] = \frac{\text{kgf cm}}{[X_m]\,[X_i]} .$$

Par exemple, dans la formule (12.5), l'unité de mesure est

$$[\delta_{13}] = \frac{\text{kgf cm}}{[X_1]\,[X_3]} = \frac{\text{kgf cm}}{\text{kgf}\cdot\text{kgf cm}} = \frac{1}{\text{kgf}}.$$

§ 65. Le travail des forces extérieures

L'examen du tableau des déformations d'un élément élastique (fig. 227, *a*) dans les limites où la loi de Hooke est vérifiée, tableau représenté dans

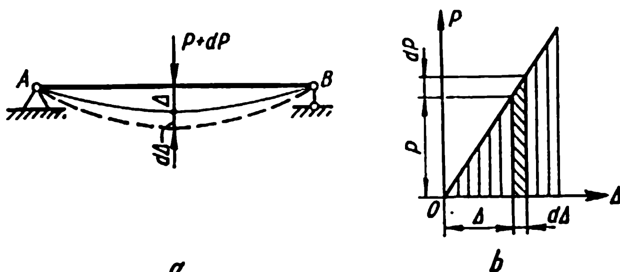


FIG. 227

les coordonnées: force généralisée P — déplacement généralisé Δ (fig. 227,*b*), montre qu'un accroissement de la force dP provoque un déplacement infiniment petit $d\Delta$. Avec cela, le travail total effectué par les forces extérieures, si l'on néglige des infiniment petits de second ordre, est égal à

$$dA = (P + dP)\,d\Delta \approx P d\Delta.$$

Le travail total effectué par une force généralisée P, statiquement appliquée et se trouvant à l'origine d'un déplacement généralisé $\Delta = P\delta_{PP}$, est donné par la formule

$$A = \int_{\Delta} P d\Delta = \int_0^P P d(P\delta_{PP}) = \int_0^P P\delta_{PP}\, dP = \frac{\delta_{PP}P^2}{2};$$
$$A = \frac{\delta_{PP}P^2}{2} = \frac{\Delta^2}{2\delta_{PP}} = \frac{P\Delta}{2}. \qquad (12.6)$$

Ainsi, *pour l'action statique d'une force généralisée sur un système élastique, le travail effectif est égal à la moitié du produit de la valeur définitive de la force par la valeur définitive du déplacement correspondant.*

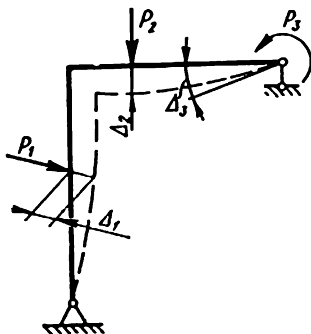


FIG. 228

Quand sur un système élastique agit un groupe de forces généralisées $P_1, P_2, \ldots, P_i$ (fig. 228), le travail de déformation est égal à la demi-somme des produits des valeurs définitives de ces forces généralisées par les déplacements généralisés définitifs totaux correspondants

$$A = \frac{1}{2} \sum P_i \Delta_i \tag{12.7}$$

et ne dépend guère de l'ordre de mise en charge du système.

§ 66. Le travail des forces intérieures

En déformation élastique, dans les éléments du corps déformé, se développent des forces internes: les *forces de résistance élastique* (fig. 229) Ces forces accomplissent également un travail. Comme les directions des forces élastiques (montrées en pointillé) sont opposées aux déplacements (sur lesquels elles accomplissent le travail) dus aux forces extérieures (montrées en lignes continues), *le travail effectué par les forces intérieures est toujours négatif.*

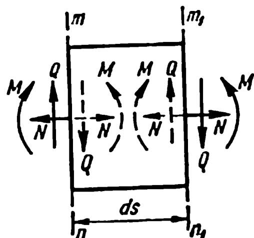


FIG. 229

Le travail des forces intérieures N, Q et M présentes dans un élément de la barre de longueur ds (fig. 229), travail qu'effectuent la force axiale N sur le déplacement

$$\Delta(ds) = \frac{Nds}{EF},$$

le moment M sur le déplacement

$$d\theta = \frac{Mds}{EJ},$$

ainsi que l'effort tranchant Q sur le déplacement

$$\gamma ds = k\,\frac{Qds}{GF}, \tag{12.8}$$

peut être exprimé par la formule

$$dW = -\frac{M^2ds}{2EJ} - \frac{N^2ds}{2EF} - k\frac{Q^2ds}{2GF}. \qquad (12.9)$$

Intégrant (12.9) pour chaque barre prise isolément et faisant ensuite la somme des résultats trouvés pour toutes les barres, on obtient une formule qui donne le travail des forces intérieures pour le cas d'une flexion plane

$$W = -\Sigma\int_0^s \frac{M^2ds}{2EJ} - \Sigma\int_0^s \frac{N^2ds}{2EF} - \Sigma k\int_0^s \frac{Q^2ds}{2GF}. \qquad (12.10)$$

A remarquer que l'expression (12.8) a été obtenue de la condition

$$\gamma ds = -\frac{dW_Q}{Q},$$

dans laquelle

$$dW_Q = -\int_F \frac{1}{2}\tau\gamma ds dF = -\int_F \frac{\tau^2 ds}{2G} dF =$$

$$= -\frac{Q^2ds}{2GJ_x^2}\int_F \frac{S_x^2}{b^2} dF = -k_y\frac{Q^2ds}{2GF};$$

$k_y = \frac{F}{J_x^2}\int_F \frac{S_x^2 dF}{b^2}$ est le coefficient qui dépend de la forme de la section.

En particulier, pour une section rectangulaire $b \times h$:

$$F = bh; \quad J_x = \frac{bh^3}{12}; \quad S_x = \frac{bh^2}{8}\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right);$$

$$k_y = \frac{9}{2h}\int_0^{h/2}\left(1 - \frac{4y^2}{h^2}\right)dy = 1,2;$$

pour une section circulaire $k = \frac{32}{27}$; pour des profilés, $k = \frac{F}{F_{âme}}$ approximativement, $F_{âme}$ étant l'aire de l'âme; F, l'aire totale de la section.

Pour le cas d'un cisaillement pur, quand

$$\tau = \frac{Q}{F};$$

$$dW_Q = -\frac{1}{2}\int_F \tau\gamma\, ds\, dF = -\frac{1}{2}\tau F\gamma\, ds = -\frac{Q\gamma ds}{2} = $$
$$= -\frac{Q^2 ds}{2GF}.$$

Dans ce cas, quand la barre subit l'action d'un moment de torsion M_t pour lequel un tronçon élémentaire de la barre se tord d'un angle

$$d\varphi = \frac{M_t ds}{GJ_t},$$

GJ_t étant la rigidité en torsion d'une section transversale de la barre, le travail élémentaire qu'effectuent les forces intérieures de torsion est égal à

$$dW_t = -\frac{1}{2}M_t d\varphi = -\frac{M_t^2 ds}{2GJ_t},$$

et le travail total des forces intérieures dans une barre de longueur l sera

$$W_t = -\int_l \frac{1}{2}\frac{M_t^2 ds}{GJ_t}. \qquad (12.11)$$

Généralement quand tous les six facteurs de force ($N, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_z = M_t$) agissent dans une section (fig. 230), le travail des forces intérieures (les forces d'élasticité) se détermine d'après la formule:

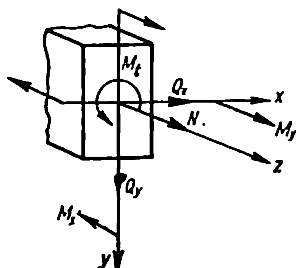


FIG. 230

$$W = -\int_s \frac{M_x^2 ds}{2EJ_x} - \int_s \frac{M_y^2 ds}{2EJ_y} - $$
$$-\int_s \frac{M_t^2 ds}{2GJ_t} - \int_s \frac{N^2 ds}{2EF} - \int_s k_x\frac{Q_x^2 ds}{2GF} - $$
$$-\int_s k_y\frac{Q_y^2 ds}{2GF}. \qquad (12.12)$$

La formule (12.12) reste en vigueur pour les barres de faible courbure.

§ 67. Application du principe des déplacements virtuels à des systèmes élastiques

Le principe des déplacements virtuels appliqué à des systèmes élastiques se formule de la manière suivante: *si un système subissant l'action d'une charge appliquée se trouve en équilibre, la somme des travaux qu'effectuent les forces extérieures et intérieures sur des déplacements virtuels infiniment petits des points du système est égale à zéro*

$$\sum P_i \Delta_{im} + W_{im} = 0, \tag{12.13}$$

ici P_i — les forces extérieures; Δ_{im} — les déplacements virtuels des points d'application de ces forces; $\sum P_i \Delta_{im}$ — le travail des forces extérieures; W_{im} — le travail des forces intérieures.

Tant que le système accomplit le déplacement virtuel, la valeur et la direction des forces extérieures et intérieures restent constantes. C'est pour cette raison que, quand on calcule les travaux, il faut prendre, non pas la moitié, mais bien la valeur totale du produit des forces et des déplacements correspondants.

Tenant compte de la faiblesse des déformations ainsi que du caractère linéaire de leur dépendance par rapport aux charges, on peut adopter, en qualité de *déplacements virtuels*, les *déplacements élastiques dus à une charge de forme quelconque qui s'effectuent sans qu'il y ait perturbation des liaisons*. On appelle *travail virtuel*, le travail effectué par les forces lextérieures et intérieures sur les déplacements virtuels.

Examinons deux états d'un système plan se trouvant en équilibre: l'état *a* pour lequel le système est déformé par une force généralisée P_a (fig. 231, *a*) et l'état *b* lorsque le système est déformé par une force P_b (fig. 231, *b*).

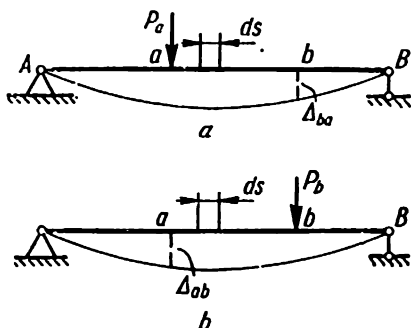


FIG. 231

On peut considérer les déplacements de l'état *b* comme des déplacements virtuels de l'état *a* et vice versa.

C'est pourquoi, le travail A_{ab} accompli par les forces de l'état *a* sur les déplacements de l'état *b* et le travail A_{ba} de l'état *b* sur les déplacements de l'état *a* sont respectivement égaux à

$$A_{ab} = P_a \Delta_{ab}; \tag{12.14}$$

$$A_{ba} = P_b \Delta_{ba}. \tag{12.15}$$

Le travail effectué par les forces intérieures de l'état *a* (sur la fig. 232,*a*, les lignes en pointillé) sur les déplacements dus à la charge de l'état *b* (fig. 232, *a*, *b*) peut s'obtenir de l'analyse du travail des forces intérieures d'un élément de la barre de longueur *ds* en déformation (fig. 233).

Ci-dessous on trouve le schéma de détermination du travail des forces intérieures.

Effort externe agissant sur l'élément (fig. 232, *b*)	Déformation de l'élément (fig. 233)	Travail d'une force intérieure de l'état *a* sur les déplacements de l'état *b*	Travail d'une force intérieure de l'état *a* dans un système de barres
N_b	$(\Delta ds)_b = \frac{N_b ds}{EF}$	$-N_a(\Delta ds)_b = -\frac{N_a N_b ds}{EF}$	$-\Sigma \int_s \frac{N_a N_b ds}{EF}$
Q_b	$(\gamma ds)_b = k\frac{Q_b ds}{GF}$	$-Q_a(\gamma ds)_b = -k\frac{Q_a Q_b ds}{GF}$	$-\Sigma \int_s k\frac{Q_a Q_b ds}{GF}$
M_b	$(d\theta)_b = \frac{M_b ds}{EJ}$	$-M_a(d\theta)_b = -\frac{M_a M_b ds}{EJ}$	$-\Sigma \int_s \frac{M_a M_b ds}{EJ}$

De cette façon, la valeur totale du travail virtuel des forces intérieures d'un système de barres est

$$W_{ab} = -\Sigma \int_s \frac{M_a M_b ds}{EJ} - \Sigma \int_s \frac{N_a N_b ds}{EF} - \Sigma \int_s k\frac{Q_a Q_b ds}{GF}. \tag{12.16}$$

Introduisant (12.14) et (12.16) dans (12.13), on obtient l'expression générale du principe des déplacements virtuels pour un système élastique plan de barres

$$\Sigma P_a \Delta_{ab} - \left[\Sigma \int_s \frac{M_a M_b ds}{EJ} + \Sigma \int_s \frac{N_a N_b ds}{EF} + \right.$$

$$\left. + \Sigma \int_s k \frac{Q_a Q_b}{GF} ds \right] = 0. \qquad (12.17)$$

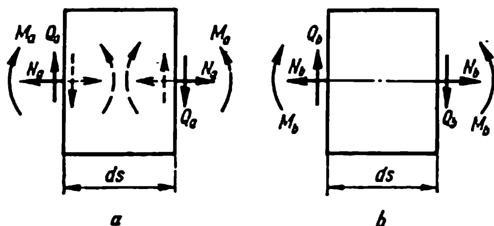


FIG. 232

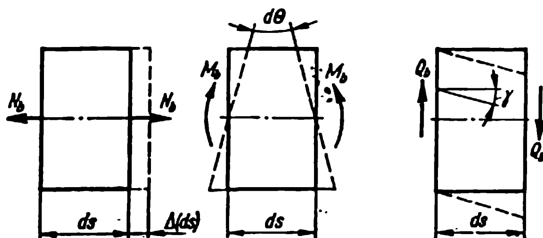


FIG. 233

Si en qualité de déplacements virtuels, on prend les déplacements Δ_a provoqués par une force donnée P_a, l'expression (12.17) prendra la forme suivante

$$\Sigma P_a \Delta_a - \left[\Sigma \int_s \frac{M_a^2 ds}{EJ} + \Sigma \int_s \frac{N_a^2 ds}{EF} + \Sigma \int_s k \frac{Q_a^2 ds}{GF} \right] = 0, \quad (12.18)$$

ou

$$\frac{1}{2}\Sigma P_a\Delta_a - \frac{1}{2}\left[\Sigma\int_s \frac{M_a^2ds}{EJ} + \Sigma\int_s \frac{N_a^2ds}{EF} + \Sigma\int_s k\frac{Q_a^2ds}{GF}\right] = 0. \tag{12.19}$$

Par conséquent,

$$A + W = 0, \tag{12.20}$$

ici

$$A = \frac{1}{2}\Sigma P_a\Delta_a \tag{12.21}$$

représente le travail effectif des forces extérieures au cours d'une déformation statique, tandis que

$$W = -\frac{1}{2}\left[\Sigma\int_s \frac{M_a^2ds}{EJ} + \Sigma\int_s \frac{N_a^2ds}{EF} + \Sigma\int_s k\frac{Q_a^2ds}{GF}\right] \tag{12.22}$$

représente le travail des forces intérieures au cours d'une déformation statique.

De l'équation (12.20) il vient que les valeurs effectives du travail des forces intérieures et extérieures sont égales en grandeur et de signes opposés.

§ 68. Théorèmes de réciprocité des travaux et des déplacements

Examinons un système élastique en ses deux états: l'état *1* (fig. 234, *a*) et l'état *2* (fig. 234, *b*). En vertu du principe des déplacements virtuels, nous aurons pour le premier état

$$P_1\Delta_{12} - \Sigma\left[\int_s \frac{M_1M_2ds}{EJ} + \int_s \frac{N_1N_2ds}{EF} + \int_s k\frac{Q_1Q_2ds}{GF}\right] = 0; \tag{12.23}$$

et pour le deuxième état

$$P_2\Delta_{21} - \Sigma\left[\int_s \frac{M_2M_1ds}{EJ} + \int_s \frac{N_2N_1ds}{EF} + \int_s k\frac{Q_2Q_1ds}{GF}\right] = 0. \tag{12.24}$$

Comme les expressions des travaux des forces intérieures sont, dans les deux formules, identiques, de (12.23) et (12.24), nous aurons l'égalité suivante

$$P_1 \cdot \Delta_{12} = P_2 \cdot \Delta_{21}. \tag{12.25}$$

La formule (12.25) traduit le *théorème de réciprocité des travaux* (théorème de Betti): *le travail virtuel des forces extérieures (ou intérieures) de l'état 1 sur les déplacements de l'état 2, est égal au travail virtuel des forces extérieures (ou intérieures) de l'état 2 sur les déplacements de l'état 1.*

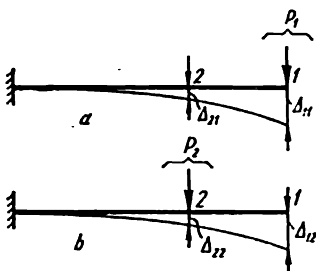


FIG. 234

Dans le cas particulier quand $\bar{P}_1 = 1$; $\bar{P}_2 = 1$ (fig. 235), en vertu de (12.15), on obtient la relation suivante

$$\delta_{12} = \delta_{21}, \tag{12.26}$$

laquelle traduit le *théorème de réciprocité des déplacements* (théorème de Maxwell): *le déplacement du point d'application de la première force unitaire dans le sens d'action de cette dernière sous l'action de la seconde force unitaire, est égal au déplacement du point d'application de la seconde force unitaire dans le sens d'action de cette dernière sous l'action de la première force unitaire.*

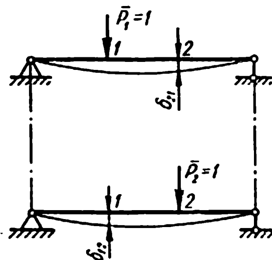


FIG. 235

§ 69. Formules générales pour la détermination des déplacements. Méthode de Mohr

Les formules générales pour déterminer les déplacements s'obtiennent aisément à l'aide du principe des déplacements virtuels si, en qualité d'état intermédiaire, on adopte un système sollicité, au point dont le déplacement nous intéresse, par une force généralisée unitaire correspondante $\bar{X}_i = 1$, laquelle doit effectuer un travail sur le déplacement virtuel constitué par le déplacement Δ_{iP} en question suite à l'action des charges extérieures.

Désignant par M_P, N_P, Q_P les efforts suscités par un système de forces extérieures $\sum P$ (fig. 236, *a*) et, par $\bar{M}_i$, $\bar{N}_i$, $\bar{Q}_i$, les efforts suscités par la force unitaire $\bar{X}_i = 1$ (fig. 236, *b*), le principe des déplacements

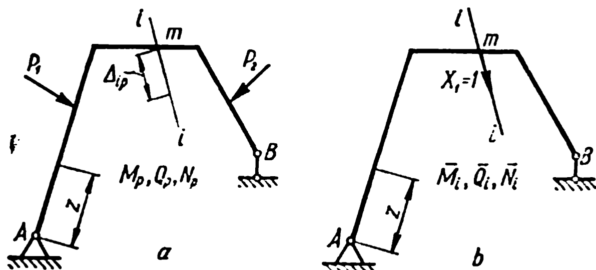


FIG. 236

virtuels pour l'état intermédiaire (c'est le déplacement effectif qui est adopté en qualité de virtuel) peut s'inscrire sous la forme suivante

$$1 \cdot \Delta_{iP} = \Sigma\left[\int_s \frac{\bar{M}_i M_P ds}{EJ} + \int_s \frac{\bar{N}_i N_P ds}{EF} + \int_s k\,\frac{\bar{Q}_i Q_P ds}{GF}\right]. \qquad (12.27)$$

Il est évident que, dans le cas le plus général quand toutes les six composantes des forces intérieures sont présentes, la formule (12.27) s'écrit

$$\Delta_{iP} = \Sigma \int_s \left[\frac{\bar{M}_i^x M_P^x}{EJ_x} + \frac{\bar{M}_i^y M_P^y}{EJ_y} + \frac{\bar{M}_i^t M_P^t}{GJ_t} + \right.$$

$$\left. + k_x \frac{\bar{Q}_i^x Q_P^x}{GF} + k_y \frac{\bar{Q}_i^y Q_P^y}{GF} + \frac{\bar{N}_i N_P}{EF}\right] ds. \qquad (12.28)$$

La formule (12.28) est la formule la plus générale et s'applique aussi au calcul des barres de faible courbure. La détermination des déplacements d'après les formules (12.27) et (12.28) porte le nom de *méthode de Mohr* ou *méthode de multiplication des diagrammes.*

Quand on détermine les déplacements dans les poutres, portiques et arcs d'après la méthode de Mohr, on peut, dans la majorité des cas, négliger dans la formule (12.27) l'influence des déformations longitudinales et du cisaillement et ne prendre en considération que les déplacements dus à la flexion. Dans ce cas, pour un système plan la formule (12.27) s'écrit dans la forme suivante:

$$\Delta_{iP} = \Sigma \int_s \frac{\bar{M}_i M_P ds}{EJ}. \qquad (12.29)$$

Pour le cas d'une sollicitation tridimensionnelle, la formule de Mohr se transforme en

$$\Delta_{iP} = \Sigma \left[\int\limits_s \frac{\overline{M}_i^x M_P^x \, ds}{EJ_x} + \int\limits_s \frac{\overline{M}_i^y M_P^y \, ds}{EJ_y} + \int\limits_s \frac{\overline{M}_i^t M_P^t \, ds}{GJ_t} \right]. \tag{12.30}$$

Quand on a à calculer des fermes articulées faites de barres droites, la formule de Mohr ne garde que le terme contenant la force longitudinale:

$$\Delta_{iP} = \Sigma \frac{\overline{N}_i N_P}{EF} l. \tag{12.31}$$

La formule (12.31) porte le nom de *formule de Maxwell.*

Ordre de détermination des déplacements par la méthode de Mohr.

1. On établit un système intermédiaire que l'on charge à l'aide d'une sollicitation unitaire appliquée au point dont il faut déterminer le déplacement. Quand on détermine les déplacements linéaires dans une direction donnée on applique la force unitaire, quand on détermine les déplacements angulaires, c'est le moment unitaire qu'on applique.

2. On écrit pour chaque partie du système les expressions des facteurs de force agissant dans une section quelconque du système donné (M_P, N_P, Q_P) et intermédiaire ($\overline{M}_i$, $\overline{N}_i$, $\overline{Q}_i$).

3. On calcule l'intégrale de Mohr pour toutes les parties du système. Quand on a affaire aux poutres, portiques et arcs plans, on se sert de la formule (12.29); s'il s'agit de fermes, on se sert de la formule (12.31).

4. Si le déplacement obtenu par calcul est de signe positif, cela signifie que sa direction coïncide avec celle de la force unitaire. Un signe négatif montre que le déplacement effectif est de direction opposée à celle de la force unitaire.

Le tableau 22 donne les expressions de l'intégrale de Mohr pour les cas les plus répandus de combinaison des diagrammes de M_i et M_P en flexion.

§ 70. Déplacements dus à la variation de la température

Supposons qu'un élément ds de la barre a été chauffé en bas jusqu'à une température t_b et, en haut, jusqu'à une température t_h (fig. 237, *a*, *b*) et que sur toute la hauteur de la section la température varie suivant une

fonction linéaire. Dans ce cas, les allongements des fibres supérieures et inférieures de l'élément en question sont:

$$\left.\begin{aligned}\Delta_s(ds) &= \alpha t_s\, ds;\\ \Delta_i(ds) &= \alpha t_i\, ds,\end{aligned}\right\} \qquad (12.32)$$

α étant le coefficient de dilatation thermique linéaire.

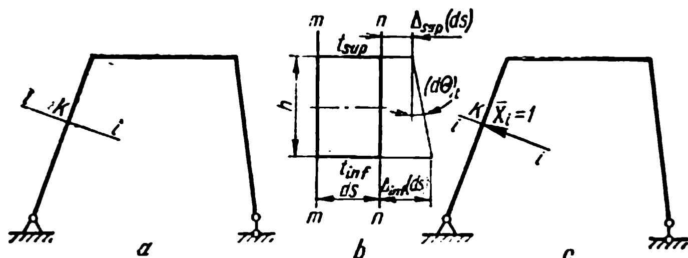


FIG. 237

L'allongement selon l'axe d'un élément non uniformément chauffé et l'angle de rotation réciproque de ses sections extrêmes ayant h pour hauteur, sont:

$$(\Delta ds)_t = \alpha \frac{t_s + t_i}{2}\, ds; \qquad (12.33)$$

$$(d\theta)_t = \frac{\Delta_i(ds) - \Delta_s(ds)}{h} = \alpha \frac{t_i - t_s}{h}\, ds. \qquad (12.34)$$

Dans le but de déterminer le déplacement d'un point quelconque K du système dans une direction arbitraire i-i, déplacement suscité par la différence des températures, choisissons un système intermédiaire et chargeons-le d'une force unitaire généralisée correspondante $\overline{X}_i = 1$ (fig. 237, c). Prenant le déplacement qui nous intéresse pour le déplacement virtuel, écrivons en accord avec (12.27) la formule des déplacements virtuels appliquée au cas présent:

$$\Delta_{it} = \Sigma \int_s \overline{M}_i (d\theta)_t + \Sigma \int_s \overline{N}_i (\Delta ds)_t. \qquad (12.35)$$

Tenant compte de (12.33) et (12.34), nous aurons

$$\Delta_{it} = \Sigma \int_l \bar{N}_i \alpha \frac{t_i + t_s}{2} ds + \Sigma \int_l \bar{M}_i \alpha \frac{t_i - t_s}{h} ds. \qquad (12.36)$$

La formule (12.36) s'emploie aussi pour le calcul des poutres de faible courbure.

Pour les fermes dans lesquelles agissent uniquement des efforts longitudinaux, les déplacements dus à la température se déterminent d'après la formule

$$\Delta_{it} = \Sigma \bar{N}_i \alpha t l, \qquad (12.37)$$

où $t = \frac{t_i + t_s}{2}$ est la température suivant l'axe d'une barre.

§ 71. Calcul de l'intégrale de Mohr d'après le procédé de Véréchaguine

Pour le cas où le diagramme dû à la charge donnée a une configuration arbitraire tandis que celui dû à la charge unitaire a une configuration rectiligne (fig. 238), il s'avère commode de calculer l'intégrale de Mohr $\int \bar{M}_i M_P dz$ à l'aide d'un procédé grapho-analytique que l'on doit à A. Véréchaguine.

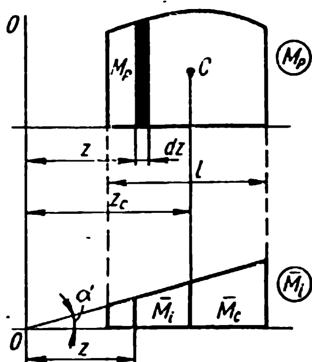


FIG. 238

Adoptons les désignations suivantes: Ω — l'aire du diagramme des M_P suite à l'action de la charge extérieure; C — le centre de gravité du diagramme; $\bar{M}_C$ — l'ordonnée du diagramme des moments dus à la force unitaire, située en dessous du centre de gravité du diagramme des M_P.

De toute évidence

$$M_P dz = d\Omega$$

(la différentielle de l'aire du diagramme);

$$\overline{M}_i = z \operatorname{tg} \alpha;$$

$$\int_l \overline{M}_i M_P dz = \operatorname{tg} \alpha \int_l z d\Omega;$$

$$\int_l z d\Omega = z_C \Omega; \quad \operatorname{tg} \alpha \cdot z_C = \overline{M}_C;$$

$$\int_l \overline{M}_i M_P dz = \Omega \overline{M}_C.$$

La formule générale des déplacements pour les systèmes constitués d'éléments rectilignes

$$\Delta_{iP} = \Sigma \int_l \frac{\overline{M}_i M_P dz}{EJ},$$

prend la forme suivante:

$$\Delta_{iP} = \Sigma \frac{\Omega \overline{M}_C}{EJ}. \tag{12.38}$$

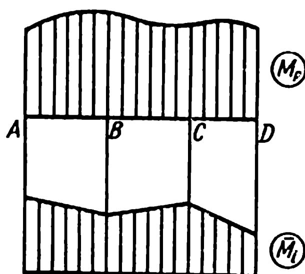


FIG. 239

C'est là la *formule de Véréchaguine*. Le calcul d'après cette formule s'effectue pour chaque tronçon où le diagramme rectiligne ne comporte pas de brisures (fig. 239).

Pour les cas où les deux diagrammes ($\overline{M}_i$ et M_P) sont rectilignes, on multiplie l'aire de l'un d'entre eux par l'ordonnée de l'autre, ordonnée correspondant au centre de gravité de l'aire du premier. Si le diagramme des M_P est de configuration complexe, il est permis de le subdiviser en des figures simples (fig. 240) dont il est facile de déterminer pour chacune d'elles la coordonnée du centre de gravité. On multiplie alors l'aire de chaque figure par l'ordonnée du diagramme unitaire correspondant au centre de gravité de l'aire que l'on désigne par η_k (au lieu de M_{Ck}). Dans ce cas, la formule de Véréchaguine prend la forme suivante

$$\Delta_{iP} = \sum_{k=1,2,3...} \frac{\Omega_k \cdot \eta_k}{EJ}. \tag{12.39}$$

On trouvera dans le tableau 23 les aires et coordonnées des centres de gravité de quelques figures élémentaires.

S'il faut tenir compte de la torsion, on introduira dans le terme correspondant de la formule générale (12.38) la rigidité en torsion GJ_t. Si les diagrammes de M_P et de $\bar{M}_i$ sont de signes opposés, le résultat de leur produit sera accompagné de signe «moins».

La formule générale de Véréchaguine s'emploie aussi pour le calcul des barres de section variable. Dans ce cas, l'intégrale de Mohr s'écrit:

$$\Delta_{iP} = \Sigma \int_l \frac{\bar{M}_i M_P dz}{EJ(z)} = \Sigma \int_l \frac{M_P \dfrac{J_0}{J(z)}}{EJ_0} \bar{M}_i dz,$$

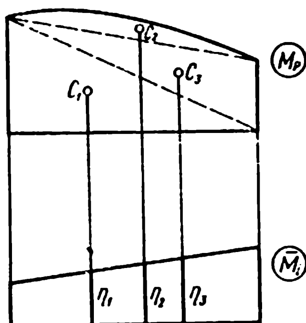


FIG. 240

où $J(z)$ est le moment d'inertie de l'aire d'une section quelconque; J_0 — le moment d'inertie d'une section déterminée (section la plus caractéristique).

Appelons la grandeur

$$M_{réd} = M_P \frac{J_0}{J(z)}$$

moment fléchissant réduit dans une section courante. Maintenant l'intégrale de Mohr prend la forme suivante

$$\Delta_{iP} = \Sigma \int_l \frac{\bar{M}_i M_{réd}}{EJ_0} dz,$$

tandis que la formule de Véréchaguine sera

$$\Delta_{iP} = \Sigma \frac{\Omega_{réd} \bar{M}_C}{EJ_0}, \tag{12.40}$$

ici $\Omega_{réd}$ — l'aire du diagramme de $M_{réd}$; $\bar{M}_C$ — l'ordonnée du diagramme unitaire correspondant au centre de gravité du diagramme réduit.

§ 72. Energie potentielle de déformation

En accord avec le principe de la conservation de l'énergie, le travail effectué par les forces extérieures au cours de la déformation d'un système élastique ne disparait pas mais se transforme en énergie potentielle de déformation laquelle peut se manifester sous forme de travail accompli par les forces intérieures lors du déchargement. C'est ainsi que lors d'un déchargement partiel (fig 241), une poutre se redresse quelque peu, soulève la partie restante de la charge et par là accomplit un travail déterminé.

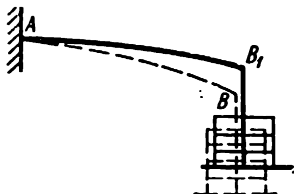


FIG. 241

Négligeant, pour une sollicitation statique, l'énergie cinétique ainsi que les pertes d'énergie occasionnées par le frottement intérieur, la variation de température, des phénomènes magnétiques et électriques qui ont lieu au cours de la déformation, l'on peut affirmer que la diminution de l'énergie potentielle d'un poids équivaut à la variation de l'énergie potentielle de déformation accumulée par la structure élastique, autrement dit,

$$U = U_P,$$

U étant l'accroissement de l'énergie potentielle de déformation; U_P — la diminution de l'énergie potentielle du poids.

La réduction de l'énergie potentielle du poids est numériquement égale au travail effectif des forces extérieures au cours de chargement du corps. Par conséquent, l'énergie potentielle de déformation est numériquement égale au travail qu'effectuent les forces extérieures au cours du chargement du système ou au travail qu'accomplissent les forces intérieures au cours du déchargement. En vertu de (12.12), l'énergie potentielle de déformation peut, dans le cas général, être déterminée à l'aide de la formule suivante

$$U = A = \frac{1}{2}\int_s \frac{M_x^2\,ds}{EJ_x} + \frac{1}{2}\int_s \frac{M_y^2\,ds}{EJ_y} + \frac{1}{2}\int_s \frac{M_t^2\,ds}{GJ_t} + \frac{1}{2}\int_s \frac{N^2 ds}{EF} + \frac{1}{2}\int_s k_x \frac{Q_x^2\,ds}{GF} + \frac{1}{2}\int_s k_y \frac{Q_y^2\,ds}{GF}. \qquad (12.41)$$

L'énergie potentielle de déformation étant une fonction quadratique des forces généralisées (ou bien des déplacements généralisés), elle sera toujours positive.

§ 73. Théorème de Castigliano. Théorème de Lagrange

Soit un système élastique (fig. 242) sollicité statiquement par une charge arbitraire Q et une certaine force généralisée P. Le déplacement du point d'application de la force P dans la direction de celle-ci et suite à l'action

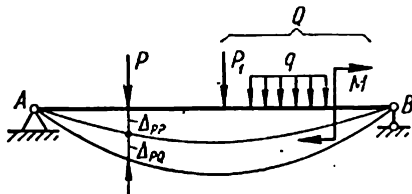


FIG. 242

de cette dernière sera Δ_{PP} tandis que le déplacement de ce même point sous l'action des forces Q sera Δ_{PQ}. Pour un déplacement total du point considéré égal à $\Delta_P = \Delta_{PP} + \Delta_{PQ}$, l'énergie potentielle du système élastique se traduira par la formule

$$U = \frac{1}{2} P\Delta_{PP} + P\Delta_{PQ} + U_{QQ},$$

U_{QQ} étant l'énergie accumulée au cours de la déformation du système par les forces Q uniquement et numériquement égale au travail effectué par les forces Q sur les déplacements qu'elles provoquent.

Comme $\Delta_{PP} = P\delta_{PP}$, la formule donnée plus haut peut être mise sous la forme suivante

$$U = \frac{1}{2} P^2\delta_{PP} + P\Delta_{PQ} + U_{QQ}. \qquad (12.42)$$

Dérivant cette expression par rapport à P, nous aurons

$$\frac{\partial U}{\partial P} = P\delta_{PP} + \Delta_{PQ} = \Delta_{PP} + \Delta_{PQ} = \Delta_P.$$

Par conséquent,

$$\Delta_P = \frac{\partial U}{\partial P}. \qquad (12.43)$$

Le déplacement du point d'application d'une force généralisée dans le sens d'action de cette dernière équivaut à la dérivée partielle de l'énergie potentielle par rapport à cette force. C'est en cela que consiste le *théorème de Castigliano.*

Faisons remarquer que la seconde dérivée de l'énergie potentielle par rapport à la force (généralisée) est, en vertu de la formule (12.42), égale à:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial P^2} = \frac{\partial \Delta_P}{\partial P} = \delta_{PP} \qquad (12.44)$$

et constitue une quantité substantiellement positive.

Pour un système de barres plan, la formule (12.41) prendra la forme

$$U = \int_s \frac{M^2(s)\,ds}{2EJ} + \int_s \frac{N^2(s)\,ds}{2EF} + \int_s k\,\frac{Q^2(s)\,ds}{2GF}, \qquad (12.45)$$

$M(s)$, $N(s)$ et $Q(s)$ étant les efforts agissant dans une section de la barre.

Se servant de la règle de différenciation par rapport au paramètre, on trouve

$$\Delta_P = \frac{\partial U}{\partial P} = \int_s \frac{M(s)ds}{EJ} \cdot \frac{\partial M(s)}{\partial P} + \int_s \frac{N(s)\,ds}{EF} \cdot \frac{\partial N(s)}{\partial P} +$$

$$+ \int_s k\,\frac{Q(s)\,ds}{GF} \cdot \frac{\partial Q(s)}{\partial P}, \qquad (12.46)$$

ou, en négligeant l'influence qu'exercent sur la valeur des déplacements les efforts axiaux et longitudinaux, on aura

$$\Delta_P = \int_s \frac{M(s)ds}{EJ} \cdot \frac{\partial M(s)}{\partial P}. \qquad (12.47)$$

Si, lors de la détermination des déplacements d'un point, il manque, par les données du problème, de force généralisée correspondante, on en introduit une, fictive. L'expression établie pour l'énergie potentielle de déformation est alors dérivée par rapport à cette force après quoi on annule cette dernière.

Si l'on présente l'énergie potentielle de déformation comme une fonction quadratique des déplacements indépendants $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, il s'avère que la dérivée partielle de l'énergie potentielle par rapport à un déplacement quelconque équivaut à la force agissant dans le sens du déplacement, autrement dit

$$\frac{\partial U}{\partial \Delta_i} = P_i. \qquad (12.48)$$

C'est en cela que réside le *théorème de Lagrange*.

§ 74. Théorème sur le minimum de l'énergie potentielle

Remplaçons dans un système hyperstatique (fig. 243, *a*) les liaisons surabondantes par des réactions correspondantes $X_1, X_2, X_3 \ldots$ (fig. 243, *b*) que nous considérerons comme des charges extérieures indépendantes l'une de l'autre et, d'après la méthode de Castigliano, calculons les déplacements correspondants Δ_1, Δ_2, $\Delta_3, \ldots$

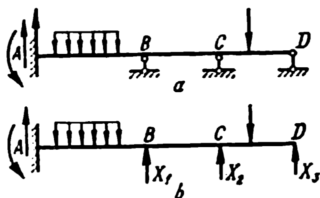


FIG. 243

Sachant au préalable que ces déplacements sont nuls, nous serons en droit d'écrire

$$\Delta_1 = \frac{\partial U}{\partial X_1} = 0; \quad \Delta_2 = \frac{\partial U}{\partial X_2} = 0; \quad \Delta_3 = \frac{\partial U}{\partial X_3} = 0, \ldots,$$

où $U = U(X_1, X_2, X_3, \ldots, P)$ représente l'énergie potentielle totale de déformation du système.

On se rend aisément compte de ce que les égalités

$$\frac{\partial U}{\partial X_1} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial X_2} = 0; \quad \frac{\partial U}{\partial X_3} = 0, \ldots \tag{12.49}$$

traduisent les conditions d'extrémum de la fonction U. Il n'est pas difficile de remarquer que cet extrémum est un minimum. Pour démontrer cette dernière affirmation, on peut se référer au signe positif des dérivées secondes qui, en vertu de (12.44), expriment les déplacements $\delta_{11}, \delta_{22}, \delta_{33}, \ldots$, lesquels sont des grandeurs substantiellement positives:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X_1^2} = \delta_{11}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial X_2^2} = \delta_{22}; \quad \frac{\partial^2 U}{\partial X_3^2} = \delta_{33}.$$

Ainsi, *dans des systèmes hyperstatiques, les inconnues superflues prennent de telles valeurs pour lesquelles l'énergie potentielle de déformation a une valeur minimale (théorème de Menabréa).* Ce théorème est aussi connu comme le *théorème sur le travail minimum* car, à la place de l'énergie potentielle on peut parler de travail des forces extérieures qui lui est numériquement égal. De ce théorème, il s'ensuit que quand on ajoute à un système élastique des liaisons quelconques, son énergie potentielle diminue toujours.

Expressions de l'intégrale de Mohr $\int \overline{M}_i M_P \, dz$ pour différentes combinai- $\overline{M}_i$ et M_P (l — base de l'aire du diagramme)

Diagramme $\overline{M}_i$ / Diagramme M_P	$\bar{h}$	$\bar{h}$
h	$\frac{1}{2} h\bar{h}l$	$\frac{1}{3} h\bar{h}l$
h	$\frac{1}{2} h\bar{h}l$	$\frac{1}{6} h\bar{h}l$
h_1, h_2	$\frac{1}{2} (h_1 + h_2)\bar{h}l$	$\frac{1}{6} (h_1 + 2h_2)\bar{h}l$
h, αl, βl	$\frac{1}{2} h\bar{h}l$	$\frac{1}{6} (1 + \alpha)h\bar{h}l$
h_1, h_2	$\frac{1}{2} (h_2 - h_1)\bar{h}l$	$\frac{1}{6} (2h_2 - h_1)\bar{h}l$

$\bar{h}_0$, $\bar{h}_1$, $\bar{h}_2$, $l/2$	$\bar{h}_0$, $\bar{h}_1$, $\bar{h}_2$, $l/2$	$\bar{h}$, $\bar{\alpha} l$, $\bar{\beta} l$
$\frac{1}{6}\, h(\bar{h}_1 + 2\bar{h}_2)l$	$\frac{1}{6}\, h(2\bar{h}_2 - \bar{h}_1)l$	$\frac{1}{6}\, h\bar{h}(1 + \alpha)l$
$\frac{1}{6}\, h(2\bar{h}_1 + \bar{h}_2)l$	$\frac{1}{6}\, h(\bar{h}_2 - 2\bar{h}_1)l$	$\frac{1}{6}\, h\bar{h}(1 + \beta)l$
$\frac{1}{6}\, [h_1(2\bar{h}_1 + \bar{h}_2) + h_2(2\bar{h}_2 + \bar{h}_1)]l$	$\frac{1}{6}\, [h_1(\bar{h}_2 - 2\bar{h}_1) + h_2(2\bar{h}_2 - \bar{h}_1)]l$	$\frac{1}{6}\, [(1 + \bar{\beta})h_1 + (1 + \bar{\alpha})h_2]\bar{h}l$
$\frac{1}{6}\, [(1 + \beta)\bar{h}_1 + (1 + \alpha)\bar{h}_2]hl$	$\frac{1}{6}\, [(1 + \alpha)\bar{h}_2 - (1 + \beta)\bar{h}_1]hl$	$\frac{1}{3}\, \bar{h}hl$ pour $\alpha = \bar{\alpha}$
$\frac{1}{6}\, [h_2(2\bar{h}_2 + \bar{h}_1) - h_1(2\bar{h}_1 + \bar{h}_2)]l$	$\frac{1}{6}\, [h_2(2\bar{h}_2 - \bar{h}_1) - h_1(\bar{h}_2 - 2\bar{h}_1)]l$	$\frac{1}{6}\, [(1 + \bar{\alpha})h_2 - (1 + \bar{\beta})h_1]\bar{h}l$

Diagramme $\bar{M}_i$ / Diagramme M_P	$\bar{h}$ (⊕)	$\bar{h}$
h; $\alpha\beta$, βl, βl	$h\bar{h}\beta l$	$\frac{1}{2} h\bar{h}\beta l$
h	$\frac{1}{3} h\bar{h}l$	$\frac{1}{4} h\bar{h}l$
h	$\frac{1}{3} h\bar{h}l$	$\frac{1}{12} h\bar{h}l$
h	$\frac{2}{3} h\bar{h}l$	$\frac{1}{3} h\bar{h}l$
h	$\frac{2}{3} h\bar{h}l$	$\frac{5}{12} h\bar{h}l$
h	$\frac{2}{3} h\bar{h}l$	$\frac{1}{4} h\bar{h}l$
h_3, h_1, h_2, $l/2$, h	$\frac{1}{6} \bar{h}(h_1 + h_2 + 4h)l$	$\frac{1}{6} \bar{h}(h_2 + 2h)l$

$\bar h_0$, $\bar h_1$, $\bar h_2$, $l/2$	$\bar h_0$, $\bar h_1$, $\bar h_2$, $l/2$	$\bar h$, $\bar\alpha l$, βl
$\frac{1}{2} h(\bar h_1 + \bar h_2)\beta l$	$\frac{1}{2} h(\bar h_2 - \bar h_1)\beta l$	$\frac{h\bar h}{6\bar\beta}\left(3 - 3\alpha - \frac{\bar\alpha^2}{\alpha}\right) l$ pour $\bar\alpha < \alpha$, $\frac{h\bar h}{6}\left(3 - \frac{\alpha^2}{\bar\alpha\bar\beta}\right) l$ pour $\bar\alpha > \alpha$
$\frac{1}{12} h(\bar h_1 + 3\bar h_2)l$	$\frac{1}{12} h(3\bar h_2 - \bar h_1)l$	$\frac{1}{12} h\bar h(1 + \bar\alpha + \bar\alpha^2)l$
$\frac{1}{12} h(3\bar h_1 + \bar h_2)l$	$\frac{1}{12} h(\bar h_2 - 3\bar h_1)l$	$\frac{1}{12} h\bar h(1 + \bar\beta + \bar\beta^2)l$
$\frac{1}{3} h(\bar h_1 + \bar h_2)l$	$\frac{1}{3} h(\bar h_2 - \bar h_1)l$	$\frac{1}{3}(1 + \bar\alpha\beta)h\bar h l$
$\frac{1}{12} h(3\bar h_1 + 5\bar h_2)l$	$\frac{1}{12} h(5\bar h_2 - 3\bar h_1)l$	$\frac{1}{12}(5 - \bar\beta - \bar\beta^2)h\bar h l$
$\frac{1}{12} h(5\bar h_1 + 3\bar h_2)l$	$\frac{1}{12} h(3\bar h_2 - 5\bar h_1)l$	$\frac{1}{12}(5 - \bar\alpha - \bar\alpha^2)h\bar h l$
$\frac{1}{6}(\bar h_1 h_1 + 4h\bar h_0 + h_2\bar h_2)l$	$\frac{1}{6}(h_2\bar h_2 + 4h\bar h_0 - h_1\bar h_1)\,l$	$\frac{1}{6}[h_1(1 + \bar\beta) + h_2(1 + \bar\alpha) + 2h_3(1 + \bar\alpha\bar\beta)]\bar h l$

Tableau 23

Aires et coordonnées des centres de gravité de certaines figures élémentaires

Diagramme M	Aire Ω	Coordonnées des centres de gravité	
		z_C	$l - z_C$
	$\frac{lh}{2}$	$\frac{2}{3}l$	$\frac{1}{3}l$
	$\frac{(h_1+h_2)}{2}l$	$\frac{h_1+2h_2}{3(h_1+h_2)}l$	$\frac{h_2+2h_1}{3(h_1+h_2)}l$
	$\frac{lh}{2}$	$\frac{a+l}{3}$	$\frac{b+l}{3}$
Parabole quadratique	$\frac{lh}{3}$	$\frac{3}{4}l$	$\frac{1}{4}l$

Suite

Diagramme M	Aire Ω	Coordonnées des centres de gravité	
		z_C	$l - z_C$
Parabole cubique	$\frac{lh}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{5}$
Moitié d'une parabole quadratique	$\frac{2}{3}\,lh$	$\frac{5}{8}\,l$	$\frac{3}{8}$
Parabole quadratique	$\frac{2}{3}\,lh$	$\frac{1}{2}\,l$	$\frac{1}{2}$
Parabole quadratique	$\frac{ql}{6}\,[l^2 + 3a(a+l)]$	$z_C = \frac{l}{4}\cdot\frac{6a^2l + 8al^2 + 3l^3}{3a^2l + 3al^2 + l^3}$; $l - z_C = \frac{l}{4} \times \frac{6a^2l + 4al^2 + l^3}{3a^2l + 3al^2 + l^3}$.	

Systèmes hyperstatiques

§ 75. Etapes fondamentales du calcul des systèmes hyperstatiques

On appelle systèmes hyperstatiques les systèmes pour lesquels les facteurs de force agissant dans leurs éléments ne peuvent pas être déterminés à partir uniquement des équations d'équilibre d'un corps solide. De tels systèmes comportent plus de liaisons qu'il n'en faut pour leur équilibre. Par là, une partie des liaisons se retrouve, dans ce sens, superflue tandis que les efforts correspondants constituent des *inconnues superflues*. Par

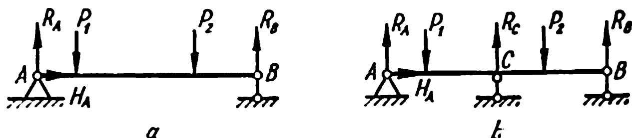


FIG. 244

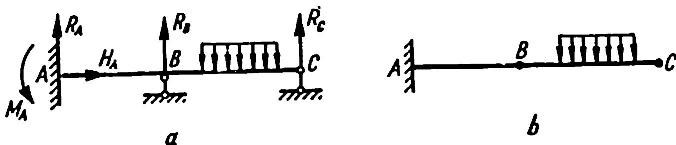


FIG. 245

le nombre de liaisons ou d'inconnues superflues on établit *l'ordre d'hyperstaticité du système*.

La fig. 244, *a* montre un système isostatique; la fig. 244, *b*, un système hyperstatique d'ordre 1. Sur la fig. 245, *a*, on montre une poutre hyperstatique d'ordre 2 obtenue à partir d'un système isostatique (fig. 245, *b*)

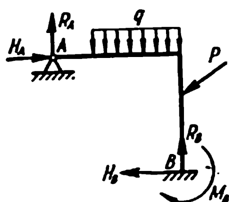


FIG. 246

auquel on a imposé deux liaisons articulées aux points B et C. La fig. 246 montre un portique plan à deux degrés d'hyperstaticité.

L'hyperstaticité peut non seulement être le résultat d'une introduction de liaisons supplémentaires mais aussi être déterminée par les conditions de formation du système. En guise d'exemple, on peut considérer le portique de la fig. 247, *a* pour lequel les réactions des appuis R_A, H_A, R_B se déterminent aisément des conditions d'équilibre alors que de ces dernières on ne peut guère trouver tous les facteurs de force agissant dans les éléments du portique. Sectionnant le portique en deux parties et considérant l'équilibre de chacune d'elles (fig. 247, *b*), nous pouvons établir que

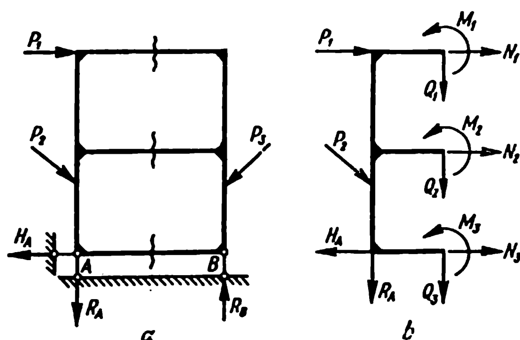


FIG. 247

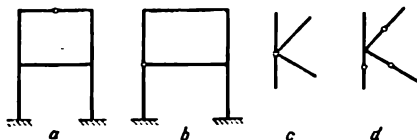


FIG. 248

ce portique constitue un système hyperstatique d'ordre 6 car chaque contour (non articulé) fermé est hyperstatique à trois degrés.

L'introduction d'une articulation sur l'axe d'une barre (fig. 248, *a*) (articulation isolée) annule le moment fléchissant dans cette section et,

partant, réduit l'ordre d'hyperstaticité d'une unité. Une articulation insérée dans un nœud (articulation multiple) où se croisent n barres (voir par exemple, la fig. 248, *b*, *c*) réduit l'ordre d'hyperstaticité de $n - 1$ unités car elle remplace autant d'articulations isolées (fig. 248, *d*). Le degré d'hyperstaticité des systèmes plans (s) peut être déterminé d'après la formule

$$s = 3c - a \tag{13.1}$$

où c est le nombre de contours fermés, a — le nombre d'articulations comptées à raison d'articulations isolées. L'embase (le sol) est considérée comme une barre de rigidité infinie ($EJ = \infty$).

Pour le calcul des systèmes hyperstatiques, on peut, en qualité d'inconnues, prendre tout aussi bien des forces ou des facteurs de force que des déplacements ou des facteurs de déformation. Dans le premier cas, nous aurons la *méthode des forces*, dans le second, la *méthode des déplacements.*

Le calcul d'après la méthode des forces s'effectue dans l'ordre suivant.

1. Etablissement de l'ordre d'hyperstaticité.

2. Substitution d'un système isostatique dit *système de base* au système initial par l'éloignement des liaisons surabondantes. Il est permis de construire un certain nombre de ces systèmes quitte à observer la condition de leur invariabilité géométrique.

3. Application au système isostatique de base des forces extérieures données ainsi que des efforts surabondants inconnus qui remplacent l'action des liaisons enlevées; au terme de quoi, on obtient un *système équivalent.*

4. Pour assurer l'équivalence entre le système d'origine et le système isostatique de base les efforts inconnus sont choisis de telle façon que les déformations du système isostatique de base ne diffèrent pas des déformations du système de départ, hyperstatique. Pour ce faire, les déplacements des points d'application des inconnues superflues dans le sens de leur action respective sont annulés. Des équations ainsi obtenues on détermine les valeurs des inconnues superflues. La détermination des déplacements des différents points peut se faire à l'aide de n'importe quel procédé, mais mieux vaut se servir de la méthode de Mohr, plus générale, ou alors du procédé de Véréchaguine.

5. Une fois établies les valeurs des inconnues superflues, on procède à la détermination des réactions et au tracé des diagrammes des efforts intérieurs, au choix des sections et à la vérification de la résistance par procédé ordinaire.

Considérons un exemple de calcul d'un système hyperstatique (fig. 249, *a*). Prenant pour inconnue superflue X_1 la réaction de l'appui B, nous aurons un système isostatique de base sous forme de console; en chargeant ce dernier de la force répartie q ainsi que de l'effort X_1, nous

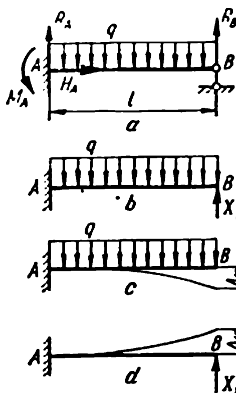


FIG. 249

obtiendrons un système équivalent (fig. 249, *b*). L'annulation de la flèche au point *B* va donner l'équation complémentaire des déplacements:

$$\Delta_1 = 0. \tag{13.2}$$

La flèche totale Δ_1 peut être représentée comme la somme des flèches dues à la charge extérieure (fig. 249, *c*)

$$\Delta_{1P} = -\frac{ql^4}{8EJ} \tag{13.3}$$

et à la réaction inconnue X_1 (fig. 249, *d*)

$$\Delta_{11} = \frac{X_1 l^3}{3EJ}. \tag{13.4}$$

L'équation (13.2) peut s'écrire dans la forme

$$\Delta_1 = \Delta_{1P} + \Delta_{11} = 0, \tag{13.5}$$

ou

$$-\frac{ql^4}{8EJ} - \frac{X_1 l^3}{3EJ} = 0.$$

De là, on obtient la réaction cherchée

$$X_1 = \frac{3}{8} ql. \tag{13.6}$$

De l'équation de la statique, on trouve aisément les réactions restantes pour tracer ensuite par le procédé ordinaire les diagrammes de Q et de M, comme le montre la fig. 250.

Le tableau 24 donne des formules prêtes pour la détermination des réactions d'appui, de l'effort tranchant Q, du moment fléchissant M et des déplacements pour les cas principaux de chargement des poutres hyperstatiques à une travée; le tableau 25 présente ces formules pour les cas de déplacement des appuis et d'échauffement non uniforme des poutres.

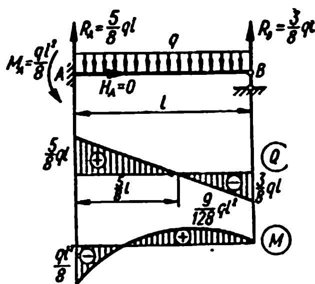


FIG. 250

§ 76. Equations canoniques de la méthode des forces

Les équations complémentaires des déplacements exprimant l'égalité à zéro des déplacements dans le sens respectif des inconnues superflues s'établissent plus aisément dans une forme dite *forme canonique*, c'est-à-dire dans un ordre déterminé. Illustrons cela sur l'exemple de résolution d'un système hyperstatique le plus simple (fig. 251, *a*).

Adoptons en qualité de système isostatique de base une console; en qualité de système équivalent, nous aurons une console sollicitée par la force extérieure P et par l'inconnue superflue X_1 (fig. 251, *b*). L'équation complémentaire des déplacements traduisant l'égalité à zéro des déplacements du point B suite à l'action des forces P et X_1, sera

$$\Delta_1 = \Delta(P, X_1) = 0. \tag{13.7}$$

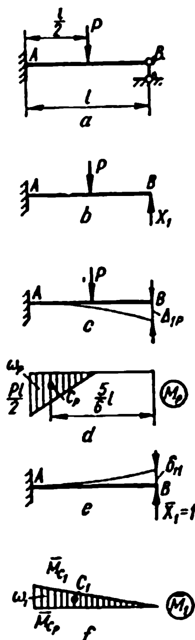


FIG. 251

Nous basant sur le principe de l'indépendance des effets des forces, écrivons

$$\Delta_1 = \Delta_{1P} + \Delta_{11}, \tag{13.8}$$

Δ_{1P} étant le déplacement provoqué par la force donnée P (fig. 251, *c*); Δ_{11} — le déplacement provoqué par la force X_1. Désignons par δ_{11} le déplacement provoqué par $\overline{X}_1 = 1$ dans le sens d'action de cette dernière (fig. 251, *e*); nous aurons

$$\Delta_{11} = \delta_{11} X_1.$$

L'équation des déplacements (13.8) prend la forme suivante

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0. \tag{13.9}$$

C'est là la forme canonique de l'équation des déplacements pour un système hyperstatique d'ordre 1. De la formule (13.9), nous aurons

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}}. \tag{13.10}$$

Pour un système doté de deux liaisons surabondantes (fig. 252) les équations canoniques auront la forme suivante

$$\left.\begin{aligned} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1P} = 0; \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2P} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{13.11}$$

FIG. 252

On peut, par analogie, écrire dans la forme canonique les équations des déplacements pour un système hyperstatique d'ordre n

$$\left.\begin{array}{l}\delta_{11}X_1+\delta_{12}X_2+\delta_{13}X_3+\ldots+\delta_{1n}X_n+\Delta_{1P}=0;\\ \delta_{21}X_1+\delta_{22}X_2+\delta_{23}X_3+\ldots+\delta_{2n}X_n+\Delta_{2P}=0;\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \delta_{n1}X_1+\delta_{n2}X_2+\delta_{n3}X_3+\ldots+\delta_{nn}X_n+\Delta_{nP}=0.\end{array}\right\} \qquad (13.12)$$

Les déplacements Δ_{1P} et δ_{ij} qui rentrent dans les équations canoniques doivent être déterminés par la méthode de Mohr ou par le procédé de Véréchaguine. Quand on a à calculer les poutres ou les portiques pour lesquels le rapport de la hauteur à la longueur ne dépasse d'ordinaire 0, 1, on ne retient, dans la formule générale de Mohr, que les intégrales rendant compte des moments fléchissants. Ce faisant on applique sur le système isostatique de base les charges unitaires $X_1 = 1$, $X_2 = 1, \ldots, X_n = 1$, ainsi que les charges extérieures, puis on construit les diagrammes respectifs des moments comme le montre la fig. 254 pour le cas d'un système à trois degrés d'hyperstaticité (fig. 253). Désignons respectivement par M_P, $\overline{M}_1$, $\overline{M}_2, \ldots, \overline{M}_n$ les ordonnées des diagrammes des moments fléchissants dus à la charge donnée P (état P) et à chaque force unitaire $\overline{X}_1 = 1$ (état *1*), $\overline{X}_2 = 1$ (état *2*), etc. En vertu de (12.29), nous aurons

$$\Delta_{1P}=\int_s\frac{\overline{M}_1M_P\,ds}{EJ};\quad \Delta_{2P}=\int_s\frac{\overline{M}_2M_P\,ds}{EJ};\quad \ldots;\quad \Delta_{nP}=\int_s\frac{\overline{M}_nM_P\,ds}{EJ}. \qquad (13.13)$$

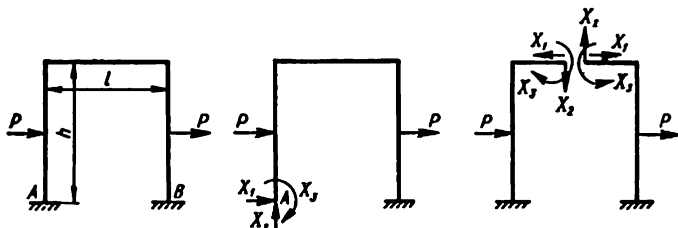


FIG. 253

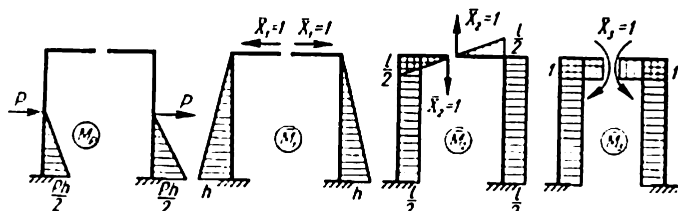


FIG. 254

Les déplacements spécifiques dont les indices coïncident (les coefficients principaux des équations canoniques) se déterminent des formules suivantes

$$\delta_{11}=\int_s \frac{\bar{M}_1\bar{M}_1 ds}{EJ}; \quad \delta_{22}=\int_s \frac{\bar{M}_2\bar{M}_2 ds}{EJ}; \quad \ldots; \quad \delta_{nn}=\int_s \frac{\bar{M}_n\bar{M}_n ds}{EJ}. \quad (13.14)$$

Les déplacements spécifiques dont les indices diffèrent (coefficients accessoires) s'obtiennent des formules

$$\delta_{12}=\int_s \frac{\bar{M}_1\bar{M}_2 ds}{EJ}; \quad \delta_{13}=\int_s \frac{\bar{M}_1\bar{M}_3 ds}{EJ}; \quad \ldots; \quad \delta_{ik}=\int_s \frac{\bar{M}_i\bar{M}_k ds}{EJ}. \quad (13.15)$$

Ces déplacements peuvent être aussi bien positifs que négatifs ou bien nuls.

En vertu du théorème de la réciprocité des déplacements

$$\delta_{ik}=\delta_{ki}.$$

Pour des systèmes constitués d'éléments rectilignes il est plus commode d'effectuer les calculs des déplacements par le procédé de Véréchaguine.

Par exemple, pour le système hyperstatique de la fig. 251, *a*, nous aurons (voir fig. 251, *c*, *d*, *e*, *f*):

$$\Delta_{1P} = \frac{\omega_P \overline{M}_{C_P}}{EJ}; \quad \delta_{11} = \frac{\omega_1 \overline{M}_{C_1}}{EJ};$$

$$\omega_P = \frac{Pl^2}{8}; \quad \overline{M}_{C_P} = \frac{5}{6} l;$$

$$\omega_1 = \frac{l^2}{2}; \quad \overline{M}_{C_1} = \frac{2}{3} l.$$

Par conséquent,

$$\Delta_{1P} = -\frac{5}{48} \cdot \frac{Pl^3}{EJ}; \quad \delta_{11} = \frac{l^3}{3EJ}.$$

De la formule (13.10), nous aurons

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{5}{16} P.$$

S'il faut tenir compte de la différence de température, l'ordre de calcul reste le même, alors les termes libres des équations canoniques représenteront dans le système isostatique de base les déplacements dus non seulement à la charge donnée mais encore à la variation de température:

$$\left.\begin{array}{l} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \ldots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} + \Delta_{1t} = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \ldots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} + \Delta_{nt} = 0, \end{array}\right\} \qquad (13.16)$$

où Δ_{it} est le déplacement provoqué dans le système de base par la différence de température, dans le sens d'action de la force X_i.

Après la détermination des coefficients δ_{ij} et des termes libres Δ_{iP} et Δ_{it} on résout le système d'équations canoniques (13.16) et on trouve les inconnues superflues $X_1, X_2, \ldots, X_n$. On construit, ensuite, par le procédé habituel, les diagrammes des efforts internes (N, Q et M). Il est commode de le faire par la méthode d'addition selon le schéma ci-après

$$\left.\begin{array}{l} M = \overline{M}_1X_1 + \overline{M}_2X_2 + \ldots + M_P; \\ Q = \overline{Q}_1X_1 + \overline{Q}_2X_2 + \ldots + Q_P; \\ N = \overline{N}_1X_1 + \overline{N}_2X_2 + \ldots + N_P. \end{array}\right\} \qquad (13.17)$$

A remarquer que la forme des équations canoniques reste inchangée pour toute variante possible de système isostatique de base; ce n'est que le sens impliqué par les inconnues superflues et l'interprétation géométrique des déplacements qui changent.

Les tableaux 26, 27, 28 donnent les formules prêtes pour la détermination du moment fléchissant dans les sections les plus caractéristiques de certaines formes de portiques hyperstatiques pour les cas les plus simples de leur chargement.

§ 77. Poutres continues à appuis multiples. Equation des trois moments

On appelle *poutres continues* les poutres reposant sur plus de deux appuis (voir, par exemple, la fig. 255, *a*). Le nombre de liaisons surabondantes dans une poutre continue et, partant, de réactions surabondantes, équivaut au nombre d'appuis intermédiaires. Parfois, l'appui extrême est réalisé sous forme d'encastrement. Dans ce cas, le degré d'hyperstaticité de la poutre s'accroît d'une unité.

Quand on choisit le système isostatique de base, on a intérêt à prendre pour liaisons surabondantes non les appuis intermédiaires et les réactions inconnues qui y sont de trop, ce qui conduirait (fig. 255, *b*) à des calculs trop encombrants lors de la détermination des inconnues superflues, mais bien les moments fléchissants supportés par les sections d'appuis. Dans ce cas, le système isostatique de base sera, évidemment, un système de poutres à une travée reliées entre elles, aux appuis, par des articulations. Le système équivalent représentera alors, pour des calculs par la méthode des forces, une suite de poutres simples, à appuis articulés, sollicitées

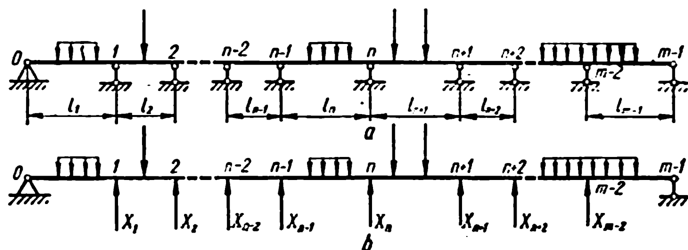


FIG. 255

par une charge donnée et les moments fléchissants inconnus appliqués aux extrémités (fig. 256):

$$M_1 = X_1; \quad M_2 = X_2; \quad \ldots; \quad M_{n+1} = X_{n+1} \ldots$$

L'équation complémentaire des déplacements, pour chaque appui intermédiaire, doit traduire la condition d'égalité à zéro de l'angle de rotation réciproque des sections d'appuis pour des poutres adjacentes. Puisque chacune des deux poutres d'appuis du système principal se déforme indépendamment de l'autre sous l'action des charges extérieures appliquées dans la travée ainsi que des moments appliqués à leurs extrémités, les

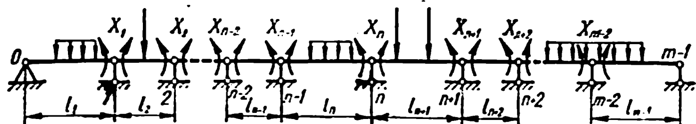


FIG. 256

bouts de deux poutres adjacentes, tenant à un même appui, par exemple, à l'appui n (fig. 257), peuvent tourner d'un certain angle Δ_n^{gauche} et Δ_n^{droite}. Etant donné que chaque couple de telles sections dans la poutre continue hyperstatique de départ constitue, en réalité, une seule section, en vertu de la condition de continuité, leur angle de rotation réciproque doit être nul. De là, on obtient pour chaque appui intermédiaire

$$\Delta_n = \Delta_n^{\text{gauche}} + \Delta_n^{\text{droite}} = 0. \qquad (13.18)$$

Comme le système isostatique de base est constitué de poutres à une travée isolée, quand on applique concrètement la condition (13.18) il suffit de considérer uniquement deux travées l_n et l_{n+1} tenant à l'appui n. Alors, la condition (13.18) exprimée dans la forme canonique s'écrira

$$\delta_{n,n-1}X_{n-1}+\delta_{nn}X_n+\delta_{n,n+1}X_{n+1}+\Delta_{nP}=0. \quad (13.19)$$

En accord avec les constructions de la fig. 258, *a*, *b*, *c*, *d* on aura

$$\Delta_{nP} = \frac{1}{EJ_n}\cdot\omega_n\cdot\frac{a_n}{l_n}+\frac{1}{EJ_{n+1}}\cdot\omega_{n+1}\cdot\frac{b_{n+1}}{l_{n+1}}; \quad (13.20)$$

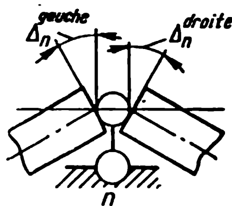


FIG. 257

$$\delta_{n,\,n-1} = \frac{1}{EJ_n}\cdot\frac{l_n}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{3} = \frac{l_n}{6EJ_n}; \qquad (13.21)$$

$$\delta_{nn}=\frac{1}{EJ_n}\cdot\frac{l_n}{2}\cdot1\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{EJ_{n+1}}\cdot\frac{l_{n+1}}{2}\cdot1\cdot\frac{2}{3}=\frac{l_n}{3EJ_n}+\frac{l_{n+1}}{3EJ_{n+1}}; \quad (13.22)$$

$$\delta_{n,\,n+1} = \frac{1}{EJ_{n+1}}\cdot\frac{l_{n+1}}{2}\cdot1\cdot\frac{1}{3} = \frac{l_{n+1}}{6EJ_{n+1}}. \qquad (13.23)$$

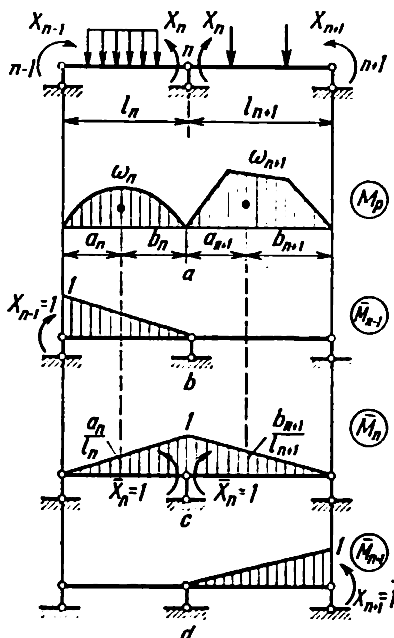


FIG. 258

Introduisant (13.20)-(13.23) dans (13.19), nous obtiendrons

$$X_{n-1}\frac{l_n}{J_n}+2X_n\left(\frac{l_n}{J_n}+\frac{l_{n+1}}{J_{n+1}}\right)+X_{n+1}\frac{l_{n+1}}{J_{n+1}}=$$

$$=-6\left(\frac{\omega_n a_n}{J_n l_n}-\frac{\omega_{n+1}b_{n+1}}{J_{n+1}l_{n+1}}\right). \qquad (13.24)$$

Remplaçant la désignation des inconnues superflues X_i et M_i nous obtiendrons *l'équation des trois moments*

$$M_{n-1}\frac{l_n}{J_n}+2M_n\left(\frac{l_n}{J_n}+\frac{l_{n+1}}{J_{n+1}}\right)+M_{n+1}\frac{l_{n+1}}{J_{n+1}}=$$

$$=-6\left(\frac{\omega_n a_n}{J_n l_n}+\frac{\omega_{n+1}b_{n+1}}{J_{n+1}l_{n+1}}\right). \qquad (13.25)$$

Quand on calcule des poutres continues, on établit autant d'équations des trois moments qu'il y a d'appuis intermédiaires. De la résolution du système d'équations ainsi obtenu, on détermine les moments surabondants inconnus M_i agissant sur les appuis. Connaissant les moments supportés par les extrémités dans le système équivalent, tous les calculs ultérieurs s'effectuent comme d'ordinaire pour un système isostatique quelconque.

Pour les poutres de section constante (J = const), l'équation des trois moments se simplifie:

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} =$$

$$= -6\left(\frac{\omega_n a_n}{l_n} + \frac{\omega_{n+1}b_{n+1}}{l_{n+1}}\right). \tag{13.26}$$

Les équations des trois moments pour le second et l'avant-dernier appui d'une poutre continue ne contiendront, évidemment, que deux moments.

Les équations des trois moments s'emploient également pour le calcul d'une poutre continue dont une extrémité se trouve complètement encastrée. Dans ce cas, on établit l'équation des trois moments également pour l'extrémité encastrée en y plaçant une sorte d'appui intermédiaire alors que du côté de l'encastrement on introduit une travée fictive. Si c'est l'extrémité gauche de la poutre qui est encastrée, on doit annuler dans l'équation des trois moments M_{n-1}, l_n, tandis que le terme $6\frac{\omega_n a_n}{l_n}$ n'y figurera pas. Si tous les appuis d'une poutre continue ne se trouvent pas à un même niveau et certains d'entre eux sont décalés, des contraintes initiales importantes peuvent apparaître dans la poutre. Ces contraintes dépendent de la différence de niveau des appuis, de la rigidité de la poutre et croissent proportionnellement à ces grandeurs.

L'influence du déplacement des appuis sur l'état de contrainte d'une poutre continue peut s'évaluer de la manière suivante. Soit le déplacement des appuis montré sur la fig. 259. Les angles de rotation de la travée gauche et droite par rapport à l'appui n seront

$$\theta_n = \frac{y_1 - y_{n-1}}{l_n}; \quad \theta_{n+1} = \frac{y_{n+1} - y_n}{l_{n+1}}.$$

L'angle de rotation sera pris pour positif si la section tourne dans le sens des aiguilles d'une montre. Il est évident que l'angle de rotation réciproque des sections frontales sur l'appui n sera

$$\Delta_n = \theta_{n+1} - \theta_n. \tag{13.27}$$

Maintenant, l'équation canonique de calcul de déplacement des appuis dans laquelle Δ_n joue le rôle de Δ_{nP} prendra la forme suivante

$$\delta_{n,\,n-1}X_{n-1} + \delta_{nn}X_n + \delta_{n,\,n+1}X_{n+1} + \Delta_n = 0. \qquad (13.28)$$

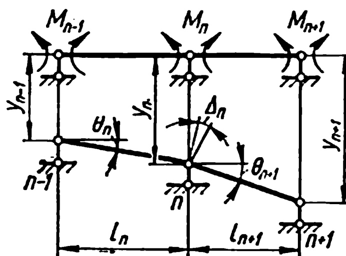


FIG. 259

Pour le cas d'une poutre de rigidité constante on peut, en tenant compte de (13.21)-(13.23) et de (13.27), écrire l'équation des trois moments (13.28) dans la forme définitive suivante

$$M_{n-1}l_n + 2M_n(l_n + l_{n+1}) + M_{n+1}l_{n+1} = -\,6EJ(\theta_{n+1} - \theta_n). \qquad (13.29)$$

Si, en plus des déplacements des appuis, agissent des forces extérieures, dans le second membre de l'équation (13.29) on doit conserver les termes contenus dans le second membre de l'équation (13.26).

§ 78. Calcul des tiges curvilignes hyperstatiques

Quand on calcule les systèmes élastiques hyperstatiques contenant des tiges curvilignes, il est recommandé, tout comme pour le calcul de n'importe quels systèmes hyperstatiques, de se servir des équations canoniques de la méthode des forces. Cependant, dans ce cas, il convient de calculer les déplacements qui figurent dans les équations canoniques non pas par le procédé de Véréchaguine, mais par la méthode de Mohr.

A titre d'exemple, examinons un anneau circulaire de section transversale constante soumis à la traction par deux forces égales P, dirigées dans des sens opposés (fig. 260, *a*). Ce système, tout comme n'importe quel contour fermé, est hyperstatique à trois degrés. Choisissons le système isostatique fondamental en sectionnant l'anneau d'après la coupe A_2 (fig. 260, *b*). De la condition de symétrie, on tire que l'effort tranchant dans cette section est $X_2 = 0$. Sectionnant l'anneau d'après le diamètre A_1-A_2 (fig. 260, *c*), des conditions d'équilibre de la partie sectionnée

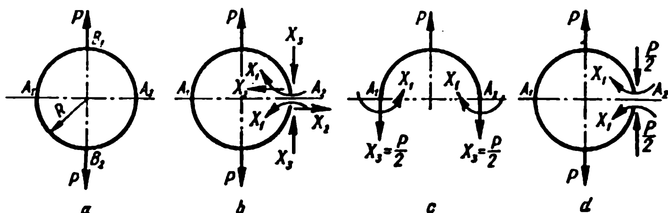


FIG. 260

on trouve la valeur de la force normale $X_3 = P/2$. Le moment fléchissant inconnu X_1 sera trouvé en considérant le système équivalent (fig. 260, *d*).

L'équation canonique des déplacements qui traduit la condition de nullité de l'angle de rotation réciproque des forces dans la section A_2 sera:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0, \tag{13.30}$$

avec

$$\Delta_{1P} = \int_s \frac{\overline{M}_1 M_P \, ds}{EJ}; \tag{13.31}$$

$$\delta_{11} = \int_s \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_1 \, ds}{EJ}. \tag{13.32}$$

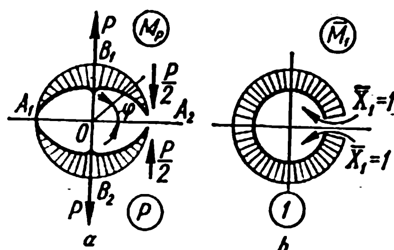


FIG. 261

Dans ce cas, M_P et $\overline{M}_1$ conformément à la fig. 261, *a*, *b* peuvent être exprimés par les formules

$$M_P = -\frac{PR}{2}(1 - \cos\varphi)\left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right);$$

$$\overline{M}_1 = -1.$$

Introduisant les expressions pour M_P et $\bar{M}_1$ dans (13.31) et (13.32) nous aurons:

$$\Delta_{1P} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{PR^2(1 - \cos\varphi)\,d\varphi}{2EJ} = \frac{2PR^2}{EJ}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right);$$

$$\delta_{11} = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{Rd\varphi}{EJ} = \frac{2\pi R}{EJ}.$$

Nous pouvons maintenant récrire l'équation (13.30) comme suit

$$\frac{2\pi R}{EJ} X_1 + \frac{2PR^2}{EJ}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) = 0,$$

d'où

$$X_1 = -\frac{2PR^2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)}{2\pi R} = -\,0{,}182\,PR. \qquad (13.33)$$

Par conséquent, le moment fléchissant dans la section A est

$$M_A = 0{,}182\,PR$$

et est dirigé dans le sens opposé à celui qu'on a adopté auparavant.

Le moment fléchissant dans une section quelconque peut s'exprimer par la formule

$$M(\varphi) = -\frac{PR}{2}(1 - \cos\varphi) + M_A;$$

le moment maximal est

$$M_{max} = M_B = -\,0{,}318\,PR.$$

L'effort tranchant dans une section quelconque s'exprime par la formule $Q(\varphi) = 0{,}5\,P\sin\varphi$; la force axiale $N(\varphi) = 0{,}5\,P\cos\varphi$. La fig. 262 montre les diagrammes de M, Q et N.

On trouvera dans le tableau 29 les formules prêtes pour la détermination des efforts et des déplacements pour différents cas de chargement de l'anneau.

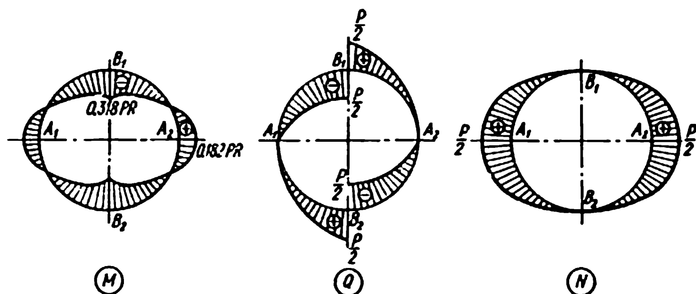


FIG. 262

§ 79. Détermination des déplacements dans des systèmes hyperstatiques

Après la détermination des inconnues superflues et le tracé des diagrammes, les déplacements dans les systèmes hyperstatiques s'obtiennent par des procédés habituels. Ce faisant, il convient pour chaque cas concret de se servir de la méthode qui conduit le plus aisément possible au résultat voulu. Par exemple, il est recommandé de déterminer les flèches et les angles de rotation des sections des poutres hyperstatiques supportant une charge complexe d'après la méthode des paramètres initiaux. La méthode de Mohr qui est universelle s'emploie d'ordinaire pour la détermination des déplacements dans les poutres, portiques et fermes.

Quand on se sert de la formule de Mohr

$$\Delta_{iP} = \sum \int_s \frac{\overline{M}_i M_P \, ds}{EJ} + \sum \int_s \frac{\overline{N}_i N_P \, ds}{EF} + \sum \int_s k \frac{\overline{Q}_i Q_P \, ds}{GF}, \quad (13.34)$$

ce sont les diagrammes définitifs de M, N, Q dus à des facteurs de force du système hyperstatique ainsi que les diagrammes de $\overline{M}_i, \overline{N}_i, \overline{Q}_i$ dus au facteur de force unitaire correspondant au déplacement cherché qu'il faut prendre. Ce faisant, on a intérêt pour l'établissement des diagrammes de $\overline{M}_i, \overline{N}_i$ et $\overline{Q}_i$ à appliquer une charge unitaire au système isostatique fondamental.

En guise d'exemple, calculons les déplacements réciproques des points A_1-A_2 et B_1-B_2 respectivement dans les directions horizontale et verticale pour un système hyperstatique qui se présente sous forme de portique à un contour supportant l'action des forces P appliquées d'après le schéma que montre la fig. 263, *a*. Pour commencer, déterminons les

inconnues superflues de ce système hyperstatique d'ordre 3. Choisissons le système isostatique fondamental en sectionnant un des montants d'après l'axe de symétrie (fig. 263, *b*). Compte tenu du caractère symétrique de

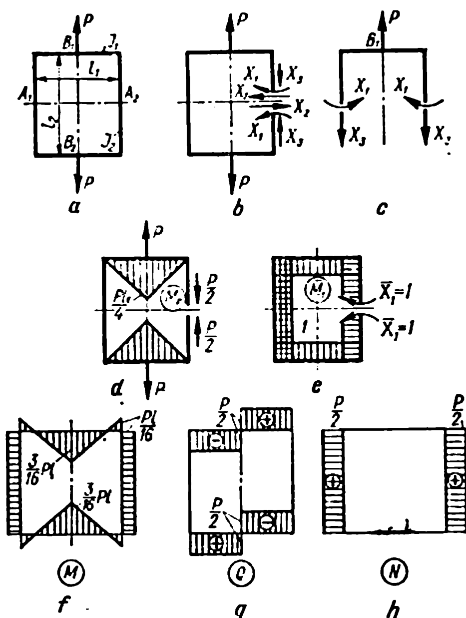


FIG. 263

la charge, en l'endroit de sectionnement l'effort tranchant $X_2 = 0$. L'analyse des conditions d'équilibre d'une moitié du portique donne (fig. 263, *c*)

$$2X_3 = P; \quad X_3 = \frac{P}{2}.$$

Le moment inconnu surabondant X_1 se détermine de l'équation canonique suivante:

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0. \tag{13.35}$$

Ici, Δ_{1P} est le déplacement dans le sens d'action de l'effort X_1 suite à P et $X_3 = P/2$.

Pour la détermination des déplacements Δ_{1P} et δ_{11}, construisons les diagrammes correspondants (fig. 263, *d*, *e*) et nous servant du procédé

de Véréchaguine trouvons

$$\Delta_{1P} = \sum \int_s \frac{\bar{M}_1 M_P\, ds}{EJ} = \frac{2}{EJ_1} \cdot \frac{Pl_1^2}{8} = \frac{Pl_1^2}{4EJ_1}\,; \qquad (13.36)$$

$$\delta_{11} = \sum \int_s \frac{\bar{M}_1 \bar{M}_1\, ds}{EJ} = \frac{2l_1}{EJ_1} + \frac{2l_2}{EJ_2}\,. \qquad (13.37)$$

Introduisant (13.36) et (13.37) dans (13.35), nous aurons:

$$\frac{2}{E}\left(\frac{l_1}{J_1} + \frac{l_2}{J_2}\right) X_1 + \frac{Pl_1^2}{4EJ_1} = 0;$$

$$X_1 = -\frac{Pl_1^2}{4J_1}\left[2\left(\frac{l_1}{J_1} + \frac{l_2}{J_2}\right)\right]^{-1}$$

Pour $l_1 = l_2 = l$ et $J_1 = J_2 = J$

$$X_1 = -\frac{Pl}{16}\,.$$

La fig. 263, *f*, *g*, *h* montre les diagrammes de M, Q et N pour le portique en question.

Pour déterminer le déplacement réciproque des points A_1-A_2 dans la direction horizontale, appliquons à ces points dans le système isostatique fondamental des forces unitaires (fig. 264, *b*) $\bar{X}_i = 1$. Multipliant le diagramme de M_P, qu'il est plus commode de représenter sous la forme de la fig. 264, *a*, par le diagramme de $\bar{M}_i$ nous aurons (pour $l_1 = l_2 = l$ et $J_1 = J_2 = J$)

$$\Delta_{A_1\text{-}A_2} = \Delta_i = \sum \int_s \frac{\bar{M}_i M_P\, ds}{EJ} = \frac{1}{EJ}\left(-\frac{Pl^2}{16} \cdot \frac{l}{2} + \frac{Pl^2}{8} \cdot \frac{l}{2} - 2\,\frac{Pl^2}{32} \cdot \frac{l}{4}\right) = \frac{Pl^3}{64EJ}\,.$$

Pour déterminer le déplacement réciproque vertical des points B_1 - B_2, appliquons à ces points dans le système fondamental des forces unitaires $\bar{X}_k = 1$ (fig. 264, *c*). Multipliant les diagrammes de M_P et de $\bar{M}_k$, nous trouverons

$$\Delta_{B_1\text{-}B_2} = \Delta_k = \sum \int_s \frac{\bar{M}_k M_P\, ds}{EJ} = \frac{1}{EJ}\left(\frac{Pl^2}{16} \cdot \frac{l}{2} - \frac{Pl^2}{16} \cdot \frac{l}{6} \cdot 2 + \frac{l^2}{8} \cdot \frac{Pl}{16} \cdot 2\right) = \frac{5}{192} \cdot \frac{Pl^3}{EJ}\,.$$

Pour le cas où un système hyperstatique supporte l'action de la température, il convient d'ajouter aux déplacements du système isostatique fondamental sollicité par les inconnues superflues obtenues les déplace-

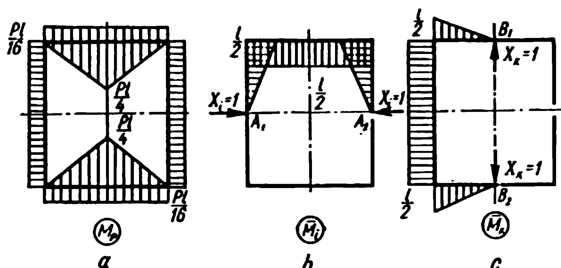


FIG. 264

ments thermiques. La formule (13.34), compte tenu de (12.36), prendra alors la forme suivante

$$\Delta_{lP} = \sum \int_s \frac{\bar{M}_l M_t \, ds}{EJ} + \sum \int_s \frac{\bar{N}_l N_t \, ds}{EF} + \sum \int_s k \frac{\bar{Q}_l Q_t \, ds}{GF} +$$

$$+ \sum \int_s \bar{N}_l \alpha \frac{(t_1 + t_s)}{2} ds + \sum \int_s \bar{M}_l \alpha \frac{(t_1 - t_s)}{h} ds, \qquad (13.38)$$

M_t, N_t et Q_t étant les diagrammes des inconnues superflues dues à la variation de la température.

On trouvera dans les tableaux 24, 25, 29 les expressions pour les déplacements dans des poutres hyperstatiques à une travée ainsi que dans un anneau pour différents cas de leur chargement.

§ 80. Calcul des systèmes en portiques tridimensionnels

Comme on sait, dans le cas le plus général la section d'une barre subit l'action de six facteurs de force internes: N_z, Q_x, Q_y, M_x, M_y et M_z.

Pour un système encastré, il faut imposer à la section six liaisons; les efforts agissant dans ces dernières peuvent se déterminer des six équations d'équilibre d'un corps solide.

Dans un système tridimensionnel, la quantité de liaisons dépassant ce nombre occasionne le degré de l'hyperstaticité. C'est ainsi que le portique

tridimensionnel que montre la fig. 265, *a* est un système hyperstatique d'ordre 6 puisque les équations d'équilibre ne permettent de déterminer que les réactions d'un seul appui rigide. La fig. 265, *b* montre une des variantes du système isostatique fondamental pour le portique indiqué plus haut. Pour déterminer les six efforts inconnus, il faut résoudre six équations canoniques de forme habituelle.

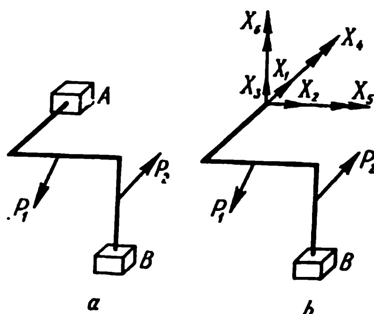


FIG. 265

Le portique tridimensionnel que montre la fig. 266, *a* est un système hyperstatique d'ordre 24. Le système fondamental (fig. 266, *b*) contient quatre sections dans chacune desquelles nous aurons six efforts inconnus.

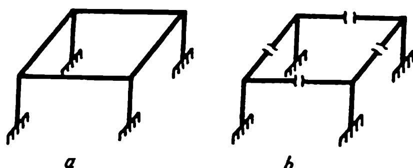


FIG. 266

Parmi les différentes structures, on rencontre des portiques plans soumis à l'action des charges tridimensionnelles. Dans les portiques plans sollicités perpendiculairement à leur plan (fig. 267, *a*) les facteurs de force carac-

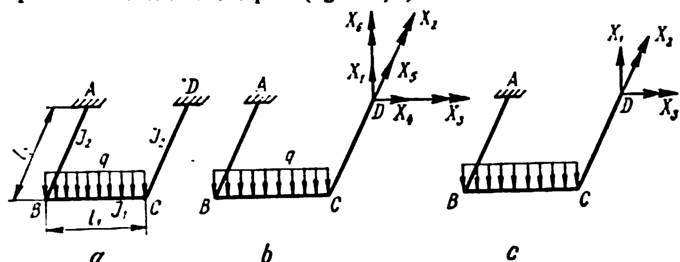


FIG. 267

térisant le travail du portique dans son propre plan sont nuls. Par conséquent, des six inconnues (fig. 267, *b*), trois s'annulent, c'est-à-dire $X_1 = X_5 = X_6 = 0$ (fig. 267, *c*). Cette considération simplifie le calcul des portiques plans.

Quand on calcule les portiques plans, on subdivise les charges tridimensionnelles en composantes agissant dans le plan même du portique et perpendiculairement à ce plan, puis, en se servant du principe de l'indépendance des effets des forces, on calcule le système pour chacune des charges agissant dans les différents plans.

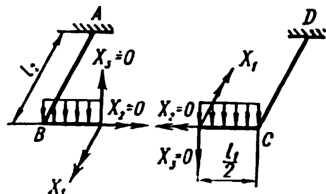


FIG. 268

En guise d'exemple, donnons le calcul du portique que montre la fig. 267, *a* par la méthode des forces. En partant des considérations de symétrie, choisissons le système fondamental sous la forme de la fig. 268. Cette variante est beaucoup plus commode que celle de la fig. 267, *c* puisque le couple de torsion X_2 et l'effort tranchant X_3, c'est-à-dire les facteurs de force à symétrie gauche, s'avèrent égaux à zéro. Le moment fléchissant inconnu X_1 se détermine aisément de l'équation canonique

$$\delta_{11}X_1 + \Delta_{1P} = 0. \qquad (13.39)$$

Pour déterminer les déplacements Δ_{1P} et δ_{11} construisons les diagrammes des moments fléchissants et des couples de torsion pour l'état P (fig. 269, *a*) et pour l'état unitaire $\bar{X}_1 = 1$ (fig. 269, *b*). Les diagrammes des couples de torsion sont montrés en pointillé.

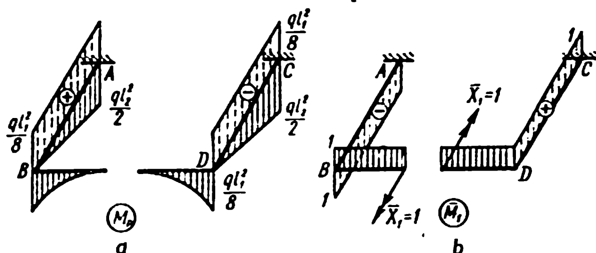


FIG. 269

Négligeant l'influence des forces axiales et transversales, écrivons les formules de Mohr pour la détermination des déplacements sous la forme suivante

$$\Delta_{1P} = \sum \int_s \frac{\bar{M}_{x1} M_{xP} ds}{EJ_x} + \sum \int_s \frac{\bar{M}_{y1} M_{yP} ds}{EJ_y} + \sum \int_s \frac{\bar{M}_{z1} \bar{M}_{zP} ds}{GJ_t}; \qquad (13.40)$$

$$\delta_{11} = \sum \int_s \frac{\bar{M}_{x1} \bar{M}_{x1} ds}{EJ_x} + \sum \int_s \frac{\bar{M}_{y1} \bar{M}_{y1} ds}{EJ_y} + \sum \int_s \frac{\bar{M}_{z1} \bar{M}_{z1} ds}{GJ_t}. \qquad (13.41)$$

Tenant compte du fait que les diagrammes unitaires sont délimités par des lignes droites, nous pouvons déterminer les déplacements Δ_{1P} et δ_{11} par le procédé de Véréchaguine

$$\Delta_{1P} = -\frac{1}{EJ_1}\cdot\frac{ql_1^2}{8}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{l_1}{2}\cdot 1\cdot 2 - \frac{1}{GJ_t}\cdot\frac{ql_1^2}{8}\cdot l_2\cdot 1\cdot 2 =$$

$$= -\frac{ql_1^3}{24EJ_1}\left(1 + 6\frac{EJ_1}{GJ_t}\cdot\frac{l_2}{l_1}\right);$$

$$\delta_{11} = \frac{l_1}{EJ_1} + \frac{2l_2}{GJ_t} = \frac{l_1}{EJ_1}\left(1 + 2\frac{EJ_1}{GJ_t}\cdot\frac{l_2}{l_1}\right).$$

En vertu de (13.39) trouvons

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{ql_1^2}{24}\cdot\frac{1 + 6\frac{EJ_1}{GJ_t}\cdot\frac{l_2}{l_1}}{1 + 2\frac{EJ_1}{GJ_t}\cdot\frac{l_2}{l_1}} = \beta\frac{ql_1^2}{24},$$

avec

$$\beta = \frac{1 + 6\frac{EJ_1}{GJ_t}\cdot\frac{l_2}{l_1}}{1 + 2\frac{EJ_1}{GJ_t}\cdot\frac{l_2}{l_1}}.$$

La fig. 270 montre les diagrammes définitifs de M, M_t et Q.

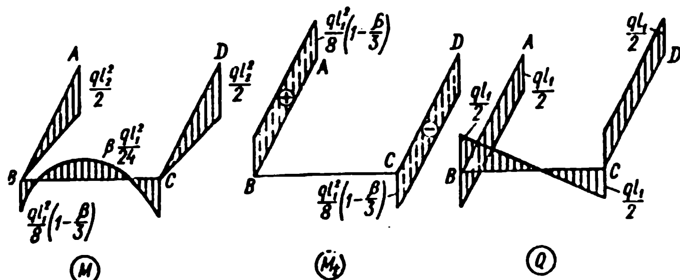
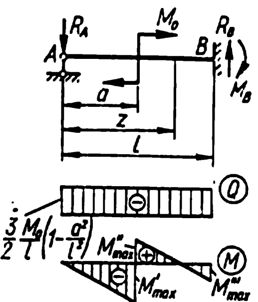


FIG. 270

Tableau 24

Réactions d'appuis, efforts tranchants, moments fléchissants et déplacements dans les poutres hyperstatiques à une travée

Schéma de chargement de la poutre. Diagrammes des Q et des M	Réactions d'appuis, effort tranchant Q, moment fléchissant M, coordonnée de la section dangereuse z_0, moment maximal M_{max}	Equations de la déformée $w(z)$, angle de rotation θ de la section extrême, flèche maximale f (EJ étant constant)
	$R_A = R_B = \frac{3}{2}\frac{M_0}{l}$; $M_B = \frac{1}{2} M_0$ $0 < z <$ $Q = -\frac{3}{2}\frac{M_0}{l}$; $M = M_0\left(1 - \frac{3}{2}\frac{z}{l}\right)$ $z_0 = 0$ $M_{max} = M_0$	$w(z) = -\frac{M_0 l^2}{4EJ}\left(\frac{z^3}{l^3} - 2\frac{z^2}{l^2} + \frac{z}{l}\right)$ $= -\frac{M_0 l^2}{27EJ}$ pour $z = \frac{1}{3} l$ $\theta = -\frac{M_0 l}{4EJ}$ pour $z = 0$



$$R_A = R_B = \frac{3}{2}\frac{M_0}{l}\left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right);$$

$$M_B = \frac{M_0}{2}\left(1 - 3\frac{a^2}{l^2}\right)$$

$$0 \leqslant z \leqslant l \quad Q = -\frac{3}{2}\cdot\frac{M_0}{l}\left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right)$$

$$0 \leqslant z \leqslant a \quad M = -\frac{3}{2}\cdot\frac{M_0}{l}\left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right)z$$

$$a \leqslant z \leqslant l \quad M = M_0\left[1 - \frac{3}{2}\left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right)\frac{z}{l}\right]$$

$$z_0' = a \quad M'_{max} = -\frac{3}{2}M_0\frac{a}{l}\left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right)$$

$$M''_{max} = M_0\left[1 - \frac{3}{2}\cdot\frac{a}{l}\left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right)\right]$$

$$z_0'' = l \quad M'''_{max} = -\frac{1}{2}M_0\left(1 - 3\frac{a^2}{l^2}\right)$$

pour $a < 0{,}275l \quad |M'_{max}| < |M'''_{max}|$

pour $a = 0.577\,l \quad M'''_{max} = 0$

$$0 \leqslant z \leqslant a$$

$$w(z) = -\frac{M_0 l^2}{EJ}\left[\frac{1}{4}\left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right)\left(\frac{z^3}{l^3} - 3\frac{z}{l}\right) + \left(1 - \frac{a}{l}\right)\frac{z}{l}\right]$$

$$a \leqslant z \leqslant l$$

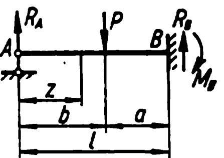
$$w(z) = -\frac{M_0 l^2}{EJ}\left[\frac{1}{4}\left(1 - \frac{a^2}{l^2}\right)\left(\frac{z^3}{l^3} - 3\frac{z}{l}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{z^2}{l^2} + \frac{a^2}{l^2}\right) + \frac{z}{l}\right]$$

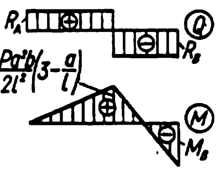
$$0 = \frac{M_0 l}{EJ}\left(\frac{a}{l} - \frac{1}{4} - \frac{3}{2}\cdot\frac{a^2}{l^2}\right)$$

pour $z = 0$

Suite

Schéma de chargement de la poutre. Diagrammes des Q et des M	Réactions d'appuis, effort tranchant Q, moment fléchissant M, coordonnée de la section dangereuse z_0, moment maximal M_{max}	Equations de la déformée $w(z)$, angle de rotation θ de la section extrême, flèche maximale f (EJ étant constant)
R_A, P, R_B, A, B, M_B, $l/2$, z, l; $\frac{5}{16}P$, $\frac{11}{16}P$ (Q); $\frac{5}{32}Pl$, $\frac{3}{16}Pl$ (M)	$R_A = \frac{5}{16}P$; $R_B = \frac{11}{16}P$; $M_B = \frac{3}{16}Pl$ $0 \leq z \leq l/2$ $Q = \frac{5}{16}P$; $M = \frac{5}{16}Pz$ $l/2 \leq z \leq l$ $Q = -\frac{11}{16}P$; $M = P\left(\frac{l}{2} - \frac{11}{16}z\right)$ $z_0 = l$ $M_{max} = -\frac{3}{16}Pl$	$0 \leq z \leq \frac{l}{2}$ $w(z) = -\frac{Pl^3}{96EJ}\left(3\frac{z}{l} - 5\frac{z^3}{l^3}\right)$ $\frac{l}{2} \leq z \leq l$ $w(z) = -\frac{Pl^3}{96EJ}\left[3\frac{z}{l} - 5\frac{z^3}{l^3} + 16\frac{\left(z - \frac{l}{2}\right)^3}{l^3}\right] =$ $= -\frac{Pl^3}{96EJ}\left(15\frac{z}{l} - 24\frac{z^2}{l^2} + 11\frac{z^3}{l^3} - 2\right)$ $f = -0{,}0093\frac{Pl^3}{EJ}$ pour $z = 0{,}447\,l$ $\theta = -\frac{Pl^2}{32EJ}$ pour $z = 0$ $w = -\frac{7Pl^3}{768EJ}$ pour $z = \frac{l}{2}$





$$R_A = \frac{P}{2} \cdot \frac{a^2}{l^2}\left(3 - \frac{a}{l}\right);$$

$$R_B = \frac{P}{2} \cdot \frac{b}{l}\left(3 - \frac{b^2}{l^2}\right);$$

$$M_B = \frac{Pab}{2l^2}(l + b)$$

$$0 < z < b$$

$$Q = \frac{P}{2} \cdot \frac{a^2}{l^2}\left(3 - \frac{a}{l}\right); \quad M = \frac{P}{2} \cdot \frac{a^2}{l^2}\left(3 - \frac{a}{l}\right) z$$

$$b < z < l$$

$$Q = P\left[\frac{1}{2} \cdot \frac{a^2}{l^2}\left(3 - \frac{a}{l}\right) - 1\right];$$

$$M = Pa\left[\frac{az}{2l^2}\left(3 - \frac{a}{l}\right) - \frac{z - b}{a}\right]$$

$$z_0' = b \quad M'_{max} = \frac{Pa^2b}{2l^2}\left(3 - \frac{a}{l}\right)$$

pour $a = 0{,}634\ l$ la valeur maximale est

$$M'_{max} = 0{,}174\ Pl$$

$$z_0'' = l \quad M''_{max} = -\frac{Pab}{2l^2}(l + b)$$

pour $a = 0{,}423\ l$ la valeur maximale est

$$M''_{max} = -0{,}193\ Pl$$

$$0 < z < b$$

$$w(z) = -\frac{Pl^3}{6EJ}\left[\frac{R_A}{P}\left(3\frac{z}{l} - \frac{z^3}{l^3}\right) - 3\frac{a^2z}{l^3}\right]$$

$$w = -\frac{Pa^2b^2(3a + 4b)}{12l^3EJ} \text{ pour } z = b$$

$$b < z < l$$

$$w(z) = -\frac{Pl^3}{6EJ}\left[\frac{R_A}{P}\left(3\frac{z}{l} - \frac{z^3}{l^3}\right) - 3\frac{a^2z}{l^3} + \left(\frac{z}{l} - \frac{b}{l}\right)^3\right]$$

pour $a = 0{,}586\ l$ c'est la flèche maximale

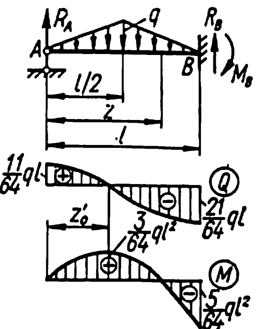
pour $z = b$

$$f = -0{,}0098\frac{Pl^3}{EJ}$$

$$0 = \frac{Pl^3}{4EJ}\left(\frac{a^3}{l^3} - \frac{a^2}{l^2}\right)$$

pour $z = 0$

Schéma de chargement de la poutre. Diagrammes des Q et des M	Réactions d'appuis, effort tranchant Q, moment fléchissant M, coordonnée de la section dangereuse z_0, moment maximal M_{max}	Equations de la déformée $w(z)$, angle de rotation θ de la section extrême, flèche maximale f (EJ étant constant)
R_A, q, R_B, A, M_B, z, l; $\frac{3}{8}ql$, z_0', Q, $\frac{5}{8}ql$, M, $\frac{9}{128}ql^2$, $\frac{1}{8}ql^2$	$R_A = \frac{3}{8}ql$; $R_B = \frac{5}{8}ql$; $M_B = -\frac{1}{8}ql^2$ $0 < z < l$ $Q = ql\left(\frac{3}{8} - \frac{z}{l}\right)$; $M = qlz\left(\frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cdot\frac{z}{l}\right)$ $z_0 = l$ $M_{max} = -\frac{1}{8}ql^2$ $z_0' = \frac{3}{8}l$ $M'_{max} = \frac{9}{128}ql^2$	$0 < z < l$ $w(z) = -\frac{ql^4}{48EJ}\left(2\frac{z^4}{l^4} - 3\frac{z^3}{l^3} + \frac{z}{l}\right)$ $f = -\frac{ql^4}{185EJ}$ pour $z = 0{,}421\,l$ $\theta = \frac{ql^3}{48EJ}$ pour $z = 0$

 	$R_A = \frac{11}{64}ql$; $R_B = \frac{21}{64}ql$; $M_B = \frac{5}{64}ql^2$ $0 \leqslant z \leqslant l/2$ $Q = ql\left(\frac{11}{64} - \frac{z^2}{l^2}\right)$; $M = qlz\left(\frac{11}{64} - \frac{1}{3}\cdot\frac{z^2}{l^2}\right)$ $l/2 \leqslant z \leqslant l$ $Q = ql\left[\left(\frac{z}{l} - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{z}{l} - \frac{1}{2}\right) - \frac{5}{64}\right]$ $M = ql^2\left[\frac{11}{64}\cdot\frac{z}{l} - \frac{1}{4}\left(\frac{z}{l} - \frac{1}{3}\right) -\right.$ $\left. - \frac{1}{2}\left(\frac{z}{l} - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{z}{l} - \frac{1}{2}\right)^3\right]$ $z_0 = l \quad M_{\max} = -\frac{5}{64}ql^2$ $z_0' = 0{,}415l \quad M_{\max}' \approx \frac{3}{64}ql^2$	$f = -\frac{ql^4}{289{,}8\,EJ}$ pour $z = 0{,}5\,l$

Suite

Schéma de chargement de la poutre. Diagrammes des Q et des M	Réactions d'appuis, effort tranchant Q, moment fléchissant M, coordonnée de la section dangereuse z_0, moment maximal M_{max}	Equations de la déformée $w(z)$, angle de rotation θ de la section extrême, flèche maximale f (EJ étant constant)
R_A, q, R_B, A, B, M_B, z, l; $\frac{1}{10}ql$, $\frac{2}{5}ql$, z_0', $\frac{ql^2}{15\sqrt{5}}$, $\frac{ql^2}{15}$	$R_A = \frac{1}{10}ql$; $R_B = \frac{2}{5}ql$; $M_B = \frac{1}{15}ql^2$ $0 \leq z \leq l$ $Q = \frac{ql^2}{10}\left(1 - 5\frac{z^2}{l^2}\right)$; $M = \frac{qlz}{2}\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{3}\cdot\frac{z^2}{l^2}\right)$ $z_0 = l$ $M_{max} = -\frac{ql^2}{15}$ $z_0' = 0,447\,l$ $M'_{max} = \frac{ql^2}{15\sqrt{5}}$	$f = -\frac{ql^4}{419\,EJ}$ pour $z = 0,447\,l$ $w = -\frac{ql^4}{426,6\,EJ}$ pour $z = \frac{l}{2}$

	$R_A = \frac{11}{40} ql;\quad R_B = \frac{9}{40} ql;\quad M_B = \frac{7}{120} ql^2$ $0 \leq z \leq l$ $Q = ql\left(\frac{11}{40} - \frac{z}{l} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z^2}{l^2}\right);$ $M = \frac{qlz}{2}\left(\frac{11}{20} - \frac{z}{l} + \frac{1}{3} \cdot \frac{z^2}{l^2}\right)$ $z_0 = l \quad M_{max} = -\frac{7}{120} ql^2$ $z_0' = 0{,}329\, l \quad M'_{max} = \frac{ql^2}{23{,}6}$	$f = -\frac{ql^4}{327{,}8\, EJ}$ pour $z = 0{,}402\, l$ $w = -\frac{ql^4}{349\, EJ}$ pour $z = \frac{l}{2}$
Charge quelconque	$R_A = \overset{*}{R}_A + \frac{M_B}{l};\quad R_B = \overset{*}{R}_B - \frac{M_B}{l};$ $M_B = 3\frac{\overset{*}{\theta}_B}{l} EJ$	$w = \overset{*}{w}\left(\frac{l}{2}\right) + \frac{M_B l^2}{16EJ}$ pour $z = \frac{l}{2}$ Les paramètres accompagnés du symbole * correspondent à une poutre isostatique à deux appuis (voir le dessin)

Suite

Schéma de chargement de la poutre. Diagrammes des Q et des M	Réactions d'appuis, effort tranchant Q, moment fléchissant M, coordonnée de la section dangereuse z_0, moment maximal M_{max}	Equations de la déformée $w(z)$, angle de rotation θ de la section extrême, flèche maximale f (EJ étant constant)
M_A, A, R_A, M_0, B, R_B, M_B, a, b, l; $6M_0\frac{ab}{l^3}$, ⊖, Ⓠ; M_A, M'''_{max}, ⊕, ⊖, M''_{max}, Ⓜ, M_B	$R_A = 6M_0\frac{ab}{l^3}$; $R_B = 6M_0\frac{ab}{l^3}$; $M_A = M_0\frac{b}{l^2}(2a-b)$; $M_B = M_0\frac{a}{l^2}(2b-a)$ $0 \leqslant z \leqslant a$ $Q = -6M_0\frac{ab}{l^3}$; $M = M_0\frac{ab}{l^2}\left(2-\frac{b}{a}-6\frac{z}{l}\right)$ $a \leqslant z \leqslant l$ $Q = -6M_0\frac{ab}{l^3}$; $M = M_0\frac{ab}{l^2}\left(2-\frac{b}{a}-6\frac{z}{l}+\frac{l^2}{ab}\right)$ $z'_0 = 0$ $M'_{max} = M_0\frac{b}{l^2}(2a-b)$ $z''_0 = a$ $M''_{max} = -M_0\left(1-4\frac{a}{l}+9\frac{a^2}{l^2}-6\frac{a^3}{l^3}\right)$ $z'''_0 = a$ $M'''_{max} = M_0\left(4\frac{a}{l}-9\frac{a^2}{l^2}+6\frac{a^3}{l^3}\right)$ $z^{IV}_0 = l$ $M^{IV}_{max} = -M_0\frac{a}{l^2}(2b-a)$	$0 \leqslant z \leqslant a$ $w(z) = \frac{l^3}{6EJ}\left[-R_A\frac{z^3}{l^3}+\right.$ $\left.+3M_A\frac{z^2}{l^3}\right] - \frac{M_0bz^2}{2EJl}\left(2\frac{a}{l}-\right.$ $\left.-\frac{b}{l}-2\frac{az}{l^2}\right)$ $\frac{l}{3} < a < 2\frac{l}{3}$ $w_{max}(>0)$ pour $z = \frac{1}{3}\left(2-\frac{b}{a}\right)l$ $w_{max}(<0)$ pour $z = \frac{1}{3}\left(1+\frac{a}{b}\right)l$

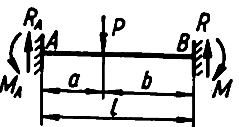
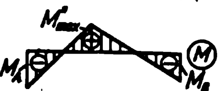
   	$R_A = R_B = \frac{1}{2}P; \quad M_A = M_B = \frac{1}{8}Pl$ $0 < z < \frac{l}{2}$ $Q = \frac{1}{2}P; \quad M = \frac{1}{8}P(4z - l)$ $\frac{l}{2} < z < l$ $Q = -\frac{1}{2}P; \quad M = \frac{1}{8}P(3l - 4z)$ $z'_0 = \frac{l}{2} \quad M_{max} = \frac{1}{8}Pl$ $z''_0 = 0; \quad z'''_0 = l \quad M''_{max} =$ $= M'''_{max} = -\frac{1}{8}Pl$	$0 < z < \frac{l}{2}$ $w(z) = -\frac{Pl^3}{48EJ}\left(3\frac{z^2}{l^2} - 4\frac{z^3}{l^3}\right)$ $f = -\frac{Pl^3}{192EJ}$ pour $z = \frac{l}{2}$

Schéma de chargement de la poutre. Diagrammes des Q et des M	Réactions d'appuis, effort tranchant Q, moment fléchissant M, coordonnée de la section dangereuse z_0, moment maximal M_{max}	Equations de la déformée $w(z)$, angle de rotation θ de la section extrême, flèche maximale f (EJ étant constant)
R_A, P, R_B, A, B, M_A, a, b, l, M_B; R_A, $\oplus$, Q, $\ominus$, R_B; M''_{max}, M_A, $\ominus$, $\oplus$, $\ominus$, M, M_B	$R_A = P\dfrac{b^2(3a+b)}{l^3}$; $R_B = P\dfrac{a^2(3b+a)}{l^3}$; $M_A = Pa\dfrac{b^2}{l^2}$; $M_B = Pb\dfrac{a^2}{l^2}$ $0 < z < a$ $Q = P\dfrac{b^2(3a+b)}{l^3}$; $M = Pa\dfrac{b^2}{l^2}\left(\dfrac{3a+b}{al}\cdot z - 1\right)$ $a < z < l$ $Q = -P\dfrac{a^2(3b+a)}{l^3}$; $M = Pa\dfrac{b^2}{l^2}\left[\dfrac{3a+b}{al}z - \right.$ $\left.-\dfrac{l^2(z-a)}{b^2a} - 1\right]$ $z'_0 = 0$ $M'_{max} = -P\dfrac{ab^2}{l^2}$ $z''_0 = a$ $M''_{max} = 2P\dfrac{a^2b^2}{l^3}$ $z'''_0 = l$ $M'''_{max} = -P\dfrac{ba^2}{l^2}$.	$0 < z < a$ $w(z) = -\dfrac{Pab^2}{6EJ}\cdot\dfrac{z^2}{l^2}\left(3 - 3\dfrac{z}{l} - \dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{z}{l}\right)$ $a > b$ $f = -\dfrac{2}{3}\dfrac{P}{EJ}\cdot\dfrac{a^3b^2}{(3a+b)^2}$ pour $z = \dfrac{2al}{3a+b}$ $a < b$ $f = -\dfrac{2}{3}\dfrac{P}{EJ}\cdot\dfrac{a^2b^3}{(3b+a)^2}$ pour $z = l - \dfrac{2bl}{3b+a}$ $w = -\dfrac{Pa^3b^3}{3EJl^3}$ pour $z = a$

	si $a < b$ $\lvert M'_{max}\rvert > M''_{max} > \lvert M'''_{max}\rvert$. si $a > b$ $\lvert M'''_{max}\rvert > M''_{max} > \lvert M'_{max}\rvert$ la valeur maximale $\lvert M'_{max}\rvert = \frac{4}{27} Pl$ pour $a = \frac{l}{3}$	
	$R_A = R_B = \frac{ql}{2}$; $M_A = M_B = \frac{ql^2}{12}$ $0 \leqslant z \leqslant l$ $Q = \frac{ql}{2}\left(1 - 2\frac{z}{l}\right)$; $M = \frac{ql^2}{2}\left(\frac{z}{l} - \frac{z^2}{l^2} - \frac{1}{6}\right)$ $z'_0 = 0$; $z''_0 = l$ $M'_{max} = M''_{max} = -\frac{ql^2}{12}$ $z'''_0 = \frac{l}{2}$ $M'''_{max} = \frac{ql^2}{24}$	$0 \leqslant z \leqslant l$ $w(z) = -\frac{ql^2 z^2}{24EJ}\left(1 - \frac{z}{l}\right)^2$ $f = -\frac{ql^4}{384EJ}$ pour $z = \frac{l}{2}$

Suite

Schéma de chargement de la poutre. Diagrammes des Q et des M	Réactions d'appuis, effort tranchant Q, moment fléchissant M, coordonnée de la section dangereuse z_0, moment maximal M_{max}	Equations de la déformée $w(z)$, angle de rotation θ de la section extrême, flèche maximale f (EJ étant constant)
R_A, q, R_B, M_A, M_B, A, B, z, l; (Q) $\frac{ql}{4}$, $-\frac{ql}{4}$; $l/2$; (M) $\frac{ql^2}{32}$, $-\frac{5ql^2}{96}$, $-\frac{5ql^2}{96}$	$R_A = R_B = \frac{ql}{4}$; $M_A = M_B = \frac{5}{96}ql^2$ $0 \leq z \leq l/2$ $Q = ql\left(\frac{1}{4} - \frac{z^2}{l^2}\right)$; $M = \frac{ql^2}{4}\left(\frac{z}{l} - \frac{4}{3}\cdot\frac{z^3}{l^3} - \frac{5}{24}\right)$ $\frac{l}{2} \leq z \leq l$ $Q = ql\left[\frac{(l-z)^2}{l^2} - \frac{1}{4}\right]$; $M = ql^2\left[\frac{1}{32} - \frac{\left(z - \frac{l}{2}\right)^2}{2l^2} + \frac{\left(z - \frac{l}{2}\right)^3}{3l^3}\right]$ $z_0' = 0$; $z_0'' = l$ $M'_{max} = M''_{max} = -\frac{5}{96}ql^2$ $z_0''' = \frac{l}{2}$ $M'''_{max} = \frac{ql^2}{32}$	$f = -\frac{7ql^4}{3840EJ}$ pour $z = \frac{l}{2}$

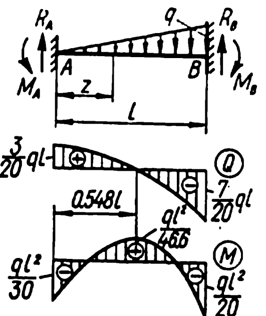
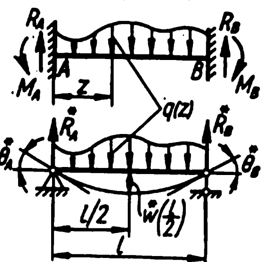
	$R_A = \frac{3}{20}ql;\quad R_B = \frac{7}{20}ql;\quad M_A = \frac{ql^2}{30};\ M_B = \frac{ql^2}{20}$ $0 < z <$ $Q = \frac{1}{2}ql\left(\frac{3}{10} - \frac{z^2}{l^2}\right);\quad M = ql^2\left(\frac{3}{20}\cdot\frac{z}{l} - \frac{1}{6}\cdot\frac{z^3}{l^3} - \frac{1}{30}\right)$ $z_0' = 0 \quad M'_{max} = -\frac{ql^2}{30};$ $z_0'' = l \quad M''_{max} = -\frac{ql^2}{20};$ $z_0''' = 0,548l \quad M'''_{max} = \frac{ql^2}{46,6}$	$f = -\frac{ql^4}{764EJ}$ pour $z = 0,525\ l$ $w = -\frac{ql^4}{768EJ}$ pour $z = \frac{l}{2}$
Charge quelconque 	$R_A = \overset{*}{R}_A - \frac{M_A - M_B}{l};$ $R_B = \overset{*}{R}_B + \frac{M_A - M_B}{l}$ $M_A = \frac{2EJ}{l}(2\overset{*}{\theta}_A - \overset{*}{\theta}_B);\quad M_B = \frac{2EJ}{l}(2\overset{*}{\theta}_B - \overset{*}{\theta}_A)$	$w = \overset{*}{w}\left(\frac{l}{2}\right) + \frac{(M_A + M_B)l^2}{16EJ}$ pour $z = \frac{l}{2}$ Les paramètres accompagnés du symbole * correspondent à une poutre isostatique à deux appuis (voir le dessin)

Tableau 25

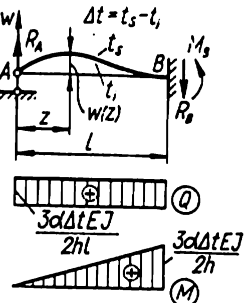
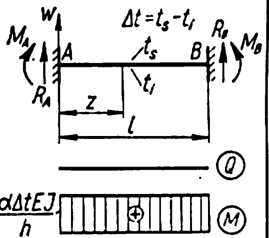
Formules de calcul tenant compte des déplacements des appuis et de la variation de température dans des poutres hyperstatiques (EJ étant constant)

Schéma de la poutre	Réactions d'appuis, effort tranchant Q et moment fléchissant M, coordonnée de la section dangereuse z_0 et valeur du moment maximal M_{max}	Equation de la déformée $w(z)$, angle de rotation θ de la section extrême, et flèche maximale f
	$R_A = \frac{3EJf_0}{l^3}$; $R_B = \frac{3EJf_0}{l^3}$; $M_B = \frac{3EJf_0}{l^2}$ $0 < z < l$ $Q = -\frac{3EJf_0}{l^3}$; $M = -\frac{3EJf_0}{l^3}z$ $z_0 = l$ $M_{max} = -\frac{3EJf_0}{l^2}$	$0 < z < l$ $w(z) = -\frac{f_0}{2}\left(2-3\frac{z}{l}+\frac{z^3}{l^3}\right)$ $f = -f_0$ pour $z = 0$ $\theta = \frac{3f_0}{2l}$ pour $z = 0$

	$R_A = \frac{3EJ\theta_0}{l^2}$; $R_B = \frac{3EJ\theta_0}{l^2}$; $M_A = \frac{3EJ\theta_0}{l}$ $0 < z < l$ $Q = -\frac{3EJ\theta_0}{l^2}$; $M = \frac{3EJ\theta_0}{l^2}(l-z)$ $z_0 = 0 \quad M_{max} = \frac{3EJ\theta_0}{l}$	$0 < z < l$ $w(z) = -\theta_0 \frac{l}{2}\left(2\frac{z}{l} - 3\frac{z^2}{l^2} + \frac{z^3}{l^3}\right)$ $f = -0{,}1930_0 l$ pour $z = 0{,}422\, l$ $\theta = -\theta_0$ pour $z = 0$ $\theta = \frac{1}{2}\theta_0$ pour $z = l$
	$R_A = R_B = \frac{12EJ}{l^3} f_0$; $M_A = M_B = \frac{6EJ}{l^2} f_0$ $0 < z < l$ $Q = -\frac{12EJ}{l^3} f_0$; $M = \frac{6EJ}{l^2} f_0 \left(1 - 2\frac{z}{l}\right)$ $z_0' = 0 \quad M'_{max} = \frac{6EJ}{l^2} f_0$ $z_0'' = \quad M''_{max} = -\frac{6EJ}{l^2} f_0$	$0 < z < l$ $w(z) = -f_0\left[1 - \left(3 - 2\frac{z}{l}\right)\frac{z^2}{l^2}\right]$ $f = -f_0$ pour $z = 0$

Suite

Schéma de la poutre	Réactions d'appuis, effort tranchant Q et moment fléchissant M, coordonnée de la section dangereuse z_0 et valeur du moment maximal M_{max}	Equation de la déformée $w(z)$, angle de rotation θ de la section extrême, et flèche maximale f
	$R_A = R_B = \frac{6EJ\theta_0}{l^2}$; $M_A = \frac{4EJ\theta_0}{l}$; $M_B = \frac{2EJ\theta_0}{l}$ $0 \leqslant z \leqslant l$ $Q = -\frac{6EJ\theta_0}{l^2}$; $M = \frac{6EJ\theta_0}{l}\left(2 - 3\frac{z}{l}\right)$ $z_0' = 0$ $M_{max} = \frac{4EJ\theta_0}{l}$ $z_0'' = l$ $M_{max} = -\frac{2EJ\theta_0}{l}$	$0 \leqslant z \leqslant l$ $w(z) = -\theta_0 l\left(\frac{z^3}{l^3} - 2\frac{z^2}{l^2} + \frac{z}{l}\right)$ $f = -\frac{4\theta_0}{27} l$ pour $z = \frac{l}{3}$ $\theta = -\theta_0$ pour $z = 0$

Sur la hauteur de la section la température varie de façon linéaire  	$R_A = R_B = \frac{3\alpha\Delta tEJ}{2hl}$; $M_B = \frac{3\alpha\Delta tEJ}{2h}$ $0 \leq z \leq l$ $Q = \frac{3\alpha\Delta tEJ}{2hl}$; $M = \frac{3\alpha\Delta tEJ}{2hl} z$ $z_0 = l$ $M_{max} = \frac{3\alpha\Delta tEJ}{2h}$.	$0 \leq z \leq l$ $w(z) = \frac{\alpha\Delta tl^2}{4h}\left(\frac{z}{l} - 2\frac{z^2}{l^2} + \frac{z^3}{l^3}\right)$ $f = \frac{\alpha\Delta tl^2}{27h}$ pour $z = \frac{l}{3}$ $\theta = \frac{\alpha\Delta tl}{4h}$ pour $z = 0$ (α — coefficient de dilatation thermique linéaire du matériau de la poutre; Δt — différence de température entre la fibre supérieure et la fibre inférieure de la poutre)
Sur la hauteur de la section la température varie de façon linéaire  	$R_A = R_B = 0$; $M_A = M_B = \frac{\alpha\Delta tEJ}{h}$ $0 \leq z \leq l$ $Q = 0$; $M = \frac{\alpha\Delta tEJ}{h} = \text{const}$	$0 \leq z \leq l$ $w(z) = 0$ (α — coefficient de dilatation thermique linéaire du matériau de la poutre; Δt — différence de température entre la fibre supérieure et la fibre inférieure de la poutre)

Moments fléchissants dans une potence $\left(k = \frac{J_2 h}{J_1 l}\right)$

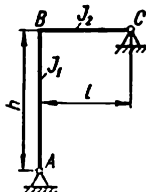
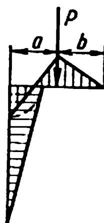
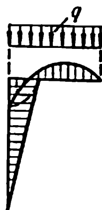
Schéma de la sollicitation et diagramme de M	Moment échissant M dans les sections caractéristiques
Traverse et poteau sont dotés d'appuis articulés  $n = 1 + k$	
	$M_B = \frac{\alpha(1+\alpha)}{2n} aP$ $M_P = \alpha\left[1 - \frac{\alpha(1+\alpha)}{2n}\right] aP$ $\alpha = \frac{b}{l}$
	$M_B = \frac{ql^2}{8n}$

Schéma de la sollicitation et diagramme de M	Moment fléchissant M dans les sections caractéristiques
a, b, P	$M_B = \frac{\alpha(2-\alpha)kb}{2n}P$ $\alpha = \frac{a}{h}$
a, b, M	$M_B = [3\alpha(2-\alpha)-2]\frac{kM}{2n}$; $\alpha = \frac{a}{h}$
q	$M_B = \frac{qkh^2}{8n}$
f Déplacement horizontal de l'appui C	$M_B = 3\frac{EJ_1 f}{nhl}$

Schéma de la sollicitation et diagramme de M	Moment fléchissant M dans les sections caractéristiques
Déplacement vertical de l'appui C	$M_B = 3\frac{EJ_1 f}{nl^2}$
Déplacement vertical de l'appui A	Les valeurs de M restent les mêmes que dans le cas d'un déplacement vertical de l'appui C mais de signes inverses
Echauffement de Δt α — coefficient de dilatation thermique	$M_B = 3\frac{EJ_1}{nh}\left(1 + \frac{h^2}{l^2}\right)\alpha\Delta t$
Traverse articulée, poteau encastré $n = 4 + 3k$	

Schéma de la sollicitation et diagramme de M	Moment fléchissant M dans les sections caractéristiques
P, a, b	$M_A = \frac{\alpha(1+\alpha)}{n} aP$; $M_B = \frac{2\alpha(1+\alpha)}{n} aP$ $M_P = \alpha\left[1 - \frac{2\alpha(1+\alpha)}{n}\right] aP$; $\alpha = \frac{b}{l}$
q	$M_A = \frac{ql^2}{4n}$; $M_B = \frac{ql^2}{2n}$
a, P, b	$M_A = [2 + (2 + 3k)\alpha]\frac{\alpha b}{n}\cdot P$ $M_B = \frac{3\alpha k(1-\alpha)b}{n} P$; $\alpha = \frac{a}{h}$ $M_P = \alpha bP - \alpha M_A - (1-\alpha)M_B$
a, M, b	$M_A = \left[\alpha(2-3\alpha) - \frac{2}{n}(1-\alpha)(3\alpha-1)\right] M$ $M_B = 3(1-\alpha)(3\alpha-1)\frac{kM}{n}$; $\alpha = \frac{a}{h}$

Schéma de la sollicitation et diagramme de M	Moment fléchissant M dans les sections caractéristiques
q	$M_A = \dfrac{q(2+k)h^2}{4n}$; $M_B = \dfrac{qkh^2}{4n}$
Déplacement horizontal de l'appui C f	$M_A = 6(2+3k)\dfrac{EJ_1f}{nh^2}$ $M_B = 18\dfrac{EJ_2f}{nhl}$
Déplacement vertical de l'appui C	$M_A = 6\dfrac{EJ_2f}{nl^2}$ $M_B = 12\dfrac{EJ_2f}{nl^2}$
Déplacement vertical de l'appui A	Les valeurs de M sont les mêmes que pour un déplacement vertical de l'appui C mais de signes inverses

Schéma de la sollicitation et diagramme de M	Moment fléchissant M dans les sections caractéristiques
Rotation de l'appui A d'un angle θ	$$M_A = 12(1+k)\frac{EJ_1}{nh}\theta$$ $$M_B = 6\frac{EJ_2}{nl}\theta$$
Echauffement de Δt α — coefficient de dilatation thermique linéaire	$$M_A = 6\frac{EJ_2}{nh}\left(3+\frac{2}{k}+\frac{h^2}{l^2}\right)\alpha\Delta t$$ $$M_B = 6\frac{EJ_2}{nh}\left(3+2\frac{h^2}{l^2}\right)\alpha\Delta t$$
Traverse et poteau sont encastrés $n = 1 + k$	

Schéma de la sollicitation et diagramme de M	Moment fléchissant M dans les sections caractéristiques
	$M_A = \frac{\alpha^2 a}{2n} P$; $M_B = \frac{\alpha^2 a}{n} P$ $M_C = [(2-\alpha)k + 2(1-\alpha)] \frac{\alpha a}{2n} P$ $M_P = \alpha a P - \alpha M_B - (1-\alpha) M_C$; $\alpha = \frac{b}{l}$
	$M_A = \frac{ql^2}{24n}$; $M_B = \frac{ql^2}{12n}$ $M_C = (2 + 3k) \frac{ql^2}{24n}$
	$M_A = [1 + \alpha(1 + 2k)] \frac{\alpha b}{2n} P$ $M_B = \frac{\alpha k(1-\alpha)b}{n} P$ $M_C = \frac{\alpha k(1-\alpha)b}{2n} P$; $\alpha = \frac{a}{h}$

Schéma de la sollicitation et diagramme de M	Moment fléchissant M dans les sections caractéristiques
	$M_A = \left[\alpha(2-3\alpha) - \frac{(1-\alpha)(3\alpha-1)}{2n}\right] M$ $M_B = (1-\alpha)(3\alpha-1)\frac{kM}{n}$ $M_C = (1-\alpha)(3\alpha-1)\frac{kM}{2n}$; $\alpha = \frac{a}{h}$
	$M_A = \frac{q(3+2k)h^2}{24n}$; $M_B = \frac{qkh^2}{12n}$ $M_C = \frac{qkh^2}{24n}$
Déplacement horizontal de l'appui C	$M_A = 3(1+2k)\frac{EJ_1f}{nh^2}$ $M_B = 6\frac{EJ_1f}{nhl}$ $M_C = 3\frac{EJ_1f}{nhl}$
Déplacement vertical de l'appui C	$M_A = 3\frac{EJ_1f}{nl^2}$ $M_B = 6\frac{EJ_1f}{nl^2}$ $M_C = 3(2+k)\frac{EJ_1f}{nl^2}$

Schéma de la sollicitation et diagramme de M	Moment fléchissant M dans les sections caractéristiques
Déplacement vertical de l'appui A	Les valeurs de M sont les mêmes que pour un déplacement vertical de l'appui C mais de signes inverses
Rotation de l'appui A d'un angle θ	$M_A = (3 + 4k) \frac{EJ_1}{nh} \theta$ $M_B = 2 \frac{EJ_1}{nl} \theta$ $M_C = \frac{EJ_1}{nl} \theta$
Echauffement de Δt α - coefficient de dilatation thermique linéaire	$M_A = \frac{3EJ_1}{nh} \left(2 + \frac{1}{k} + \frac{h^2}{l^2}\right) \alpha \Delta t$ $M_B = \frac{6EJ_1}{nh} \left(1 + \frac{h^2}{l^2}\right) \alpha \Delta t$ $M_C = \frac{3EJ_1}{nh} \left[1 + (2 + k) \frac{h^2}{l^2}\right] \alpha \Delta t$

Moments fléchissants pour un portique de forme rectangulaire $\left(k = \frac{J_2 h}{J_1 l}\right)$

Schéma de sollicitation et diagramme de M	Moment fléchissant M dans les sections caractéristiques
Poteaux articulés	B, C, J_2, h, J_1, J_1, A, D, l $n = 3 + 2k$
P, a, b	$M_B = M_C = \frac{3ab}{2nl} P$ $M_P = \frac{(3 + 4k)ab}{2nl} P$
q, a	$M_B = M_C = \frac{(3 - 2\alpha)\,\alpha^2 q l^2}{4n}$ $\alpha = \frac{a}{l}$

Schéma de la sollicitation et diagramme de M	Moment fléchissant M dans les sections caractéristiques
	$M_B = M_C = \frac{ql^2}{4n}$ $M_{max} = (1 + 2k)\frac{ql^2}{8n}$
	$M_B = M_C = \frac{1}{2}hP$
	$M_B = \left[1 - \frac{(2-\alpha)\alpha k}{n}\right]\frac{a}{2}P$ $M_C = \left[1 + \frac{(2-\alpha)\alpha k}{n}\right]\frac{a}{2}P$ $M_P = (1-\alpha)(Pb + M_B)$ $\alpha = \frac{b}{h}$
	$M_B = \frac{3 + (1 + 3\alpha^2)k}{2n}M$ $M_C = \frac{3[1 + (1 - \alpha^2)k]}{2n}M$ $\alpha = \frac{a}{h}$

Schéma de la sollicitation et diagramme de M	Moment fléchissant M dans les sections caractéristiques
q	$M_B = (2+k)\dfrac{3qh^2}{8n}$ $M_C = (6+5k)\dfrac{qh^2}{8n}$
q q	$M_B = M_C = \dfrac{7kqh^2}{60n}$
Echauffement de Δt Chauffage Δt α – coefficient de dilatation thermique linéaire	$M_B = M_C = \dfrac{3EJ_2\alpha\Delta t}{nh}$

Poteaux encastrés

$n_1 = 2 + k \quad n_2 = 1 + 6k$

Schéma de la sollicitation et diagramme de M	Moment fléchissant M dans les sections caractéristiques
P, a, b	$M_A = \left(\frac{1}{2n_1} - \frac{2\alpha - 1}{2n_2}\right)\alpha a P$ $M_B = \left(\frac{1}{n_1} + \frac{2\alpha - 1}{2n_2}\right)\alpha a P$ $M_C = \left(\frac{1}{n_1} - \frac{2\alpha - 1}{2n_2}\right)\alpha a P$ $M_D = \left(\frac{1}{2n_1} + \frac{2\alpha - 1}{2n_2}\right)\alpha a P$ $\alpha = \frac{b}{l}$
q, a	$M_A = \alpha^2\left[\frac{3 - 2\alpha}{n_1} - \frac{3(1 - \alpha)^2}{n_2}\right]\frac{ql^2}{12}$ $M_D = \alpha^2\left[\frac{3 - 2\alpha}{n_1} + \frac{3(1 - \alpha)^2}{n_2}\right]\frac{ql^2}{12}$ $M_C = \alpha^2\left[\frac{2(3 - 2\alpha)}{n_1} - \frac{3(1 - \alpha)^2}{n_2}\right]\frac{ql^2}{12}$ $M_B = \alpha^2\left[\frac{2(3 - 2\alpha)}{n_1} + \frac{3(1 - \alpha)^2}{n_2}\right]\frac{ql^2}{12}$ $\alpha = \frac{a}{l}$
q	$M_A = M_D = \frac{ql^2}{12n_1}$ $M_B = M_C = \frac{ql^2}{6n_1}$ $M_{max} = \frac{2 + 3k}{24n_1} ql^2$

Schéma de la sollicitation et diagramme de M	Moment fléchissant M dans les sections caractéristiques
P	$M_A = M_D = \frac{1+3k}{2n_2} hP$ $M_B = M_C = \frac{3}{2}\frac{k}{n_2} hP$
P, b, a	$M_A = \left\{1 - \frac{3(1-\alpha)k}{n_2} + \frac{\alpha[(1+\alpha(1+k)]}{n_1}\right\}\frac{a}{2}P$ $M_B = \left[\frac{3(1-\alpha)k}{n_2} - \frac{\alpha(1-\alpha)k}{n_1}\right]\frac{a}{2}P$ $M_D = \left\{1 - \frac{3(1-\alpha)k}{n_2} - \frac{\alpha[1+\alpha(1+k)]}{n_1}\right\}\frac{a}{2}P$ $M_C = \left[\frac{3(1-\alpha)k}{n_2} + \frac{\alpha(1-\alpha)k}{n_1}\right]\frac{a}{2}P$. $\alpha = \frac{b}{h}$
M, a	$M_A = \left[-\frac{3\alpha(2-\alpha)}{2} + 1 - \frac{\alpha(2-3\alpha)k}{2n_1} - \left(\frac{6\alpha k}{n_2} - 1\right)\right]\frac{M}{2}$ $M_B = \alpha k\left(-\frac{2-3\alpha}{2n_1} + \frac{3}{n_2}\right)M$ $M_C = \alpha k\left(\frac{2-3\alpha}{2n_1} + \frac{3}{n_2}\right)M$

Schéma de la sollicitation et diagramme de M	Moment fléchissant M dans les sections caractéristiques
	$M_D = \left[\frac{3\alpha(2-\alpha)}{2} - 1 + \frac{\alpha(2-3\alpha)k}{2n_1} - \left(\frac{6\alpha k}{n_2} - 1\right)\right]\frac{M}{2}$ $\alpha = \frac{a}{h}$
q	$M_A = \left(\frac{k+3}{6n_1} + \frac{1+4k}{n_2}\right)\frac{qh^2}{4}$ $M_B = \left(\frac{2}{n_2} - \frac{1}{6n_1}\right)k\frac{qh^2}{4}$ $M_C = \left(\frac{1}{6n_1} + \frac{2}{n_2}\right)k\frac{qh^2}{4}$ $M_D = \left(\frac{1+4k}{n_2} - \frac{3+k}{6n_1}\right)\frac{qh^2}{4}$
q q	$M_A = M_D = \frac{8+3k}{n_1}\cdot\frac{qh^2}{60}$ $M_B = M_C = \frac{qh^2}{30n_1}$
Echauffement de Δt Chauffage Δt α – coefficient de dilatation thermique linéaire	$M_A = M_D = \frac{3(1+k)EJ_2\alpha\Delta t}{kn_1h}$ $M_B = M_C = \frac{3EJ_2\alpha\Delta t}{n_1h}$

Moments fléchissants dans un portique au contour fermé

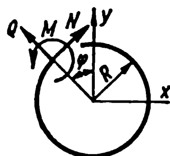
$$k = \frac{J_2 h}{J_1 l}\,; \quad p = \frac{J_2}{J_3}\,; \quad n = 1 + p + 6k; \quad m = (2 + k) + \frac{p}{k}(3 + 2k)$$

Schéma de la sollicitation	Moments fléchissants dans les joints du portique (les moments positifs provoquent une traction du côté interne du portique)
	$M_{A,D} = \alpha(1-\alpha)\left(\frac{1}{m} \mp \frac{1-2\alpha}{n}\right)\frac{Pl}{2}$; $M_{B,C} = -\alpha(1-\alpha)\left(\frac{2k+3p}{km} \pm \frac{1-2\alpha}{n}\right)\frac{Pl}{2}$; $\alpha = \frac{a}{l}$
	$M_{A,D} = \alpha(1-\alpha)p\left(\frac{3+2k}{km} \mp \frac{1-2\alpha}{n}\right)\frac{Pl}{2}$; $M_{B,C} = -\alpha(1-\alpha)p\left(\frac{1}{m} \pm \frac{1-2\alpha}{n}\right)\frac{Pl}{2}$; $\alpha = \frac{a}{}$
	$M_{A,D} = \alpha\left\{\frac{1-\alpha}{m}[\alpha(1+k)-(2+k)] \mp \frac{1}{n}[1+3k(2-\alpha)]\right\}\frac{Ph}{2}$; $M_{B,C} = \alpha\left\{-\frac{1-\alpha}{m}[\alpha(k+p)+p] \pm \frac{1}{n}(3\alpha k+p)\right\}\frac{Ph}{2}$; $\alpha = \frac{a}{h}$
	$M_A = M_D = \frac{ql^2}{12m}$; $M_B = M_C = -\frac{ql^2}{12}\cdot\frac{2k+3p}{km}$

Schéma de la sollicitation	Moments fléchissants dans les joints du portique (les moments positifs provoquent une traction du côté interne du portique)
	$M_A = M_D = \frac{3+2k}{km} p \frac{ql^2}{12}$; $M_B = M_C = -\frac{p}{m} \cdot \frac{ql^2}{12}$
	$M_{A,D} = \alpha^2 \left[\frac{3-2\alpha}{m} \pm \frac{3(1-\alpha)^2}{n}\right] \frac{ql^2}{12}$; $M_{B,C} = -\alpha^2 \left[\frac{1}{km}(3-2\alpha)(2k+3p) \pm \frac{3}{n}(1-\alpha)^2\right] \frac{ql^2}{12}$; $\alpha = \frac{a}{l}$
	$M_{A,D} = \alpha^2 p \left[\frac{1}{km}(3-2\alpha)(2k+3) \pm \frac{3}{n}(1-\alpha)^2\right] \frac{ql^2}{12}$; $M_{B,C} = -\alpha^2 p \left[\frac{3-2\alpha}{m} \pm \frac{3(1-\alpha)^2}{n}\right] \frac{ql^2}{12}$; $\alpha = \frac{a}{l}$
	$M_{A,D} = -\left(\frac{3+k}{6m} \pm \frac{1+4k}{n}\right) \frac{qh^2}{4}$; $M_{B,C} = -\left(\frac{k+3p}{6m} \pm \frac{2k+p}{n}\right) \frac{qh^2}{4}$

Schéma de la sollicitation	Moments fléchissants dans les joints du portique (les moments positifs provoquent une traction du côté interne du portique)
	$M_A = M_B = M_C = M_D = -\dfrac{1 + k\dfrac{h^2}{l^2}}{1+k}\,\dfrac{ql^2}{12}$ pour $J_1 = J_2$
	$M_A = M_D = -\dfrac{8+3k}{m}\cdot\dfrac{qh^2}{60}$ $M_B = M_C = -\dfrac{7+2k}{m}\,p\,\dfrac{qh^2}{60}$
	$M_{A,D} = -\left(\dfrac{1}{m} \mp \dfrac{1}{n}\right)\dfrac{M}{2}$ $M_{B,C} = \left(\dfrac{3p+2k}{km} \pm \dfrac{1}{n}\right)\dfrac{M}{2}$
	$M_{A,D} = -p\left(\dfrac{3+2k}{km} \pm \dfrac{1}{n}\right)\dfrac{M}{2}$ $M_{B,C} = -p\left(\dfrac{2+k}{km} \mp \dfrac{1}{n}\right)\dfrac{M}{2}$

Efforts et déplacements dans un anneau sollicité dans son propre plan



N, Q, M, force normale, effort tranchant et moment par l'angle φ (le schéma montre les directions posi section de devant, dans le sens d'accroissement de l'anneau dans le sens des axes x et y (la valeur mètre); E, module d'élasticité du matériau; F, J,

Schéma	N	Q
q	qR	0
P, P	$\frac{1}{2} P \sin\varphi$	$\frac{1}{2} P \cos\varphi$
2P, P, P	$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ $P(0{,}3183 \cos\varphi + \sin\varphi)$ $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ $P \cdot 0{,}3183 \cdot \cos\varphi$	$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ $-P(0{,}3183 \sin\varphi - \cos\varphi)$ $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ $-P \cdot 0{,}3183 \sin\varphi$

fléchissant dans une section de l'anneau déterminée
tives des efforts agissant dans l'anneau dans une
l'angle φ); δ_x, δ_y, variations du diamètre de
positive correspond à une augmentation du dia-
aire et moment d'inertie de la section de l'anneau

M	δ
0	$\delta_x = \delta_y = \frac{qR^2}{EF}$
$-PR\left(0{,}3183 - \frac{1}{2}\sin\varphi\right)$	$\delta_x = -0{,}137\frac{PR^3}{EJ}$ $\delta_y = 0{,}149\frac{PR^3}{EJ}$
$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ $PR(0{,}3183\cos\varphi + \sin\varphi - 0{,}8183)$ $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$ $PR(0{,}1817 + 0{,}3183\cos\varphi)$	$\delta_x = -0{,}1366\frac{PR^3}{EJ}$ $\delta_y = 0{,}1488\frac{PR^3}{EJ}$

Schéma	N	Q
	$0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha$ $P(0{,}3183 \sin^2\alpha \cos\varphi + \sin\varphi)$ $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \pi$ $P \cdot 0{,}3183 \sin^2\alpha \cos\varphi$	$0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha$ $P(\cos\varphi - 0{,}3183 \sin^2\alpha \sin\varphi)$ $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \pi$ $-P \cdot 0{,}3183 \sin^2\alpha \sin\varphi$
	$0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha$ $P[0{,}3183 \cos\varphi (\sin^2\beta - \sin^2\alpha)]$ $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$ $P[0{,}3183 \cos\varphi (\sin^2\beta -$ $- \sin^2\alpha) + \sin\varphi]$ $\beta \leqslant \varphi \leqslant \pi$ $P[0{,}3183 \cos\varphi (\sin^2\beta -$ $- \sin^2\alpha)]$	$0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha$ $P[0{,}3183 \sin\varphi (\sin^2\alpha -$ $- \sin^2\beta)]$ $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta$ $P[0{,}3183 \sin\varphi (\sin^2\alpha -$ $- \sin^2\beta) + \cos\varphi]$ $\beta \leqslant \varphi \leqslant \pi$ $P[0{,}3183 \sin\varphi (\sin^2\alpha -$ $- \sin^2\beta)]$
	$0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha$ $P[0{,}3183(\alpha -$ $- \sin\alpha \cos\alpha) - 1] \cos\varphi$ $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \pi$ $P \cdot 0{,}3183(\alpha -$ $- \sin\alpha \cos\alpha) \cos\varphi$	$0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha$ $P[0{,}3183 (\sin\alpha \cos\alpha -$ $- \alpha) + 1] \sin\varphi$ $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \pi$ $P \cdot 0{,}3183 (\sin\alpha \cdot \cos\alpha -$ $- \alpha) \sin\varphi$

M	δ
$0 < \varphi < \alpha$ $PR[0{,}3183\,(\alpha \sin \alpha + \cos\alpha + \sin^2 \alpha \cos \varphi - 1) - \sin \alpha + \sin \varphi]$ $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \pi$ $PR[0{,}3183\,(\alpha \sin \alpha + \cos \alpha + \sin^2 \alpha \cos \varphi - 1)]$	$\delta_x = \dfrac{PR^3}{EJ}\left[\dfrac{1}{2}(\sin^2\alpha + 2) + 0{,}6366(\alpha \cdot \sin \alpha + \cos \alpha - 1) - 2 \sin \alpha\right]$ $\delta_y = \dfrac{PR^3}{EJ}\left[\dfrac{1}{2}(\sin\alpha\cos\alpha + \alpha) + 0{,}6366\,(\alpha \sin \alpha + \cos \alpha - 1) - \sin \alpha\right]$
$0 < \varphi < \alpha$ $PR[0{,}3183\,(\beta \sin \beta + \cos \beta - \alpha \sin \alpha - \cos \alpha - \sin^2 \alpha \cos \varphi + \sin^2 \beta \cos \varphi) - \sin \beta + \sin \alpha]$ $\alpha < \varphi < \beta$ $PR[0{,}3183\,(\beta \sin \beta + \cos \beta - \alpha \sin \alpha - \cos \alpha - \sin^2 \alpha \cos \varphi + \sin^2 \beta \cos \varphi) - \sin \beta + \sin \varphi]$ $\beta < \varphi \leqslant \pi$ $PR[0{,}3183\,(\beta \sin \beta + \cos \beta - \alpha \sin \alpha + \cos \alpha - \sin^2 \alpha \cos \varphi + \sin^2 \beta \cos \varphi)]$	$\delta_x = \dfrac{PR^3}{EJ}\left[\dfrac{1}{2}(\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta) + 0{,}6366\,(\beta \sin \beta + \cos \beta - \alpha \sin \alpha - \cos \alpha) + 1 - 2 \sin \beta\right]$ $\delta_y = \dfrac{PR^3}{EJ}\left[\dfrac{1}{2}(\sin \beta \cos \beta + \beta - \sin \alpha \cos \alpha - \alpha) + 0{,}6366\,(\beta \sin \beta + \cos \beta - \alpha \sin \alpha - \cos \alpha) + \sin \alpha - \sin \beta\right]$
$0 < \varphi < \alpha$ $PR[0{,}3183\,(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha + \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \cos \alpha \cos \varphi) - \cos \varphi + \cos \alpha]$ $\alpha < \varphi < \pi$ $PR \cdot 0{,}3183(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha + \alpha \cos \varphi - \sin \alpha \cos \alpha \cos \varphi)$	$\delta_x = \dfrac{PR^3}{EJ}\left[0{,}6366\,(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) + \dfrac{1}{2}(\sin \alpha \cos \alpha - \alpha)\right];$ $\delta_y = \dfrac{PR^3}{EJ}\left[0{,}6366\,(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha) + \cos \alpha + \dfrac{1}{2}\sin^2 \alpha - 1\right]$

Schéma	N	Q
$\alpha = \frac{\pi}{n}$	$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $\frac{P}{2 \sin \alpha} \cos \varphi$	$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $\frac{P}{2 \sin \alpha} \sin \varphi$
	$0 \leq \varphi \leq \pi$ $\frac{M_0}{R}\, 0{,}6366 \cos \varphi$	$0 \leq \varphi \leq \pi$ $-\frac{M_0}{R}\, 0{,}6366 \sin \varphi$
	$0 \leq \varphi \leq \pi$ $\frac{M_0}{R}\, 0{,}6366 \sin \alpha \cos \varphi$	$0 \leq \varphi \leq \pi$ $-\frac{M_0}{R}\, 0{,}6366 \sin \alpha \sin \varphi$
$P = 2qR \sin \alpha$	$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $-qR\left(\frac{1}{3\pi} \sin^3 \alpha \cos \varphi + \right.$ $\left. + \sin \alpha \sin \varphi\right)$	$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $qR\left(\frac{1}{3\pi} \sin^3 \alpha \sin \varphi - \right.$ $\left. - \sin \alpha \cos \varphi\right)$

M	δ
$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $\frac{PR}{2}\left(\frac{\cos\varphi}{\sin\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right)$ pour $\varphi = 0,\ 2\alpha,\ 4\alpha, \ldots$ $M_{max}^{(+)} = \frac{PR}{2}\left(\frac{1}{\sin\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right)$ pour $\varphi = \alpha,\ 3\alpha, \ldots$ $M_{max}^{(-)} = \frac{-PR}{2}\left(\frac{1}{\alpha} - \operatorname{cotg}\alpha\right)$	Déplacement radial du point d'application de la force, compté à partir du centre $\frac{PR^3}{2EJ}\left[\frac{1}{\sin^2\alpha}\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{4}\right) - \frac{1}{\alpha}\right]$ Déplacement radial des points correspondant à $\varphi = 0{,}2\alpha,\ 4\alpha, \ldots$ (dirigé vers le centre) $\frac{PR^3}{4EJ}\left(\frac{2}{\alpha} - \frac{1}{\sin\alpha} - \frac{\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha}\right)$
$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ $M_0\left(0{,}6366\cos\varphi - \frac{1}{2}\right)$ $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \pi$ $M_0\left(0{,}6366\cos\varphi + \frac{1}{2}\right)$	$\delta_x = 0$ $\delta_y = 0$
$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $M_0\,[0{,}3183\,(2\cos\varphi\sin\alpha + \alpha) - 1]$ $\alpha \leq \varphi \leq \pi$ $M_0[0{,}3183\,(2\cos\varphi\sin\alpha + \alpha)]$	$\delta_x = \frac{M_0R^2}{EJ}(0{,}6366\,\alpha - \sin\alpha)$ $\delta_y = \frac{M_0R^2}{EJ}(0{,}6366\,\alpha + \cos\alpha - 1)$
$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $M(0) - qR^2\left[\sin\alpha\sin\varphi - \frac{1}{3\pi}\sin^3\alpha\,(1 - \cos\varphi)\right]$	$\delta_x = \frac{2qR^4}{EJ}\left[\frac{1}{4} - \frac{\sin\alpha}{2} + \frac{\sin^2\alpha}{2} - \frac{\sin^3\alpha}{12} - \frac{1}{\pi}\left(\frac{\alpha}{4} - \sin\alpha + \frac{3}{4}\sin\alpha\cos\alpha + \frac{1}{2}\alpha\sin^2\alpha\right)\right]$

Schéma	N	Q
	$\alpha \leq \varphi \leq \pi$ $-qR\left(\frac{1}{3\pi}\sin^3\alpha\cos\varphi + \sin^2\varphi\right)$	$\alpha \leq \varphi \leq \pi$ $qR\left(\frac{1}{3\pi}\sin^3\alpha\sin\varphi - \sin\varphi\cos\varphi\right)$
$P = 2qR\sin\alpha$	$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $-qR[\sin\alpha\cdot\sin\varphi + (1+\cos\alpha)\cos\varphi] - N(\pi)\cos\varphi$ $\alpha \leq \varphi \leq \pi$ $-qR(1+\cos\alpha) - N(\pi)\cos\varphi$ $N(\pi) = -\frac{qR}{\pi}(\pi - \sin\alpha + \alpha\cos\alpha)$	$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $-qR[\sin\alpha\cdot\cos\varphi - (1+\cos\alpha)\sin\varphi] + N(\pi)\sin\varphi$ $\alpha \leq \varphi \leq \pi$ $qR\sin\varphi + N(\pi)\sin\varphi$
	$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $-qR\cdot\sin^2\varphi$ $\alpha \leq \varphi \leq \pi - \alpha$ $-qR\cdot\sin\alpha\cdot\sin\varphi$	$0 \leq \varphi \leq \alpha$ $qR\sin\varphi\cdot\cos\varphi$ $\alpha \leq \varphi \leq \pi - \alpha$ $qR\sin\alpha\cos\varphi$

Suite

M	δ
$\alpha \leqslant \varphi \leqslant \pi$ $M(0) + qR^2\left[\frac{1}{3\pi}\sin^3\alpha\,(1 - \cos\varphi) - \frac{1}{2}(\sin^2\alpha + \sin^2\varphi)\right]$ $M(0) = qR^2\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\sin^2\alpha + \frac{1}{\pi}\left(\sin\alpha - \frac{1}{2}\alpha\sin^2\alpha - \frac{\sin^3\alpha}{3} - \frac{3}{4}\sin\alpha\cos\alpha - \frac{\alpha}{4}\right)\right]$	$\delta_y = -\frac{2qR^4}{EJ}\left[\frac{1}{12} + \frac{\sin^2\alpha}{4} - \frac{\alpha\sin\alpha}{4} - \frac{\sin^2\alpha\cos\alpha}{12} - \frac{\cos\alpha}{6} - \frac{1}{\pi}\left(\frac{\alpha\sin^2\alpha}{2} + \frac{3}{4}\sin\alpha\cos\alpha + \frac{\alpha}{4} - \sin\alpha\right)\right]$
$0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha$ $qR^2\left[\sin\alpha\cdot\sin\varphi + (1 + \cos\alpha)\cos\varphi - \frac{1}{\pi}(\pi - \alpha + \sin\alpha)\right] + N(\pi)\cdot R\cdot\cos\varphi$ $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \pi$ $qR^2\left[\cos\varphi - \frac{1}{\pi}(\sin\alpha - \alpha)\right] + N(\pi)\cdot R\cdot\cos\varphi$	$\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \pi$ $\delta_x = -\frac{qR^4}{EJ}\left(2 - \frac{2\alpha}{\pi} + \frac{2\sin\alpha}{\pi} - \frac{3\sin\alpha}{2} - \frac{\pi\cos\alpha}{2} + \frac{\alpha\cos\alpha}{2}\right)$ $0 \leqslant \alpha \leqslant \pi$ $\delta_y = \frac{qR^4}{EJ}\left(2 - \frac{2\alpha}{\pi} + \frac{2\sin\alpha}{\pi} - \frac{\alpha\sin\alpha}{2} - \cos\alpha\right)$
$0 \leqslant \varphi \leqslant \alpha$ $M(0) - \frac{qR^2}{2}\sin^2\varphi$ $\alpha \leqslant \varphi \leqslant \pi - \alpha$ $M(0) - qR^2\left(\sin\alpha\cdot\sin\varphi - \frac{1}{2}\sin^2\alpha\right)$ $M(0) = qR^2\left[\frac{1}{\pi}\left(\frac{\alpha}{2} + \alpha\sin^2\alpha + \frac{3}{2}\sin\alpha\cos\alpha\right) - \frac{1}{2}\sin^2\alpha\right]$	$\delta_x = \frac{qR^4}{EJ}\left[-\sin\alpha - \frac{\sin^3\alpha}{3} + \frac{1}{\pi}(\alpha + 3\sin\alpha\cos\alpha + 2\alpha\sin^2\alpha)\right]$ $\delta_y = -\frac{qR^4}{EJ}\left[\sin^2\alpha - \frac{\sin^2\alpha\cos\alpha}{3} - \alpha\sin\alpha - \frac{2\cos\alpha}{3} + \frac{2}{3} + \frac{\pi\sin\alpha}{2} - \frac{1}{\pi}(2\alpha\sin^2\alpha + 3\sin\alpha\cos\alpha + \alpha)\right]$

CHAPITRE 14

Calcul des poutres curvilignes planes

§ 81. Détermination des contraintes dans les poutres de grande courbure

Dans la catégorie des poutres curvilignes on range les crochets de levage, les œillets, les anneaux des chaînes, les jantes des poulies, les couronnes des roues, les arcs, etc. Les axes de telles poutres sont des courbes planes. Dans les sections transversales d'une poutre curviligne plane agissent dans le cas le plus général, trois facteurs de force internes M, Q et N qui se déterminent par le même procédé que pour les poutres à axe rectiligne. Les dépendances différentielles entre M, Q et q ont été obtenues au § 21.

Les poutres curvilignes dont le plan de symétrie (fig. 271, *a*, *b*) longitudinal subit généralement l'action des charges extérieures présentent un grand intérêt pratique.

La distribution des contraintes normales dans les sections transversales, des barres curvilignes diffère de celle qui a lieu dans les poutres à axe rectiligne. Cette différence est, toutes les autres conditions étant identiques, d'autant plus grande que l'est la courbure de la poutre, courbure caractérisée par le rapport entre la hauteur h de la section transversale de la barre curviligne et le rayon de courbure R de son axe. Conformément à cela il est convenu de distinguer les *poutres de faible courbure* pour lesquelles $\frac{h}{R} < \frac{1}{5}$ et les *poutres de grande courbure* pour lesquelles $\frac{h}{R} \geqslant \frac{1}{5}$.

Les contraintes normales des poutres de faible courbure peuvent, en flexion, se déterminer avec suffisamment de précision d'après la formule de Navier (10.6) obtenue pour les poutres à axe rectiligne. Les contraintes maximales calculées d'après la formule de Navier pour une poutre de section rectangulaire avec $\frac{h}{R} = \frac{1}{15}$ diffèrent de 2% des contraintes

FIG. 271

calculées d'après les formules pour une poutre de grande courbure; avec $\frac{h}{R} = \frac{1}{10}$ la différence sera de 3,5%, avec $\frac{h}{R} = \frac{1}{5}$, de 7%.

Etudions le cas de la flexion pure d'une poutre de grande courbure $\left(\frac{h}{R} \geqslant \frac{1}{5}\right)$ (fig. 271). Supposons que le rayon r_n de la couche neutre n'est pas connu et ne coïncide pas avec le rayon R de l'axe de la barre.

En établissant la formule pour la détermination des contraintes normales dans une poutre de grande courbure, on part des mêmes hypothèses que pour la formule de Navier, c'est-à-dire on se sert de l'hypothèse des sections planes et de l'hypothèse selon laquelle les fibres longitudinales du matériau n'exercent pas de pression l'une sur l'autre. Choisissons la direction des axes x et y de la section comme le montre la fig. 271 (ce faisant, on fera coïncider l'axe x avec la ligne neutre dont on ignore la position). La direction de l'axe y vers le centre de courbure est considérée comme positive.

Examinons *l'aspect statique du problème* et écrivons la condition d'équilibre du tronçon de la poutre (fig. 272, *a*) qui reste après éloignement des parties sectionnées. Pour notre cas, quand la section subit l'action d'un

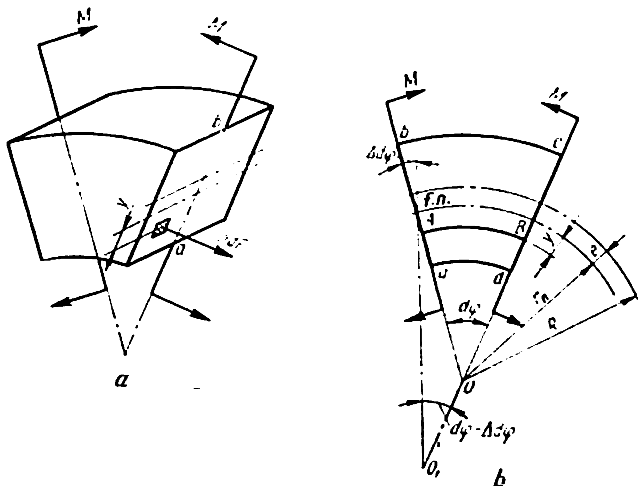


FIG. 272

seul facteur de force M_x nous aurons

$$\int_F \sigma\, dF = 0; \tag{14.1}$$

$$\int_F \sigma y\, dF = M. \tag{14.2}$$

En vertu de la symétrie

$$M_y = \int_F \sigma x\, dF = 0.$$

Examinons *l'aspect géométrique du problème.* L'allongement relatif d'un tronçon élémentaire AB, prélevé arbitrairement à une distance y de la ligne neutre (fig. 272, *b*) et qui après la déformation a connu un allongement de $y\Delta d\varphi$, est égal à:

$$\varepsilon = \frac{y\Delta\, d\varphi}{(r_n - y)\, d\varphi}, \tag{14.3}$$

$(r_n - y)\, d\varphi$ étant la longueur du tronçon avant la déformation.

L'analyse de *l'aspect physique du problème* défini par la loi de Hooke

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{E\,\Delta d\varphi}{d\varphi}\,\frac{y}{r_n - y} \tag{14.4}$$

permet de mettre la condition (14.1) sous la forme suivante

$$\int_F \sigma dF = \frac{E\,\Delta d\varphi}{d\varphi}\int_F \frac{ydF}{r_n - y} = 0.$$

Comme

$$\frac{E\,\Delta d\varphi}{d\varphi} \neq 0,$$

on aura

$$\int_F \frac{y\,dF}{r_n - y} = 0. \tag{14.5}$$

De (14.2) nous aurons

$$\int_F \sigma y\,dF = \frac{E\,\Delta d\varphi}{d\varphi}\int_F \frac{y^2 dF}{r_n - y} = M. \tag{14.6}$$

Etant donné que

$$\int_F \frac{y^2 dF}{r_n - y} = \int_F \frac{y^2 + r_n y - r_n y}{r_n - y}\,dF = -\int_F \left(y - \frac{r_n y}{r_n - y}\right) dF =$$

$$= -\int_F ydF + r_n \int_F \frac{y\,dF}{r_n - y} = -S_x + 0,$$

ou bien

$$\int_F \frac{y^2\,dF}{r_n - y} = -S_x = -(-e)F = eF, \tag{14.7}$$

nous pouvons représenter (14.6) comme suit

$$\frac{E\,\Delta d\varphi}{d\varphi}\,eF = M.$$

D'où

$$\frac{E\,\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{M}{eF}\,, \tag{14.8}$$

e étant la distance de la ligne neutre au centre de gravité; F — l'aire de la section transversale.

Introduisant (14.8) dans (14.4) nous trouverons la formule pour la détermination des contraintes normales en flexion

$$\sigma = \frac{My}{eF(r_n - y)}\,, \tag{14.9}$$

ou

$$\sigma = -\frac{My}{S_x(r_n - y)}\,, \tag{14.10}$$

M étant le moment fléchissant dans la section; S_x — le moment statique de l'aire de la section d'une poutre curviligne par rapport à la ligne neutre.

De l'examen de (14.9) ou (14.10) il découle que les contraintes normales sont distribuées sur la hauteur d'après une loi hyperbolique (fig. 273,*b*).

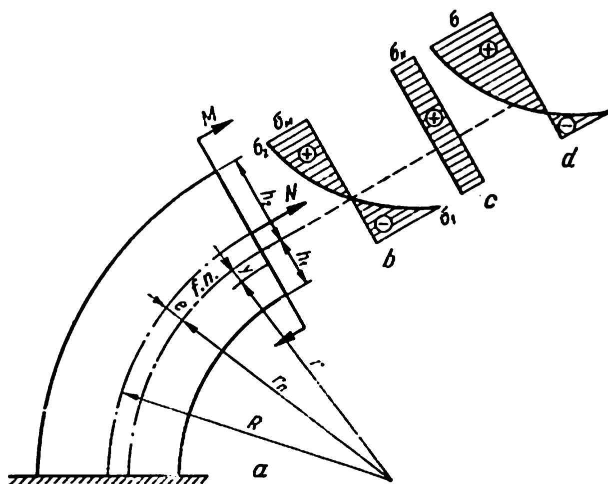


FIG. 273

Les valeurs absolues des contraintes dans les fibres extrêmes d'une section de la poutre s'obtiennent, conformément à (14.9), d'après les formules

$$\sigma_1 = \frac{Mh_1}{FeR_1}\ ;\ \sigma_2 = \frac{Mh_2}{FeR_2}, \qquad (14.11)$$

R_1 et R_2 étant respectivement les rayons de courbure des fibres internes et externes de la poutre curviligne; h_1 et h_2 — les distances de la ligne neutre jusqu'aux dites fibres. Le signe accompagnant la contrainte se détermine en fonction de la direction du moment fléchissant dans la section.

Les formules (14.9)-(14.11) ne peuvent être employées que si l'on connaît la quantité e qui y rentre ou le rayon de la couche neutre r_n puisque

$$e = R - r_n, \qquad (14.12)$$

où R est le rayon de la couche dans laquelle sont situés les centres de gravité des sections de la poutre. Le rayon r_n se détermine de l'équation (14.5).

Effectuant une substitution des variables: $r = r_n - y$ ou $y = r_n - r$, retranscrivons l'équation (14.5) dans la forme suivante:

$$\int_F \frac{y\,dF}{r_n - y} = \int_F \frac{r_n - r}{r}\,dF = 0,$$

ou

$$r_n \int_F \frac{dF}{r} - F = 0.$$

De là, on tire

$$r_n = \frac{F}{\int_F \frac{dF}{r}}. \qquad (14.13)$$

Etant donné que pour une section rectangulaire $F = bh$ (h étant la hauteur de la section, b sa largeur); $dF = b\,dr$, la formule (14.13) peut être recopiée comme suit

$$r_n = \frac{bh}{\int_{R_1}^{R_2} \frac{b\,dr}{r}} = \frac{h}{\ln \frac{R_2}{R_1}} = \frac{h}{2{,}303\ \lg \frac{R_2}{R_1}}. \qquad (14.14)$$

Nous aidant de la série

$$\ln\frac{R_2}{R_1}=\ln\frac{R+\dfrac{h}{2}}{R-\dfrac{h}{2}}=\ln\frac{1+\dfrac{h}{2R}}{1-\dfrac{h}{2R}}=$$

$$=\frac{h}{R}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{h}{2R}\right)^2+\frac{1}{5}\left(\frac{h}{2R}\right)^4+\dots\right],$$

nous aurons

$$e=R-r_n=R-\frac{R}{1+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{h}{2R}\right)^2+\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{h}{2R}\right)^4+\dots}.$$

Dans la première approximation

$$e=R\left(1-\frac{1}{1+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{h}{2R}\right)^2}\right)\approx\frac{h^2}{12R}. \tag{14.15}$$

Dans la seconde approximation

$$e=\frac{h^2}{12R}\left[1+\frac{4}{15}\left(\frac{h}{2R}\right)^2\right]. \tag{14.16}$$

Tenant compte de (14.13) on peut obtenir de façon analogue l'équation de e pour des sections transversales de formes différentes. Le tableau 30 donne les rayons de courbure r_n de la couche neutre pour des sections de différentes formes. Connaissant r_n on peut déterminer de la formule (14.12) les valeurs de e. Le tableau 31 permet de déterminer e pour quelques formes des sections transversales.

§ 82. Calcul de résistance

Pour une barre de faible courbure qui subit l'action d'un moment fléchissant et d'une force normale dans sa section (fig. 273, *a*) la condition de résistance a la forme suivante

$$\sigma_{max}=\frac{M}{W}+\frac{N}{F}\leqslant[\sigma], \tag{14.17}$$

où F est l'aire de la section; W — moment résistant de la section (cf. § 11).

Pour une barre de grande courbure, la condition de résistance sera, en vertu de (14.9),

$$\sigma_{max} = \frac{My}{Fe(r_n - y)} + \frac{N}{F} \leqslant [\sigma]. \qquad (14.18)$$

Dans cette formule il faut considérer les points de la section dans lesquels la somme des contraintes dues à la flexion et à la traction est la plus grande (fig. 273, *b*, *c*, *d*). Pour ces points, il convient de poser dans la formule (14.18) $y = h_1$ ou $y = h_2$ et, respectivement, $r_n - y = R_1$ ou $r_n - y = R_2$.

Si une poutre de grande courbure est fabriquée en un matériau pour lequel les contraintes admissibles en traction $[\sigma_+]$ et en compression $[\sigma_-]$ diffèrent (certaines fontes, matières plastiques, etc.), la condition de résistance doit se réaliser pour les points extrêmes de la section aussi bien dans la zone de traction que dans la zone de compression.

§ 83 Détermination des déplacements

Pour déterminer les déplacements dans les barres de courbure quelconque, il est commode d'utiliser la méthode de Mohr (§ 69).

Dans les barres de faible courbure l'on peut négliger la déformation longitudinale ainsi que la déformation de cisaillement et, dans le cas d'une flexion plane, utiliser la formule de Mohr dans la forme ci-après

$$\Delta_{iP} = \int_s \frac{\overline{M}_i M_P \, ds}{EJ}. \qquad (14.19)$$

Lorsqu'une poutre de grande courbure se trouve en flexion plane, la déformation d'un élément due à l'action des efforts M_P et N_P se compose de l'allongement $\Delta(ds)$ du segment ds de l'axe ainsi que de la rotation relative $d\theta$ des sections délimitant cet élément (fig. 274, *a*, *b*). L'angle de rotation réciproque des sections $\Delta\, d\varphi = d\theta_1$ dû au moment fléchissant peut se déterminer de (14.8) où $eF = |S_x| = S$,

$$d\theta_1 = \frac{M_P d\varphi}{ES} = \frac{M_P ds}{ESR_0}.$$

L'angle de rotation des sections dû aux forces axiales (suite à une longueur différente des fibres (fig. 274, *b*)) est

$$d\theta_2 = \frac{N_P ds}{EFR_0}.$$

L'angle de rotation total

$$d\theta = d\theta_1 + d\theta_2 = \frac{M_P ds}{ESR_0} + \frac{N_P ds}{EFR_0}. \qquad (14.20)$$

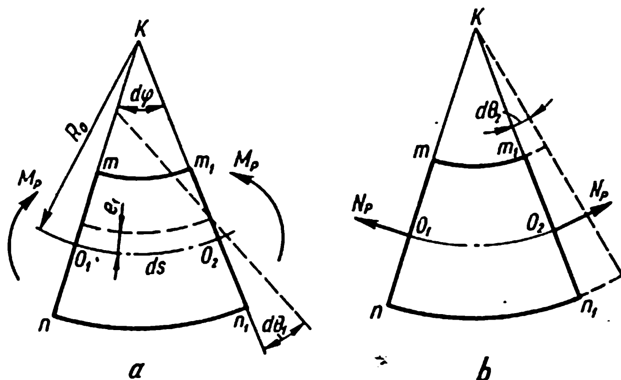


FIG. 274

L'allongement de l'élément dû à l'action des forces axiales

$$\Delta(ds)_1 = \frac{N_P\, ds}{EF}.$$

L'allongement dû à la rotation de la section d'un angle $d\theta_1$

$$\Delta(ds)_2 = e d\theta_1 = \frac{M_P ds}{ESR_0} e = \frac{M_P ds}{EFR_0}.$$

L'allongement total de la fibre axiale

$$\Delta(ds) = \Delta(ds)_1 + \Delta(ds)_2 = \frac{N_P ds}{EF} + \frac{M_P ds}{EFR_0}. \qquad (14.21)$$

Introduisant (14.20) et (14.21) dans la formule des déplacements virtuels, trouvons la formule générale pour la détermination des déplacements d'une poutre de grande courbure

$$\Delta_{iP} = \int_s \left[\frac{\overline{M}_i M_P}{ESR_0} + \frac{\overline{N}_i M_P + \overline{M}_i N_P}{EFR_0} + \frac{\overline{N}_i N_P}{EF} + k\,\frac{\overline{Q}_i Q_P}{GF} \right] ds. \tag{14.22}$$

En pratique, on néglige habituellement l'influence de l'effort tranchant, d'où l'absence du dernier terme dans (14.22).

Les tableaux 32, 33 donnent les expressions servant à déterminer les déplacements de l'extrémité libre d'une barre circulaire cantilever de section transversale constante pour différents schémas de sa sollicitation. Le tableau 34 présente les valeurs des intégrales définies les plus usitées pour la détermination des déplacements dans des barres courbes.

Rayon de courbure de la couche neutre r_n pour des sections de diverses formes

Section (C – centre de gravité)	r_n
Rectangle	$r_n = \dfrac{h}{\ln \dfrac{R_2}{R_1}} = \dfrac{h}{\ln \dfrac{1+\dfrac{h}{2R}}{1-\dfrac{h}{2R}}}$ $\ln \dfrac{R_2}{R_1} = \dfrac{h}{R}\left[1 + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{h}{2R}\right)^2 + \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{h}{2R}\right)^4 + \ldots\right]$
Trapèze	$r_n = \dfrac{h(b_2 + b_1)}{2\left[\dfrac{b_1R_2 - b_2R_1}{h} \ln \dfrac{R_2}{R_1} - (b_1 - b_2)\right]}$
Profilé en T	$r_n = \dfrac{b_2h_2 + b_1h_1}{b_2 \ln \dfrac{R_3}{R_2} + b_1 \ln \dfrac{R_2}{R_1}}$

Section (C – centre de gravité)	r_n
Profilé en T	$$r_n = \frac{b_2h_2 + b_1h_1}{b_2 \ln \frac{R_3}{R_2} + b_1 \ln \frac{R_2}{R_1}}$$
Profilé en I	$$r_n = \frac{b_1h_1 + b_2h_2 + b_3h_3}{b_1 \ln \frac{R_2}{R_1} + b_2 \ln \frac{R_3}{R_2} + b_3 \ln \frac{R_4}{R_3}}$$
Section en forme d'auge	$$r_n = \frac{b_1h_1 + 2b_2h_2}{b_1 \ln \frac{R_2 - h_2}{R_1} + 2b_2 \ln \frac{R_2}{R_2 - h_2}}$$

Section (C – centre de gravité)	r_n
Triangle	$$r_n = \frac{h}{2\left[\frac{R_2}{h}\ln\frac{R_2}{R_1} - 1\right]}$$
Triangle	$$r_n = \frac{h}{2\left[1 - \frac{R_1}{R_2}\ln\frac{R_2}{R_1}\right]}$$
Cercle	$$r_n = \frac{d^2}{4(2R - \sqrt{4R^2 - d^2})}$$

Section (C – centre de gravité)	r_n
Section annulaire	$r_n = \frac{\sqrt{4R^2 - d^2} + \sqrt{4R^2 - D^2}}{4} = \frac{D^2 - d^2}{4(\sqrt{4R^2 - d^2} - \sqrt{4R^2 - D^2})}$
Section ovale	$r_n = \frac{d^2}{4(2R - \sqrt{4R^2 - d^2})}$

Valeur du coefficient k dans la formule $e = kR$

Section	$\frac{R}{a}$	k
Rectangle $a = R - R_1 = \frac{h}{2}$	1,2 1,4 1,6 1,8 2,0 2,2 2,4 2,6 2,8 3,0 3,5 4,0 6,0 8,0 10,0	0,305 0,204 0,149 0,112 0,090 0,077 0,065 0,055 0,047 0,041 0,028 0,021 0,0093 0,0052 0,0033
Profilé en T $b_1 = 4b_2$; $h_1 = 1,5\ b_2$; $h_2 = 4,5b_2$; $a = R - R_1 = 2,04b_2$	1,2 1,4 1,6 1,8 2,0 2,2 2,4 2,6 2,8 3,0 3,5 4,0 6,0 8,0 10,0	0,418 0,299 0,229 0,183 0,149 0,125 0,106 0,091 0,079 0,069 0,052 0,040 0,018 0,010 0,0065

Section	$\frac{R}{a}$	k
Profilé en I		
a) $b_1 = 6b_2$; $b_3 = 4b_2$; $h_1 = 2b_2$; $h_2 = 3b_2$; $h_3 = b_2$; $a = R - R_1 = 2{,}34\ b_2$	1,2	0,409
	1,4	0,292
	1,6	0,224
	1,8	0,178
	2,0	0,144
	2,2	0,120
	2,4	0,103
	2,6	0,089
	2,8	0,077
	3,0	0,067
	3,5	0,049
	4,0	0,038
	6,0	0,018
	8,0	0,010
	10,0	0,0065
b) $b_1 = b_3 = 3b_2$; $h_1 = h_3 = b_2$; $h_2 = 4b_2$; $a = R - R_1 = 3b_2$	1,2	0,408
	1,4	0,285
	1,6	0,208
	1,8	0,160
	2,0	0,127
	2,2	0,104
	2,4	0,088
	2,6	0,077
	2,8	0,067
	3,0	0,058
	3,5	0,041
	4,0	0,030
	6,0	0,013
	8,0	0,0076
	10,0	0,0048

Section	$\frac{R}{a}$	k
c) $b_1 = b_3 = 6b_2$; $h_1 = h_3 = b_2$; $h_2 = 4b_2$ et $a = R - R_1 = 3b_2$	1,2 1,4 1,6 1,8 2,0 2,2 2,4 2,6 2,8 3,0 3,5 4,0 6,0 8,0 10,0	0,453 0,319 0,236 0,183 0,147 0,122 0,104 0,090 0,078 0,067 0,048 0,036 0,016 0,0089 0,0057
Trapèze a) $b_1 = 2b_2$; $h = (1 \div 3)b_2$; $a = R - R_1 = \frac{4}{9} h$	1,2 1,4 1,6 1,8 2,0 2,2 2,4 2,6 2,8 3,0 3,5 4,0 6,0 8,0 10,0	0,336 0,229 0,168 0,128 0,102 0,084 0,071 0,061 0,053 0,046 0,033 0,024 0,011 0,0060 0,0039

Section	$\frac{R}{a}$	k
b) $b_1 = 4b_2$; $h = 5b_2$; $a = R - R_1 = 2b_2 = 0{,}4h$	1,2 1,4 1,6 1,8 2,0 2,2 2,4 2,6 2,8 3,0 3,5 4,0 6,0 8,0 10,0	0,352 0,243 0,179 0,138 0,110 0,092 0,078 0,067 0,058 0,050 0,037 0,028 0,012 0,0060 0,0039
Triangle pour lequel $h = \frac{3}{5} b$ et $a = R - R_1 =$ $= \frac{h}{3} = \frac{b}{5}$	1,2 1,4 1,6 1,8 2,0 2,2 2,4 2,6 2,8 3,0 3,5 4,0 6,0 8,0 10,0	0,361 0,251 0,186 0,144 0,116 0,096 0,082 0,070 0,060 0,052 0,038 0,029 0,013 0,0060 0,0039

Section	$\frac{R}{a}$	k
Cercle	1,2	0,224
	1,4	0,151
	1,6	0,108
	1,8	0,084
	2,0	0,069
	2,2	0,058
	2,4	0,049
	2,6	0,042
	2,8	0,036
	3,0	0,030
	3,5	0,022
	4,0	0,016
	6,0	0,0070
	8,0	0,0039
$a = \frac{d}{2}$	10,0	0,0025
Section annulaire	1,2	0,269
	1,4	0,182
	1,6	0,134
	1,8	0,104
	2,0	0,083
	2,2	0,068
	2,4	0,057
	2,6	0,049
	2,8	0,043
	3,0	0,038
	3,5	0,028
	4,0	0,020
	6,0	0,0087
	8,0	0,0049
$D = 2d$ et $a = \frac{D}{2} = d$	10,0	0,0031

Tableau 32

Déplacements de l'extrémité libre d'une barre circulaire cantilever de section constante et sollicitée en son propre plan (w, v, θ — déplacements vertical, horizontal et angulaire respectivement)

Schéma	w	v	θ
	$\frac{R^2}{EJ}\left[M_0(1-\cos\alpha)+PR\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\sin 2\alpha}{4}\right)-TR\frac{(1-\cos\alpha)^2}{2}\right]$	$\frac{R^2}{EJ}\left[-M_0(\alpha-\sin\alpha)-PR\frac{(1-\cos\alpha)^2}{2}+TR\left(\frac{3}{2}\alpha-2\sin\alpha+\frac{\sin 2\alpha}{4}\right)\right]$	$\frac{R}{EJ}[M_0\alpha+PR(1-\cos\alpha)-TR(\alpha-\sin\alpha)]$
	$\frac{R^2}{EJ}\left[M_0(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)+PR\left(\alpha+\frac{1}{2}\alpha\cos 2\alpha-\frac{3}{4}\sin 2\alpha\right)-TR\times\left(\cos\alpha-\frac{3}{4}\cos 2\alpha-\frac{1}{2}\alpha\sin 2\alpha-\frac{1}{4}\right)\right]$	$\frac{R^2}{EJ}\left[-M_0(\alpha\sin\alpha-1+\cos\alpha)-PR\left(\cos\alpha-\frac{3}{4}\cos 2\alpha-\frac{1}{2}\alpha\sin 2\alpha-\frac{1}{4}\right)+TR\left(\alpha-\frac{1}{2}\alpha\cos 2\alpha+\frac{3}{4}\sin 2\alpha-2\sin\alpha\right)\right]$	$\frac{R}{EJ}[M_0\alpha+PR(\sin\alpha-\alpha\cos\alpha)-TR\times(\alpha\sin\alpha-1+\cos\alpha)]$

Suite

Schéma	w	v	θ
q=const, w, v, α, R	$\frac{qR^4}{EJ}\,\frac{(1-\cos\alpha)^2}{2}$	$-\frac{qR^4}{EJ}\left(\frac{3}{2}\alpha-2\sin\alpha+\frac{\sin 2\alpha}{4}\right)$	$\frac{qR^3}{EJ}(\alpha-\sin\alpha)$
q=const, w, v, α, R	$\frac{qR^4}{EJ}\left(\frac{\alpha}{2}+\alpha\cos\alpha-\sin\alpha-\frac{\sin 2\alpha}{4}\right)$	$\frac{qR^4}{EJ}\left(\frac{\alpha^2}{2}-\alpha\sin\alpha+\frac{\sin^2\alpha}{2}\right)$	$\frac{qR^3}{EJ}\left(1-\cos\alpha-\frac{\alpha^2}{2}\right)$

Suite

Schéma	w	v	θ
	$\frac{mR^3}{EJ}(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)$	$\frac{mR^3}{EJ}(1 - \cos\alpha - \alpha\sin\alpha)$	$\frac{mR^2}{EJ} \cdot \frac{\alpha^2}{2}$

Tableau 33

Déplacements de l'extrémité libre d'une barre circulaire cantilever de section constante et sollicitée dans un plan perpendiculaire (λ — rapport des rigidités de la section : EJ en flexion et GJ_t en torsion)

Schéma	Déplacement perpendiculaire au plan wv	Angle de rotation autour de l'axe v	Angle de rotation autour de l'axe w
w, P, v, α, R	$\frac{PR^3}{EJ}\left(\frac{1+3\lambda}{2}\alpha + \frac{\lambda-1}{4}\sin 2\alpha - 2\lambda \sin\alpha\right)$	$\frac{PR^2}{EJ}\left(\frac{\lambda-1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1+\lambda}{2}\alpha - \lambda\sin\alpha\right)$	$\frac{PR^2}{EJ}\left[\frac{\lambda-1}{2}\sin^2\alpha + \lambda(1-\cos\alpha)\right]$
w, M_0, α, R	$\frac{M_0R^2}{EJ}\left(\frac{\lambda-1}{4}\sin 2\alpha + \frac{1+\lambda}{2}\alpha - \lambda\sin\alpha\right)$	$\frac{M_0R}{EJ}\left(\frac{1+\lambda}{2}\alpha + \frac{\lambda-1}{2}\sin 2\alpha\right)$	$\frac{M_0R}{EJ}\cdot\frac{\lambda-1}{2}\sin^2\alpha$

Schéma	Déplacement perpendiculaire au plan wv	Angle de rotation autour de l'axe v	Angle de rotation autour de l'axe w
w, M_0, v, α, R	$\frac{M_0R^2}{EJ}\left[\frac{\lambda-1}{2}\sin^2\alpha + \lambda(1-\cos\alpha)\right]$	$\frac{M_0R}{EJ}\cdot\frac{\lambda-1}{2}\sin^2\alpha$	$\frac{M_0R}{EJ}\left(\frac{1+\lambda}{2}\alpha - \frac{\lambda-1}{4}\sin 2\alpha\right)$
w, $q=const$, v, α, R	$\frac{qR^4}{EJ}[(1-\cos\alpha)^2 + \lambda(\alpha-\sin\alpha)^2]$	$\frac{qR^3}{EJ}\left[(\lambda+1)(1-\cos\alpha) - \frac{\lambda-1}{4}(1-\cos 2\alpha) - \lambda\alpha\sin\alpha\right]$	$\frac{qR^3}{EJ}\left[(\lambda+1)\left(\sin\alpha - \frac{\alpha}{2}\right) + \frac{\lambda-1}{4}\sin 2\alpha - \lambda\alpha\cos\alpha\right]$

Valeurs des intégrales définies les plus usitées pour la détermination des déplacements dans des barres courbes

Intégrale	Limites d'intégration			
	de 0 à α	de 0 à $\frac{\pi}{4}$	de 0 à $\frac{\pi}{2}$	de 0 à π
$\int \sin\varphi \, d\varphi$	$1 - \cos\alpha$	0,293	1	2
$\int \cos\varphi \, d\varphi$	$\sin\alpha$	0,707	1	0
$\int \sin^2\varphi \, d\varphi$	$-\frac{1}{4}\sin 2\alpha + \frac{\alpha}{2}$	0,143	0,785	1,571
$\int \cos^2\varphi \, d\varphi$	$\frac{1}{4}\sin 2\alpha + \frac{\alpha}{2}$	0,643	0,785	1,571
$\int \sin^2\varphi\cos\varphi \, d\varphi$	$\frac{\sin^3\alpha}{3}$	0,118	0,333	0
$\int \cos^2\varphi\sin\varphi \, d\varphi$	$\frac{1-\cos^3\alpha}{3}$	0,216	0,333	0,667
$\int \sin 2\varphi \, d\varphi$	$\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\alpha}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0
$\int \cos 2\varphi \, d\varphi$	$\frac{1}{2}\sin 2\alpha$	$\frac{1}{2}$	0	0
$\int \sin\varphi\cos\varphi \, d\varphi$	$\frac{\sin^2\alpha}{2}$	0,25	0,5	0
$\int \varphi\sin\varphi \, d\varphi$	$\sin\alpha - \alpha\cos\alpha$	0,152	1	3,141
$\int \varphi\cos\varphi \, d\varphi$	$\cos\alpha + \alpha\sin\alpha - 1$	0,262	0,571	−2
$\int \varphi\sin^2\varphi \, d\varphi$	$\frac{1}{4}(\alpha^2 - \alpha\sin 2\alpha) - \frac{1}{8}(\cos 2\alpha - 1)$	0,0833	0,868	2,47

Suite

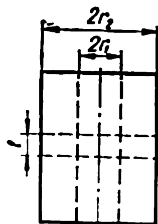
Intégrale	Limites d'intégration			
	de 0 à α	de 0 à $\frac{\pi}{4}$	de 0 à $\frac{\pi}{2}$	de 0 à π
$\int \varphi\cos^2\varphi\, d\varphi$	$\frac{1}{4}(\alpha^2 + \alpha\sin 2\alpha) + \frac{1}{8}(\cos 2\alpha - 1)$	0,226	0,368	2,47
$\int \varphi\sin 2\varphi\, d\varphi$	$\frac{\sin 2\alpha}{4} - \frac{\alpha\cos 2\alpha}{2}$	0,25	0,785	− 1,57
$\int \varphi\cos 2\varphi\, d\varphi$	$\frac{1}{4}(\cos 2\alpha - 1) + \frac{\alpha\sin 2\alpha}{2}$	0,143	−0,5	0
$\int \sin(\alpha - \varphi)\sin\varphi\, d\varphi$	$\frac{\sin\alpha}{2} - \frac{\alpha\cos\alpha}{2}$	0,076	0,5	1,571
$\int \cos(\alpha - \varphi)\sin\varphi\, d\varphi$	$\frac{\alpha\sin\alpha}{2}$	0,278	0,785	0

CHAPITRE 15

Calcul des cylindres à parois épaisses et des disques tournants

§ 84. Cylindre à parois épaisses soumis à une pression interne et externe

Un cylindre est dit à parois épaisses si l'épaisseur de sa paroi est plus grande que le dixième de son rayon moyen. Examinons un cylindre à parois épaisses se trouvant sous l'action d'une pression interne (p_1) et d'une pression externe (p_2) (fig. 275); r_1 et r_2 sont respectivement les rayons interne et externe du cylindre. Suite à la symétrie axiale du cylindre ainsi que des sollicitations, les contraintes et déformations dans celui-ci seront également symétriques par rapport à son axe.



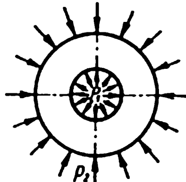


FIG. 2:6

A l'aide de deux sections pratiquées perpendiculairement à l'axe du cylindre délimitons un anneau de longueur unitaire (fig. 275). Découpons de cet anneau un élément *abdc* (fig. 276, *a*) à l'aide de deux plans coupant l'axe du cylindre et formant entre eux un angle égal à $d\theta$, ainsi que de deux surfaces cylindriques de rayons r et $r + dr$ (fig. 276, *b*). Sur les arêtes de cet élément vont agir les contraintes radiales σ_r et tangentielles σ_θ qui remplacent l'influence de la partie éloignée du cylindre et qui satisfont aux conditions d'équilibre de l'élément. Il est évident que σ_θ et σ_r seront des contraintes principales.

Commençons la détermination de $\sigma_r = f(p_1, p_2, r)$ et de $\sigma_\theta = f_1(p_1, p_2, r)$ par l'analyse de l'*aspect statique du problème*; établissons les équations de la statique eu égard au système des coordonnées adopté (fig. 276, *c*):

$$\sum X = 0; \quad \sum Y = 0.$$

A cause de la symétrie de l'élément, la deuxième condition se réalise automatiquement tandis que la première, après l'introduction des expressions pour les efforts, prendra la forme suivante

$$\sum X = -\sigma_r r d\theta + (\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)\, d\theta -$$

$$-2\left(\sigma_\theta\, dr \sin\frac{d\theta}{2}\right) = 0.$$

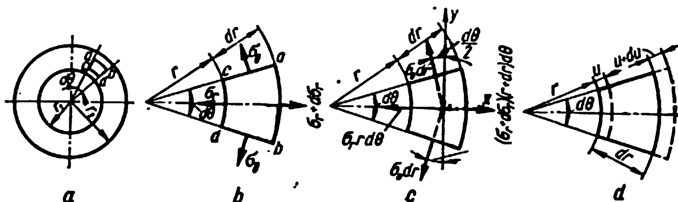


FIG. 276

Posant $\sin\frac{d\theta}{2} = \frac{d\theta}{2}$ et rejetant les grandeurs du deuxième ordre de petitesse, nous aurons

$$r\frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta = 0. \tag{15.1}$$

Cette équation contient deux inconnues: les contraintes σ_θ et σ_r. Pour la détermination de ces dernières il faut considérer les *aspects géométrique et physique du problème*, ce qui permettra de présenter l'équation (15.1) par l'intermédiaire des déplacements.

Désignons par u le déplacement radial d'une surface cylindrique de rayon r (fig. 276, *d*); le déplacement d'une surface cylindrique de rayon $r + dr$ sera alors $u + du$. L'allongement relatif d'un élément de longueur dr se traduira par la formule

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}. \tag{15.2}$$

L'allongement relatif dans la direction tangentielle sera égal à

$$\varepsilon_\theta = \frac{(r+u)\,d\theta - r\,d\theta}{r\,d\theta} = \frac{u}{r}. \tag{15.3}$$

Considérant l'*aspect physique du problème*, écrivons dans la formes ci-dessous les dépendances entre les contraintes et les déformations en

accord avec la loi de Hooke généralisée pour le cas d'état de contrainte plan:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta);$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_r).$$

Compte tenu de (15.2) et (15.3) nous aurons

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{du}{dr} + \mu\frac{u}{r}\right); \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{u}{r} + \mu\frac{du}{dr}\right). \end{aligned}\right\} \tag{15.4}$$

Introduisant (15.4) dans (15.1), nous obtiendrons une équation différentielle explicitée à travers les déplacements

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0. \tag{15.5}$$

En mettant cette équation sous la forme

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{d(ur)}{dr}\right] = 0,$$

nous trouverons, après l'avoir intégrée deux fois, la solution générale suivante:

$$u = C_1 r + C_2\frac{1}{r}, \tag{15.6}$$

où C_1 et C_2 sont les constantes d'intégration qu'on détermine à partir des conditions limites. Dans notre cas, ces conditions sont $(\sigma_r)_{r=r_1} = -p_1$ t $(\sigma_r)_{r=r_2} = -p_2$.

Introduisant (15.6) dans (15.4), nous aurons

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}\left[(1+\mu)C_1 - \frac{1-\mu}{r_2}C_2\right]; \tag{15.7}$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2}\left[(1+\mu)C_1 + \frac{1-\mu}{r^2}C_2\right]. \tag{15.8}$$

Introduisant les conditions limites dans (15.7), nous obtiendrons

$$-p_1 = \frac{E}{1-\mu^2}\left[(1+\mu)C_1 - \frac{1-\mu}{r_1^2}C_2\right];$$

$$-p_2 = \frac{E}{1-\mu^2}\left[(1+\mu)C_1 - \frac{1-\mu}{r_2^2}C_2\right].$$

En résolvant ensemble ces équations, on obtient

$$C_1 = \frac{1-\mu}{E}\cdot\frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2};$$

$$C_2 = \frac{1+\mu}{E}\cdot\frac{r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2}.$$

En mettant les valeurs des constantes C_1 et C_2 dans (15.6)-(15.8), nous obtiendrons les formules définitives permettant de déterminer le déplacement radial u et les contraintes *(formules de Lamé)*:

$$u = \frac{1-\mu}{E}\cdot\frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} r + \frac{1+\mu}{E} \times$$

$$\times \frac{r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2}\cdot\frac{1}{r}; \qquad (15.9)$$

$$\sigma_r = \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2}\cdot\frac{1}{r^2}; \qquad (15.10)$$

$$\sigma_\theta = \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2}\cdot\frac{1}{r^2}. \qquad (15.11)$$

Additionnant (15.10) et (15.11), on constate que

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \text{const},$$

par conséquent,

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_r + \sigma_\theta) = \text{const},$$

autrement dit, en déformation les sections transversales du cylindre restent planes. Les formules (15.9)-(15.11) sont valables pour un cylindre de longueur infinie et ne peuvent s'employer que pour les sections suffisamment éloignées des fonds, si évidemment le cylindre en est doté.

Quand on se trouve en présence de charges axiales N agissant sur le cylindre, et si, en particulier, le cylindre est doté de fonds, les contraintes axiales apparaissent dans ses parois:

$$\sigma_z = \frac{N}{F} = \frac{N}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} \cdot \qquad (15.12)$$

Dans (15.9) apparaît alors le terme

$$\Delta u = -\mu \frac{\sigma_z}{E} r, \qquad (15.13)$$

alors que les contraintes σ_r et σ_θ restent inchangées.

Dans un cas particulier lorsque la *pression extérieure ne se manifeste pas* ($p_2 = 0, p_1 = p$), les formules permettant de déterminer les contraintes et les déplacements dans un cylindre à parois épaisses peuvent s'écrire sous la forme suivante

$$\sigma_r = \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 - \frac{r_2^2}{r^2}\right)p; \qquad (15.14)$$

$$\sigma_\theta = \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(+ \frac{r_2^2}{r^2}\right)p; \qquad (15.15)$$

$$u = \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{r_1^2 p}{r_2^2 - r_1^2} r + \frac{1+\mu}{E} \times$$

$$\times \frac{r_1^2 r_2^2 p}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r} \cdot \qquad (15.16)$$

En même temps

$$\left.\begin{aligned} (\sigma_r)_{max} &= (\sigma_r)_{r=r_1} = -p; \\ (\sigma_\theta)_{max} &= (\sigma_\theta)_{r=r_1} = \frac{1+k^2}{1-k^2} p, \end{aligned}\right\} \qquad (15.17)$$

avec

$$k = \frac{r_1}{r_2}.$$

Le déplacement radial de la surface interne, c'est-à-dire l'accroissement du rayon interne, est égal à

$$(u)_{r=r_1} = \frac{r_1}{E}\left(\frac{1+k^2}{1-k^2} + \mu\right)p. \qquad (15.18)$$

Pour la surface externe du cylindre nous aurons:

$$(\sigma_r)_{r=r_2} = 0;$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_2} = \frac{2k^2}{1-k^2}p; \qquad (15.19)$$

$$(u)_{r=r_2} = \frac{r_2}{E}\cdot\frac{2k^2}{1-k^2}\cdot p. \qquad (15.20)$$

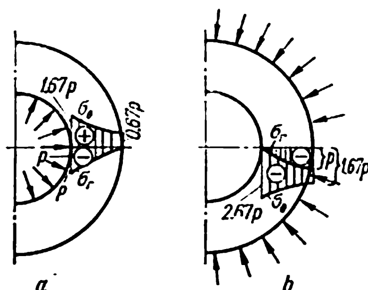


FIG. 277

La fig. 277, *a* montre les diagrammes des contraintes pour le cas étudié avec $k = \frac{r_1}{r_2} = 0{,}5$. Le long du rayon les contraintes varient selon une fonction hyperbolique. Les points dangereux (les points correspondant aux contraintes maximales) sont situés sur la surface externe du cylindre, lorsque $r = r_1$.

De l'analyse de (15.17), il vient que pour $r_2 \to \infty$ et $k \to 0$

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = -p; \quad (\sigma_\theta)_{r=r_1} = p.$$

En nous servant, par exemple, de la troisième théorie de résistance, nous aurons

$$\sigma_{\text{éqIII}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leqslant [\sigma]. \tag{15.21}$$

Dans le cas limite étudié ($k \to 0$)

$$\sigma_1 = (\sigma_\theta)_{r=r_1} = p; \quad \sigma_3 = (\sigma_r)_{r=r_1} = -p$$

la condition de résistance (15.21) prendra la forme suivante

$$2p \leqslant [\sigma],$$

d'où

$$p \leqslant \frac{[\sigma]}{2}.$$

Ainsi, un cylindre doté d'une paroi assez épaisse n'admet pas une pression intérieure plus grande qu'une valeur déterminée, autrement dit, l'augmentation de l'épaisseur de la paroi d'un cylindre est loin d'être toujours une mesure efficace d'augmentation de sa résistance.

Etudions un autre cas particulier lorsque la *pression intérieure ne se manifeste pas* ($p_1 = 0$, $p_2 = p$). Les formules (15.9)-(15.11) prendront la forme suivante

$$u = -\frac{1-\mu}{E}\frac{r_2^2 p}{r_2^2 - r_1^2} r - \frac{1+\mu}{E}\frac{r_1^2 r_2^2 p}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r}; \tag{15.22}$$

$$\sigma_r = -\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right)p; \tag{15.23}$$

$$\sigma_\theta = -\frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right)p. \tag{15.24}$$

Comme il ressort de (15.23) et (15.24), les deux contraintes sont, dans ce cas, les contraintes de compression, et $|\sigma_\theta| > |\sigma_r|$. Sur la surface interne

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = 0; \tag{15.25}$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_1} = -\frac{2}{1-k^2}p; \tag{15.26}$$

$$(u)_{r=r_1} = -\frac{r_1}{E} \cdot \frac{2}{1-k^2}p. \tag{15.27}$$

Sur la surface externe du cylindre

$$(\sigma_r)_{r=r_2} = -p;$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_2} = -\frac{1+k^2}{1-k^2}p; \tag{15.28}$$

$$(u)_{r=r_2} = -\frac{r_2}{E}\left(\frac{1+k^2}{1-k^2} - \mu\right)p. \tag{15.29}$$

La fig. 277, *b* montre les diagrammes des contraintes σ_r et σ_θ pour $k = \frac{r_1}{r_2} = 0{,}5$. La contrainte maximale en valeur absolue σ_θ se retrouve sur la surface interne du cylindre; ces points présentent également du danger. Posant dans la formule (15.22) $r_1 = 0$ et $r = r_2$, nous obtiendrons la valeur du déplacement de la surface externe pour un cylindre plein:

$$(u)_{r=r_2} = -\frac{pr_2}{E}(1-\mu). \tag{15.30}$$

On trouvera au tableau 35 les formules permettant de calculer les cylindres à parois épaisses pour différents schémas de leur sollicitation.

§ 85. Calcul des cylindres compound

Dans le but d'atteindre une distribution plus régulière des contraintes sur l'épaisseur de la paroi ainsi qu'un déchargement des couches internes par une meilleure mise à profit des couches externes, on fabrique des cylindres compound par voie de revêtement avec serrage d'un cylindre dans l'autre (d'ordinaire à l'aide d'un ajustement bloqué par dilatation). La valeur de la pression interne admissible de tels cylindres peut être sensiblement plus élevée que celle des cylindres fabriqués en une pièce. C'est pour cette raison que ce procédé est utilisé dans la fabrication des canons et pièces d'artillerie.

Lors du revêtement avec serrage d'un cylindre dans l'autre, les contraintes tangentielles deviennent des contraintes de compression dans le cylindre interne et des contraintes de traction dans le cylindre externe. La fig. 278, *a* montre le diagramme des contraintes qui apparaissent après le revêtement.

Quand un cylindre compound se trouve sous l'action d'une pression interne, on y voit apparaître des contraintes que l'on détermine, tout comme pour un cylindre fait en une seule pièce, d'après les formules (15.14) et (15.15) et dont les diagrammes sont représentés sur la fig. 278, *b*.

Additionnant les diagrammes des contraintes représentés sur les fig. 278, *a* et 278, *b* nous obtiendrons le diagramme réel (fig. 278, *c*) qui a lieu dans un cylindre compound soumis à une pression intérieure.

On voit de ce diagramme résultant que les contraintes fatiguant la paroi d'un cylindre compound sont distribuées de façon plus régulière

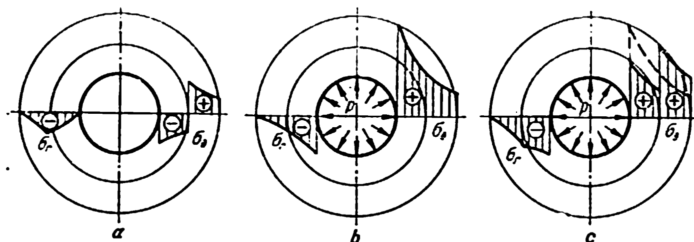


FIG. 278

que dans un cylindre fait en une pièce (le diagramme montré en pointillé); aussi, les cylindres compound se distinguent-ils par une exploitation du matériau plus rationnelle que dans des cylindres non composés.

Quand on calcule les cylindres compound, l'étape essentielle consiste dans la détermination de la valeur de la pression p_c que supporte la surface de contact pour un serrage donné δ représentant la différence entre le diamètre extérieur du cylindre interne I et le diamètre intérieur du cylindre externe II (fig. 279). Il est évident que la diminution du rayon extérieur du cylindre interne u_I et l'accroissement du rayon intérieur du cylindre externe u_{II} font la moitié du serrage

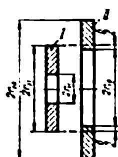


FIG. 279

$$|u_I| + |u_{II}| = \frac{\delta}{2}. \qquad (15.31)$$

Tenant compte de ce que δ est trop petit par comparaison avec le rayon de la surface de contact, on peut poser $r_{2I} = r_{1II} = r_c$ (r_c est le rayon de la surface de contact du cylindre compound).

La pression de contact p_c sera une pression extérieure pour le cylindre interne et une pression intérieure pour le cylindre externe.

Introduisons la désignation

$$k_1 = \frac{r_1}{r_c}\ ; \quad k_2 = \frac{r_c}{r_2}.$$

Le déplacement radial de la surface de contact du cylindre interne s'obtient de la formule (15.29):

$$u_{\mathrm{I}} = -\frac{r_c}{E_1}\left(\frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} - \mu_1\right)p_c, \tag{15.32}$$

celui du cylindre externe, de la formule (15.18):

$$u_{\mathrm{II}} = \frac{r_c}{E_2}\left(\frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} + \mu_2\right)p_c. \tag{15.33}$$

Mettant les valeurs absolues de ces déplacements dans (15.31), nous aurons

$$\frac{r_c}{E_1}\left(\frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} - \mu_1\right)p_c + \frac{r_c}{E_2}\left(\frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} + \mu_2\right)p_c = \frac{\delta}{2},$$

d'où, en résolvant l'équation par rapport à p_c, nous trouverons

$$p_c = \frac{\dfrac{\delta}{2}}{\dfrac{r_c}{E_1}\left(\dfrac{1+k_1^2}{1-k_1^2} - \mu_1\right) + \dfrac{r_c}{E_2}\left(\dfrac{1+k_2^2}{1-k_2^2} + \mu_2\right)}. \tag{15.34}$$

Si les constituants d'un cylindre compound sont fabriqués en un même matériau, la formule se simplifie pour prendre la forme suivante:

$$p_c = \frac{\delta E}{2r_c}\cdot\frac{(1-k_1^2)(1-k_2^2)}{(1+k_1^2)(1-k_2^2)+(1+k_2^2)(1-k_1^2)}. \tag{15.35}$$

C'est à partir de la valeur de p_c ainsi obtenue $p_c = f(\delta)$ qu'on détermine les contraintes initiales dans le cylindre interne (formules (15.23), (15.24)) et dans le cylindre externe (formules (15.14), (15.15)). Les formules (15.34) et (15.35) ne sont valables que si les contraintes ne dépassent pas

la limite de proportionnalité. Si des déformations plastiques apparaissent lors du frettage, les efforts réels p_c seront inférieurs à ceux que donnent les calculs.

§ 86. Contraintes thermiques dans des cylindres à parois épaisses

Dans le cas d'un échauffement inégal des cylindres à parois épaisses, on y voit apparaître des contraintes thermiques. Pour le calcul de ces dernières, l'équation d'équilibre (15.1) et les relations géométriques (15.2) et (15.3) obtenues antérieurement restent valables, seules les relations physiques seront quelque peu modifiées.

Désignons par $t(r)$ l'augmentation de la température qui est fonction du rayon courant r et par α le coefficient de dilatation linéaire. Adoptant E et μ pour les valeurs du module d'élasticité et du coefficient de Poisson correspondant à la température moyenne de la paroi, nous pouvons écrire la loi de Hooke généralisée dans la forme suivante

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_z &= \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu\sigma_r - \mu\sigma_\theta) + \alpha t(r) = \text{const}; \\ \varepsilon_r &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_z - \mu\sigma_\theta) + \alpha t(r); \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \mu\sigma_z - \mu\sigma_r) + \alpha t(r). \end{aligned}\right\} \tag{15.36}$$

Résolvant ces équations par rapport aux contraintes, nous aurons

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}[(1-\mu)\varepsilon_z + \mu\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta - (1+\mu)\alpha t(r)]; \tag{15.37}$$

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}[(1-\mu)\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_z - (1+\mu)\alpha t(r)]; \tag{15.38}$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}[(1-\mu)\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_r + \mu\varepsilon_z - (1+\mu)\alpha t(r)]. \tag{15.39}$$

Vu que

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad \text{et} \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \tag{15.40}$$

et après avoir introduit dans l'équation (15.1) les expressions (15.38) et (15.39), on obtient

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha \frac{dt(r)}{dr}. \tag{15.41}$$

Connaissant la loi de variation de la température $t = f(r)$, on peut déterminer le déplacement à partir de l'équation (15.41).

Mettant (15.41) dans la forme suivante

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d(ur)}{dr}\right] = \frac{1+\mu}{1-\mu} \alpha \frac{dt(r)}{dr},$$

et intégrant deux fois cette équation, nous obtiendrons

$$u = \frac{1}{r} \cdot \frac{1+\mu}{1-\mu} \int_{r_1}^{r} \alpha t(r)\, r\, dr + C_1 r + \frac{C_2}{r}. \tag{15.42}$$

Les constantes d'intégration C_1 et C_2 s'obtiennent des conditions qui caractérisent σ_r sur les faces interne et externe du cylindre

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = 0; \quad (\sigma_r)_{r=r_2} = 0. \tag{15.43}$$

Introduisant (15.40) et (15.42) dans (15.38), nous aurons

$$\sigma_r = \frac{E}{1+\mu}\left[-\frac{1+\mu}{1-\mu} \cdot \frac{1}{r^2} \int_{r_1}^{r} \alpha t(r) r\, dr + \right.$$

$$\left. + \frac{C_1}{1-2\mu} - \frac{C_2}{r^2} + \frac{\mu}{1-2\mu} \varepsilon_z \right].$$

Après avoir mis cette expression dans (15.43) et résolu par rapport aux constantes d'intégration le système de deux équations ainsi obtenu, nous aurons

$$C_1 = \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{1-\mu} \cdot \frac{1}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} \alpha t(r)\, r\, dr - \mu\varepsilon_z;$$

$$C_2 = \frac{1+\mu}{1-\mu} \cdot \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} \alpha t(r)\, r\, dr.$$

En mettant (15.40) dans (15.37)-(15.39), compte tenu de (15.42) et des valeurs trouvées de C_1 et de C_2, nous obtiendrons

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu}\left[-\frac{1}{r^2}\int_{r_1}^{r} \alpha t(r)\, r\, dr + \frac{r^2 - r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2) r^2}\int_{r_1}^{r_2} \alpha t(r)\, r\, dr\right]; \tag{15.44}$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu}\left[\frac{1}{r^2}\int_{r_1}^{r} \alpha t(r)\, r\, dr + \frac{r^2 + r_1^2}{(r_2^2 - r_1^2) r^2}\int_{r_1}^{r_2} \alpha t(r)\, r\, dr - \alpha t(r)\right]; \tag{15.45}$$

$$\sigma_z = \frac{E}{1-\mu}\left[\frac{2\mu}{r_2^2 - r_1^2}\int_{r_1}^{r_2} \alpha t(r)\, r\, dr + (1-\mu)\,\varepsilon_z - \alpha t(r)\right]. \tag{15.46}$$

La grandeur inconnue ε_z qui entre dans la dernière formule peut être déterminée, dans le cas d'une dilatation non gênée du cylindre, de la condition exprimant l'absence de l'effort longitudinal dans la section transversale du cylindre:

$$N = \int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} \sigma_z r\, dr\, d\varphi = 0 \tag{15.47}$$

$$\int_{r_1}^{r_2} \sigma_z \, r \, dr = 0.$$

Plaçant dans cette dernière égalité l'expression pour σ_z (15.46), trouvons

$$\varepsilon_z = \frac{2}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} \alpha t(r) \, r \, dr.$$

Compte tenu de l'expression de ε_z qui vient d'être obtenue, la formule (15.46) prendra la forme suivante:

$$\sigma_z = \frac{E}{1-\mu} \left(\frac{2}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} \alpha t(r) \, r \, dr - \alpha t(r) \right). \qquad (15.48)$$

Si l'on connaît la loi de variation de la température $t(r)$ sur l'épaisseur de la paroi, on peut calculer l'intégrale $\int_{r_1}^{r_2} \alpha t(r) \, r \, dr$ et déterminer les contraintes.

Si *la variation de la température obéit à une loi linéaire,*

$$t(r) = T \frac{r_2 - r}{r_2 - r_1}, \qquad (15.49)$$

avec $T = t_1 - t_2$; t_1 et t_2, températures sur les faces interne et externe du cylindre respectivement.

Plaçant (15.49) dans (15.44), (15.45) et (15.48), nous aurons après intégration

$$\sigma_r = \frac{E\alpha T}{3(1-\mu)(r_2 - r_1)} \left[r - \frac{r_1^3}{r^2} - \left(1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right) \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2} \right]; \qquad (15.50)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E\alpha T}{3(1-\mu)(r_2 - r_1)} \left[2r + \frac{r_1^3}{r^2} - \left(1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right) \frac{r_2^3 - r_1^3}{r_2^2 - r_1^2} \right]; \qquad (15.51)$$

$$\sigma_z = \frac{E\alpha T}{3(1-\mu)(r_2 - r_1)} \left[3r - \frac{2(r_2^3 - r_1^3)}{r_2^2 - r_1^2} \right]. \qquad (15.52)$$

Sur la face interne du cylindre, lorsque $r = r_1$, les contraintes seront

$$\left.\begin{aligned}&(\sigma_r)_{r=r_1} = 0;\\&(\sigma_\theta)_{r=r_1} = (\sigma_z)_{r=r_1} = \frac{E\alpha T}{3(1-\mu)(r_2-r_1)}\times\\&\times\left[3r_1 - \frac{2(r_2^3-r_1^3)}{r_2^2-r_1^2}\right].\end{aligned}\right\} \quad (15.53)$$

Sur la face externe, lorsque $r = r_2$,

$$\left.\begin{aligned}&(\sigma_r)_{r=r_2} = 0;\\&(\sigma_\theta)_{r=r_2} = (\sigma_z)_{r=r_2} =\\&= \frac{E\alpha T}{3(1-\mu)(r_2-r_1)}\left[3r_2 - \frac{2(r_2^3-r_1^3)}{r_2^2-r_1^2}\right].\end{aligned}\right\} \quad (15.54)$$

La fig. 280, *a* montre les diagrammes de distribution des contraintes thermiques sur l'épaisseur de la paroi du cylindre caractérisé par la relation $k = \frac{r_1}{r_2} = 0{,}5$ pour $\mu = 0{,}3$.

Dans le cas où la *variation de la température* sur l'épaisseur de la paroi d'un cylindre à parois épaisses *obéit à une loi logarithmique*

$$t(r) = \frac{T}{\ln\frac{r_2}{r_1}}\ln\frac{r_2}{r}. \quad (15.55)$$

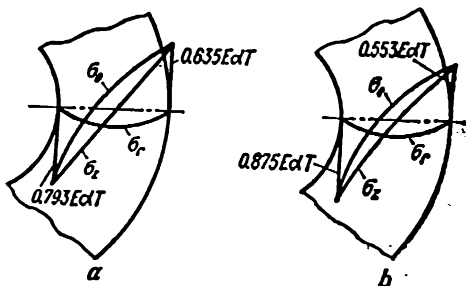


FIG. 280

Après introduction de (15.55) dans (15.44), (15.45), (15.48) et intégration, les formules permettant de déterminer les contraintes σ_r, σ_θ et σ_z seront respectivement de la forme suivante:

$$\sigma_r = -\frac{E\alpha T}{2(1-\mu)\ln\frac{r_2}{r_1}}\left[\ln\frac{r_2}{r} + \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 - \frac{r_2^2}{r^2}\right)\ln\frac{r_2}{r_1}\right]; \tag{15.56}$$

$$\sigma_\theta = \frac{E\alpha T}{2(1-\mu)\ln\frac{r_2}{r_1}}\left[1 - \ln\frac{r_2}{r} - \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 - \frac{r_2^2}{r^2}\right)\ln\frac{r_2}{r_1}\right]; \tag{15.57}$$

$$\sigma_z = \frac{E\alpha T}{2(1-\mu)\ln\frac{r_2}{r_1}}\left[1 - 2\ln\frac{r_2}{r} - \frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\ln\frac{r_2}{r_1}\right]. \tag{15.58}$$

Sur la face interne du cylindre, quand $r = r_1$, les contraintes seront

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = 0;$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_1} = (\sigma_z)_{r=r_1} = \frac{E\alpha T}{2(1-\mu)\ln\frac{r_2}{r_1}}\left[1 - \frac{2r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\ln\frac{r_2}{r_1}\right]. \tag{15.59}$$

Sur la face externe, quand $r = r_2$,

$$(\sigma_r)_{r=r_2} = 0;$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_2} = (\sigma_z)_{r=r_2} = \frac{E\alpha T}{2(1-\mu)\ln\frac{r_2}{r_1}}\left[1 - \frac{2r_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\ln\frac{r_2}{r_1}\right]. \tag{15.60}$$

Pour le cas où la température varie suivant une fonction logarithmique, les diagrammes de répartition des contraintes thermiques sur l'épaisseur de la paroi d'un cylindre ayant la relation $k = \frac{r_1}{r_2} = 0,5$ quand $\mu = 0,3$ prennent la forme de la fig. 280, *b*.

Au voisinage des bouts du cylindre les contraintes déterminées à l'aide des formules données plus haut ne peuvent avoir lieu que si les bouts sont sollicités par une charge superficielle variant suivant la formule exprimant σ_z.

§ 87. Calcul des disques tournants

Les disques tournants sont habituellement soumis à la traction sous l'action des forces centrifuges qui en constituent la sollicitation principale ainsi qu'à la flexion. Un échauffement inégal peut y provoquer des contraintes thermiques. D'ordinaire, la sollicitation et le champ des contraintes thermiques sont symétriques par rapport à l'axe du disque et, de ce fait, les contraintes sont fonction de la distance de l'axe de rotation.

Examinant un disque plan mince d'épaisseur constante h, on peut supposer que les contraintes sont réparties sur son épaisseur de façon uniforme, alors que les contraintes parallèles à l'axe du disque ne se manifestent pas ($\sigma_z = 0$). De cette façon, le problème de détermination des contraintes dans un disque se ramène à un problème dit problème plan de la théorie d'élasticité: le problème de l'état de contrainte plan.

Si un disque dont la masse spécifique est $\frac{\gamma}{g}$ tourne avec une vitesse angulaire ω, les forces massiques agissant sur un élément prélevé du disque (fig. 281, *a*) peuvent être représentées par une résultante (fig. 281, *b*) se trouvant dans le plan médian de l'élément et égale à

$$dm\,\omega^2 r = \frac{\gamma}{g}\,hr\,d\theta\,dr\cdot\omega^2 r.$$

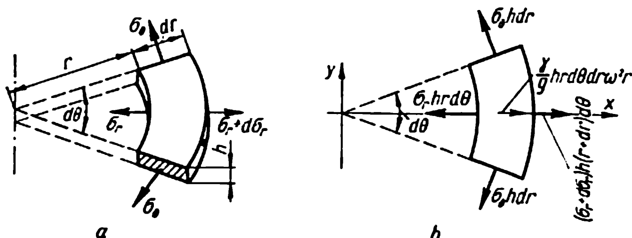


FIG. 281

Ecrivons la condition d'équilibre de l'élément en projetant toutes les forces sur l'axe x:

$$r\,\frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - \sigma_\theta - \frac{\gamma}{g}\,\omega^2 r^2 = 0. \qquad (15.61)$$

Pour le calcul des disques les équations géométriques et physiques sont les mêmes que dans le problème de Lamé ((15.2)-(15.4)). Aussi, l'équation différentielle (15.61), exprimée en déplacements et compte tenu de (15.4), prendra-t-elle la forme suivante

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = - \frac{1-\mu^2}{E} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 r. \qquad (15.62)$$

Récrivant (15.62) dans la forme

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r} \cdot \frac{d(ur)}{dr}\right] = - \frac{1-\mu^2}{E} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 r$$

que nous intégrerons ensuite deux fois, trouvons

$$u = \bar{C}_1 r + \frac{\bar{C}_2}{r} - \frac{1-\mu^2}{8E} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^3. \qquad (15.63)$$

Plaçant (15.63) dans (15.4), nous aurons

$$\sigma_r = C_1 + \frac{C_2}{r^2} - \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2; \qquad (15.64)$$

$$\sigma_\theta = C_1 - \frac{C_2}{r^2} - \frac{1+3\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 r^2, \qquad (15.65)$$

avec

$$C_1 = \frac{E}{1-\mu} C_1; \qquad C_2 = - \frac{E}{1+\mu} \bar{C}_2. \qquad (15.66)$$

Les constantes C_1 et C_2 (et par conséquent $\bar{C}_1$ et $\bar{C}_2$) se déterminent des conditions limites. Pour un disque doté d'un orifice au centre nous aurons, dans le cas général, les conditions suivantes sur les contours intérieur ($r = r_1$) et extérieur ($r = r_2$):

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = \sigma_{r_1};$$

$$(\sigma_r)_{r=r_2} = \sigma_{r_2}.$$

Eu égard à (15.64), ces conditions donnent deux équations:

$$\sigma r_1 = C_1 + \frac{C_2}{r_1^2} - \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 r_1^2;$$

$$\sigma r_2 = C_1 + \frac{C_2}{r_2^2} - \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 r_2^2.$$

En résolvant ensemble ce système de deux équations, on obtient:

$$C_1 = \frac{r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \sigma r_2 - \frac{r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \sigma r_1 + \frac{3+\mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 (r_1^2 + r_2^2); \tag{15.67}$$

$$C_2 = \frac{r_2^2 r_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \sigma r_2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \sigma r_1 - \frac{3+\mu}{8} \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_1^2 r_2^2. \tag{15.68}$$

Dans le cas où $\sigma r_2 = 0$ et $\sigma r_1 = 0$,

$$C_1 = \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 (r_1^2 + r_2^2); \tag{15.69}$$

$$C_2 = -\frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_1^2 r_2^2. \tag{15.70}$$

Introduisant ces dernières valeurs de C_1 et C_2 dans (15.64) et (15.65), nous obtiendrons

$$\sigma_r = \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 \left(r_1^2 + r_2^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} - r^2 \right); \tag{15.71}$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 \left[(3+\mu) \left(r_1^2 + r_2^2 + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} \right) - (1+3\mu) r^2 \right]. \tag{15.72}$$

Introduisant les notations suivantes:

$$\frac{r_1}{r_2} = k; \quad \frac{r}{r_2} = \rho; \; \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 r_2^2 = c; \; \frac{1+3\mu}{3+\mu} = m, \tag{15.73}$$

nous pouvons écrire:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= c\left[1 + k^2\left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) - \rho^2\right]; \\ \sigma_\theta &= c\left[1 + k^2\left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right) - m\rho^2\right]. \end{aligned}\right\} \tag{15.74}$$

La contrainte σ_r est positive et atteint sa valeur maximale pour $\rho = \sqrt{k} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}}$:

$$(\sigma_r)_{\max} = c(1 - k)^2. \tag{15.75}$$

La contrainte σ_θ est aussi positive pour toutes les valeurs de ρ et atteint son maximum pour $\rho = k$:

$$(\sigma_\theta)_{\max} = c[2 + (1 - m)k^2]. \tag{15.76}$$

L'examen de (15.75) et (15.76) montre que l'inégalité $(\sigma_\theta)_{\max} > (\sigma_r)_{\max}$ se vérifie toujours. C'est pourquoi, la condition de résistance doit être écrite (par exemple, d'après la IV-ième théorie) dans la forme suivante:

$$\sigma_{\text{éq IV}} = (\sigma_\theta)_{\max} = c[2 + (1 - m)k^2] \leqslant [\sigma]. \tag{15.77}$$

Dans le cas d'une matière fragile, il convient de se servir de la théorie de Coulomb-Mohr qui, pour $\sigma_3 = \sigma_z = 0$, conduit à la même formule (15.77).

Les formules permettant de déterminer les contraintes dans un disque plein ($r_1 = 0$) auront, en vertu de (15.64) et (15.65), la forme suivante:

$$\sigma_r = C_1 - \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 r^2; \tag{15.78}$$

$$\sigma_\theta = C_1 - \frac{1+3\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 r^2. \tag{15.79}$$

Si le contour extérieur ($r = r_2$) n'est pas chargé, c'est-à-dire si $\sigma r_2 = 0$, nous aurons, en vertu de (15.78),

$$C_1 = \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 r_2^2 = c. \qquad (15.80)$$

Plaçant (15.80) dans (15.78) et (15.79), nous aurons

$$\sigma_r = c(1 - \rho^2); \qquad (15.81)$$

$$\sigma_\theta = c(1 - m\rho^2). \qquad (15.82)$$

Les deux contraintes sont positives et augmentent au fur et à mesure qu'on se rapproche du centre du disque. Au centre du disque, quand $\rho = 0$,

$$(\sigma_r)_{\max} = (\sigma_\theta)_{\max} = c = \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 r_2^2. \qquad (15.83)$$

Conformément à (15.3), le déplacement radial sera

$$u = \varepsilon_\theta \cdot r. \qquad (15.84)$$

Comme

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \mu\sigma_r),$$

on aura

$$u = \frac{r}{E} (\sigma_\theta - \mu\sigma_r). \qquad (15.85)$$

Pour déterminer le déplacement sur le contour extérieur du disque il convient d'introduire dans la formule (15.85) $r = r_2$; $\sigma_\theta = \sigma_{\theta_2}$; $\sigma_r = \sigma r_2$

Si le disque est soumis à un échauffement inégal, il convient d'ajouter les contraintes thermiques aux contraintes suscitées par les forces centrifuges et les sollicitations situées sur le contour (si elles existent). Les contraintes thermiques se déterminent de la même façon que pour un cylindre à parois épaisses et, de ce fait, l'équation d'équilibre (15.61) va, pour $\omega = 0$, coïncider avec l'équation (15.1):

$$r \frac{d\sigma_r}{dr} + \sigma_r - {}_\theta = 0. \qquad (15.86)$$

Les déformations relatives, compte tenu de la dilatation thermique, s'obtiennent des expressions suivantes:

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_\theta) + \alpha t(r); \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \mu\sigma_r) + \alpha t(r). \end{aligned}\right\} \tag{15.87}$$

En résolvant ensemble ces équations par rapport aux contraintes, on obtient

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2}[\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta - (1+\mu)\alpha t(r)]; \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\mu^2}[\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_r - (1+\mu)\alpha t(r)]. \end{aligned}\right\} \tag{15.88}$$

Compte tenu de (15.2) et (15.3), nous aurons

$$\left.\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2}\left[\frac{du}{dr} + \mu\frac{u}{r} - (1+\mu)\alpha t(r)\right]; \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\mu^2}\left[\frac{u}{r} + \mu\frac{du}{dr} - (1+\mu)\alpha t(r)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{15.89}$$

Si la température varie le long du rayon du disque selon une fonction linéaire $t(r) = T\dfrac{r-r_1}{r_2-r_1}$, les dernières expressions prennent la forme suivante

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\frac{du}{dr} + \mu\frac{u}{r} - (1+\mu)\alpha T\frac{r-r_1}{r_2-r_1}\right]; \tag{15.90}$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\frac{u}{r} + \mu\frac{du}{dr} - (1+\mu)\alpha T\frac{r-r_1}{r_2-r_1}\right]. \tag{15.91}$$

Le module d'élasticité E et le coefficient de Poisson μ sont supposés constants, indépendants de la température et de valeurs égales à celles qu'ils ont à la température moyenne du disque.

Introduisant (15.90) et (15.91) dans l'équation d'équilibre (15.86), nous aurons

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = \frac{1+\mu}{r_2 - r_1}\alpha T. \tag{15.92}$$

Ecrivons cette équation sous la forme

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\cdot\frac{d(ur)}{dr}\right] = \frac{1+\mu}{r_2 - r_1}\alpha T,$$

après l'avoir intégrée deux fois, nous obtiendrons l'expression pour le déplacement

$$u = \overline{B}_1 r + \frac{\overline{B}_2}{r} + \frac{1+\mu}{3(r_2 - r_1)}\alpha T r^2. \tag{15.93}$$

Introduisant (15.93) dans (15.90) et (15.91), nous aurons pour les contraintes

$$\sigma_r = B_1 + \frac{B_2}{r^2} - \frac{T}{3(r_2 - r_1)}\alpha E r; \tag{15.94}$$

$$\sigma_\theta = B_1 - \frac{B_2}{r^2} - \frac{2}{3}\cdot\frac{T}{r_2 - r_1}\alpha E r, \tag{15.95}$$

avec

$$B_1 = \frac{E}{1-\mu}\left(\overline{B}_1 + \frac{\alpha T r_1}{r_2 - r_1}\right);$$

$$B_2 = \frac{E}{1+\mu}\overline{B}_2.$$

Les constantes B_1 et B_2 peuvent se déterminer des conditions limites quand $r = r_1$; $(\sigma_r)_{r=r_1} = \sigma_{r_1} = 0$ et quand $r = r_2$; $(\sigma_r)_{r=r_2} = 0$.

Les contraintes dues aux forces centrifuges et les contraintes thermiques doivent être additionnées. Dans le cas où la loi de variation de la tempé-

rature le long du rayon est linéaire, après avoir additionné les deuxièmes membres des expressions (15.64) et (15.94) de même que ceux de (15.65) et (15.95), nous aurons

$$\sigma_r = D + \frac{L}{r^2} - \frac{3+\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \omega^2 r^2 - \frac{T}{3(r_2 - r_1)} \alpha E r;$$

$$\sigma_\theta = D - \frac{L}{r^2} - \frac{1+3\mu}{8} \cdot \frac{\gamma}{g} \cdot \omega^2 r^2 - \frac{2}{3} \cdot \frac{T}{r_2 - r_1} \alpha E r,$$

où $D = C_1 + B_1$; $L = C_2 + B_2$ sont des constantes qui doivent être déterminées des conditions limites.

Tableau 35

Formules de calcul pour des cylindres à parois épaisses

Schéma de sollicitation. Diagrammes des contraintes	Contraintes principales dans des points d'une surface cylindrique de rayon r	Déplacement radial des points d'une surface cylindrique de rayon r	Contraintes principales au point dangereux; contrainte équivalente pour le point dangereux $\left(k = \frac{r_1}{r_2}\right)$
Cylindre se trouvant sous l'action d'une pression intérieure p	$\sigma_r = \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 - \frac{r_2^2}{r^2}\right)$ $\sigma_\theta = \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 + \frac{r_2^2}{r^2}\right)$ $\sigma_z = 0$ — cylindre ouvert $\sigma_z = \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2}$ — cylindre fermé	Cylindre ouvert $u = \frac{pr_1^2}{E(r_2^2 - r_1^2)}\left[(1-\mu)r + (1+\mu)\frac{r_2^2}{r}\right]$ Cylindre fermé $u = \frac{pr_1^2}{E(r_2^2 - r_1^2)} \times \left[(1-2\mu)r + (1+\mu)\frac{r_2^2}{r}\right]$	$r = r_1$ $\sigma_1 = \sigma_\theta = \frac{1+k^2}{1-k^2}p$ $\sigma_2 = \sigma_z = 0$ — cylindre ouvert $\sigma_2 = \sigma_z = \frac{k^2}{1-k^2}p$ — cylindre fermé $\sigma_3 = \sigma_r = -p$ $\sigma_{\acute{e}q\,III} = \frac{2p}{1-k^2}$ $\sigma_{\acute{e}q\,M} = p\left(\frac{1+k^2}{1-k^2} + \frac{[\sigma_+]}{[\sigma_-]}\right)$

Schéma de sollicitation. Diagrammes des contraintes	Contraintes principales dans des points d'une surface cylindrique de rayon r	Déplacement radial des points d'une surface cylindrique de rayon r	Contraintes principales au point dangereux; contrainte équivalente pour le point dangereux $\left(k = \frac{r_1}{r_2}\right)$
Cylindre se trouvant sous l'action d'une pression extérieure p	$\sigma_r = -\frac{p r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 - \frac{r_1^2}{r^2}\right)$ $\sigma_\theta = -\frac{p r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}\left(1 + \frac{r_1^2}{r^2}\right)$ $\sigma_z = 0$ — cylindre ouvert $\sigma_z = -\frac{p r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}$ — cylindre fermé	Cylindre ouvert $u = -\frac{p r_2^2}{E(r_2^2 - r_1^2)} \times$ $\times \left[(1-\mu) r + (1+\mu)\frac{r_1^2}{r}\right]$ Cylindre fermé $u = -\frac{p r_2^2}{E(r_2^2 - r_1^2)}\left[(1-2\mu) r + \right.$ $\left. + (1+\mu)\frac{r_1^2}{r}\right]$	$r = r_1;\quad \sigma_1 = \sigma_r = 0$ $\sigma_2 = \sigma_z = 0$ — cylindre ouvert $\sigma_2 = \sigma_z = -\frac{p}{1-k^2}$ — cylindre fermé $\sigma_3 = \sigma_\theta = -\frac{2p}{1-k^2}$ $\sigma_{éq\,III} = \frac{2p}{1-k^2}$ $\sigma_{éq\,M} = \frac{2p}{1-k^2} \times$ $\times \frac{\lvert\sigma_+\rvert}{\lvert\sigma_{-1}\rvert}$

Suite

Schéma de sollicitation. Diagrammes des contraintes	Contraintes principales dans des points d'une surface cylindrique de rayon r	Déplacement radial des points d'une surface cylindrique de rayon r	Contraintes principales au point dangereux; contrainte équivalente pour le point dangereux $\left(k = \frac{r_1}{r_2}\right)$
Cylindre se trouvant sous l'action d'une pression intérieure p_1 et d'une pression extérieure p_2	$\sigma_r = \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2}$ $\sigma_\theta = \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2}$	Cylindre ouvert $u = \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} \times r + \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2} \times \frac{1}{r}$ Cylindre fermé $u = \frac{1+2\mu}{E} \cdot \frac{r_1^2 p_1 - r_2^2 p_2}{r_2^2 - r_1^2} r + \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{r_1^2 r_2^2 (p_1 - p_2)}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r}$	$r = r_1$ $\sigma_r = -p_1$ $\sigma_\theta = \frac{(1 + k^2) p_1 - 2p_2}{1 - k^2}$ $\sigma_z = \frac{k^2 p_1 - p_2}{1 - k^2}$

CHAPITRE 16

Calcul des enveloppes à parois minces

§ 88. Calcul des enveloppes à parois minces d'après la théorie de membranes

Dans la catégorie des enveloppes minces on range citernes, châteaux d'eau, ballons à air et bouteilles à gaz, coupoles des édifices, cloisons étanches dans les avions et les navires, appareils faisant partie des constructions mécaniques dans l'industrie chimique, éléments des corps de turbines et de moteurs à réaction, etc.

Examinons l'élément de l'enveloppe que montrent les fig. 282, *a*, *b*. Dans le cas général, les sections qui délimitent l'élément seront soumises à l'action des efforts (fig. 282, *a*) et des moments (fig. 282, *b*) rapportés à l'unité de longueur de la section, à savoir: les efforts normaux N_1 et N_2;

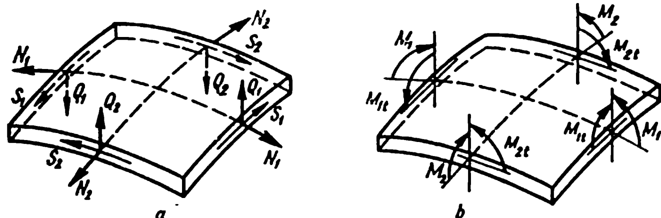


FIG. 282

les efforts tangentiels (de cisaillement) S_1 et S_2; les efforts tranchants Q_1 et Q_2; les moments fléchissants M_1 et M_2; les moments de torsion M_{1t} et M_{2t}.

La prise en considération de tous les facteurs de force énumérés ramène, lors des calculs des enveloppes, à des équations différentielles de départ très compliquées dont la résolution, même pour les cas les plus simples, est liée à des difficultés mathématiques notoires. Dans la plupart

des cas, l'on parvient à simplifier sensiblement les équations de départ. Ces simplifications découlent du caractère même du problème. Pour commencer, si l'enveloppe se présente comme un corps de révolution et si la charge est symétrique par rapport à l'axe de l'enveloppe, le problème est dit *à symétrie axiale* et, dans ce cas, dans toutes les sections obtenues en traçant les plans passant par l'axe de symétrie ainsi que dans celles qui leur sont orthogonales, se vérifient les égalités suivantes:

$$M_{1t} = M_{2t} = S_1 = S_2 = 0; \quad Q_1 = 0 \quad (\text{ou } Q_2 = 0).$$

Deuxièmement, si d'après la forme de l'enveloppe la nature de sa sollicitation et le mode de sa fixation l'on peut, en partant de l'une ou l'autre considération, arriver à la conclusion que certains efforts ou moments sont partout peu élevés par comparaison avec les autres efforts ou moments, on les considère nuls. Par exemple, on pose souvent

$$M_1 = M_2 = M_{1t} = M_{2t} = 0; \quad Q_1 = Q_2 = 0,$$

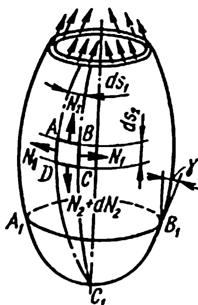


FIG. 283

ce qui conduit à ce qu'il est convenu d'appeler la *théorie de membranes pour les enveloppes*.

En particulier, on se sert de la théorie de membranes pour les enveloppes quand on doit calculer les contraintes dans un réservoir se présentant comme une enveloppe à symétrie axiale (fig. 283). Nous supposerons que les sections méridionales de la surface médiane de l'enveloppe forment des courbes coulantes tandis que l'épaisseur h de l'enveloppe est petite par comparaison avec les rayons de courbure. Dans ce cas, si les extrémités du réservoir sont fixées de telle façon qu'elles ne peuvent être exposées qu'à la seule action des efforts tangents aux courbes méridionales, on peut supposer que l'enveloppe se trouve dans un état de contrainte dans lequel les moments sont absents.

Si le réservoir est rempli (entièrement ou partiellement) de gaz, de liquide ou de substance meuble et si la pression y est constante en tous les points appartenant à un plan perpendiculaire à son axe (comme le montre la fig. 283) il représente alors une enveloppe se trouvant non seulement dans un état de contrainte sans moments, mais aussi dans un état de contrainte à symétrie axiale.

Prélevons de cette enveloppe un élément rectangulaire curviligne $ABCD$ en menant deux sections axiales à proximité l'une de l'autre et deux plans orthogonaux à ces dernières ainsi qu'à la surface de l'enveloppe

Désignons par ds_1 et ds_2 les longueurs des côtés de cet élément (fig. 284). Les côtés de cet élément subiront respectivement l'action des efforts de traction (dans le cas d'une pression intérieure) N_2ds_1 et N_1ds_2. Ici N_1 et N_2 sont respectivement les efforts normaux revenant à l'unité de longueur du périmètre de l'élément

$$N_1 = \sigma_t \cdot h; \quad N_2 = \sigma_m \cdot h, \tag{16.1}$$

avec σ_t, *contrainte normale circonférentielle* (latitudinale ou annulaire) dirigée d'après la tangente au cercle de rayon $\rho_t = \rho_1$; σ_m, *contrainte normale méridionale* dirigée d'après la tangente au méridien de rayon $\rho_m = \rho_2$.

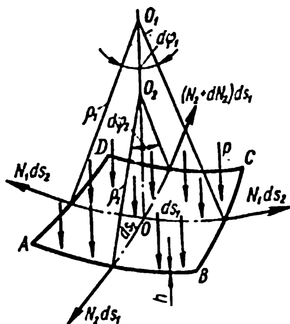


FIG. 284

Examinons la condition d'équilibre de l'élément en projetant sur la normale OO_1 (fig. 284) les efforts internes agissant sur le contour de l'élément ainsi que la pression p que subit l'élément prélevé de surface $ds_1 \cdot ds_2$:

$$2N_1ds_2 \sin \frac{d\varphi_1}{2} + N_2ds_1 \sin \frac{d\varphi_2}{2} + (N_2 + dN_2)\, ds_1 \sin \frac{d\varphi_2}{2} - $$

$$- pds_1ds_2 = 0.$$

Compte tenu du fait que les angles $d\varphi_1$ et $d\varphi_2$ sont petits et négligeant les grandeurs de second ordre de petitesse, trouvons

$$\frac{N_1}{\rho_1} + \frac{N_2}{\rho_2} = p. \tag{16.2}$$

Tenant également compte de (16.1) et du fait que $\rho_t = \rho_1$, $\rho_m = \rho_2$, en vertu de (16.2) nous obtiendrons

$$\frac{\sigma_t}{\rho_t} + \frac{\sigma_m}{\rho_m} = \frac{p}{h}. \tag{16.3}$$

L'équation (16.3) porte le nom d'*équation de Laplace*. Pour déterminer les deux inconnues σ_t et σ_m l'équation de Laplace, à elle seule, n'est pas suffisante. La seconde équation peut s'obtenir aisément de l'étude

des conditions d'équilibre de la partie inférieure de l'enveloppe de rayon r obtenue à l'aide de la section par une surface conique $A_1D_1B_1$ (fig. 285):

$$N_2 \cos\alpha \cdot 2\pi r - p\pi r^2 - Q_l - Q_r = 0,$$

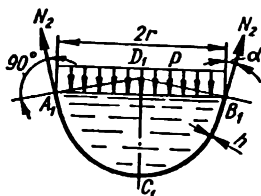


FIG. 285

Q_l étant le poids du liquide ou de la substance meuble se trouvant dans la partie considérée du réservoir; Q_r, le poids propre de la partie considérée du réservoir. De là on tire l'effort par unité de longueur dans la section considérée de la paroi:

$$N_2 = \frac{pr}{2\cos\alpha} + \frac{Q_l + Q_r}{2\pi r \cos\alpha}. \quad (16.4)$$

Connaissant N_2, déterminons la contrainte normale méridionale σ_m, en accord avec (16.1), de la formule

$$\sigma_m = \frac{pr}{2h\cos\alpha} + \frac{Q_l + Q_r}{2\pi r h \cos\alpha}. \quad (16.5)$$

Tant que le problème de détermination des contraintes dans les parois du réservoir se résolvait dans l'hypothèse que sur l'épaisseur des parois les contraintes sont réparties de façon uniforme, il n'y avait aucun besoin d'étudier les aspects géométrique et physique du problème, en d'autres mots, le problème de calcul des récipients à parois minces ainsi posé était un problème isostatique.

Il est évident que les contraintes normales σ_t et σ_m agissant dans les plans caractérisés par l'absence de contraintes tangentielles seront principales. Pour ce qui est de la troisième contrainte principale dirigée parallèlement à la normale à la surface de l'enveloppe, elle sera égale à p sur la face interne et nulle sur la face externe (la pression étant intérieure). Comme dans les enveloppes à parois minces $\sigma_1 = \sigma_t$ et $\sigma_2 = \sigma_m$ sont sensiblement plus élevées que p, on néglige cette dernière par comparaison avec σ_t et σ_m, c'est-à-dire σ_3 est posée égale à zéro.

Par conséquent, nous supposerons que le matériau de l'enveloppe se trouve dans un état de contrainte plan. Aussi, pour des calculs de résistance doit-on se servir, en fonction de l'état même du matériau, de la théorie de résistance appropriée. C'est ainsi que, d'après la IV-ième théorie de résistance, la condition de résistance aura la forme suivante:

$$\sigma_{\acute{e}q\,IV} = \sqrt{\sigma_t^2 + \sigma_m^2 - \sigma_t\sigma_m} \leqslant [\sigma]. \quad (16.6)$$

On donne ci-bas les formules de calcul pour des réservoirs de formes diverses.

Ballon sphérique rempli de gaz et dont la pression est égale à p. Introduisant dans (16.3) les valeurs suivantes: $\rho_m = \rho_t = R$; $\sigma_m = \sigma_t = \sigma$, trouvons

$$2\frac{\sigma}{R} = \frac{p}{h},$$

ou

$$\sigma = \sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pR}{2h}. \tag{16.7}$$

Les conditions de résistance d'après la première, la troisième et la quatrième théorie se ramènent à la forme suivante:

$$\sigma_{\text{éq IV}} = \frac{pR}{2h} \leqslant [\sigma]. \tag{16.8}$$

Ballon cylindrique rempli de gaz et dont la pression est égale à p (fig. 286).

Dans ce cas,

$$\rho_t = R; \quad \rho_m = \infty.$$

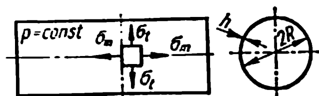


FIG. 286

De (16.3), il vient

$$\sigma_t = \frac{pR}{h}. \tag{16.9}$$

La contrainte σ_m agissant dans une section du ballon éloignée des extrémités de ce dernier se détermine de la formule (16.5) en y posant $Q_1 = Q_r = 0$; $\alpha = 0$:

$$\sigma_m = \frac{pR}{2h} \tag{16.10}$$

ou

$$\sigma_m = \frac{1}{2}\sigma_t.$$

Réservoir sphérique (fig. 287) rempli d'un liquide (ou d'une substance meuble) à la densité γ. Dans ce cas

$$\rho_t = \rho_m = R; \quad r = R\sin\varphi; \quad H = R(\cos\varphi - \cos\beta);$$
$$p = \gamma H = \gamma R(\cos\varphi - \cos\beta).$$

De l'équation de Laplace il vient

$$\sigma_t = \sigma_m = \frac{pR}{h} = \frac{\gamma R^2}{h}(\cos\varphi - \cos\beta). \tag{16.11}$$

FIG. 287

Se servant de la formule (16.5) dans laquelle

$$Q_1 = \gamma V_{ABC} = \gamma \cdot \frac{1}{3}\pi H_C^2(3R - H_C) = \tag{16.12}$$
$$= \frac{\pi\gamma}{3} R^3(1 - \cos\varphi)^2(2 + \cos\varphi),$$

et y ayant posé $Q_r = 0$ et $\alpha = 90° - \varphi$, on trouve

$$\sigma_m = \frac{\gamma R^2}{h}\left[\frac{1 + \cos\varphi + \cos^2\varphi}{3(1 + \cos\varphi)} - \frac{\cos\beta}{2}\right]. \tag{16.13}$$

Puis, de (16.11) on détermine

$$\sigma_t = \frac{\gamma R^2}{h}\left[\frac{2\cos^2\varphi + 2\cos\varphi - 1}{3(1 + \cos\varphi)} - \frac{\cos\beta}{2}\right]. \tag{16.14}$$

La contrainte maximale revenant au point C, où $\varphi = 0$, sera

$$\sigma_{m_{\max}} = \sigma_{t_{\max}} = \frac{\gamma R^2(1 - \cos\beta)}{2h}. \tag{16.15}$$

A l'extrémité de l'enveloppe où $\varphi = \beta$

$$\sigma_m(\beta) = -\sigma_t(\beta) = \frac{\gamma R^2}{6h} \cdot \frac{2 - \cos\beta - \cos^2\beta}{1 + \cos\beta}. \tag{16.16}$$

Coupole sphérique de rayon R et dont l'épaisseur de la paroi est h, fabriquée en un matériau à la densité γ (fig. 288). Poids de l'aire unitaire de l'enveloppe: $q = \gamma h$. La composante normale

$$q_n = q\cos\varphi = \gamma h \cos\varphi$$

joue le rôle d'une pression appliquée à la surface, et c'est pourquoi dans

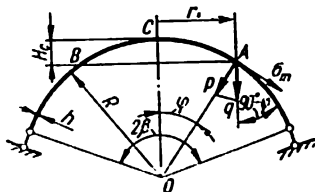


FIG. 288

l'équation de Laplace (16.3), il convient de poser $p = -q_n$ tandis que dans l'équation (16.5), $p = 0$.

Compte tenu de ce que $\rho_t = \rho_m = R$, on trouve de l'équation de Laplace

$$\sigma_m + \sigma_t = \frac{pR}{h} = -\gamma R \cos \varphi. \tag{16.17}$$

Se servant de la formule (16.5) dans laquelle

$$Q_r = qS_{ACB} = \gamma h S_{ACB} = \gamma h \, 2\pi R H_C = \gamma h \, 2\pi R^2 (1 - \cos \varphi),$$

c'est-à-dire

$$Q_r = 2\pi\gamma h R^2 (1 - \cos \varphi);$$

$$r = R \sin \varphi; \quad \alpha = 90° - \varphi; \quad p = 0,$$

et compte tenu également du fait que dans la section AB le poids de la partie ACB provoque la compression, on trouve

$$\sigma_m = -\frac{\gamma R}{1 + \cos \varphi}. \tag{16.18}$$

De l'équation (16.17), il vient alors

$$\sigma_t = \gamma R \, \frac{1 - \cos \varphi - \cos^2 \varphi}{1 + \cos \varphi}. \tag{16.19}$$

Les contraintes méridionales qui sont partout des contraintes de compression croissent au fur et à mesure qu'on s'éloigne du sommet de la coupole vers son bout. Dans la partie supérieure de la coupole, les contraintes annulaires sont négatives (contraintes de compression); pour $\varphi = 51°50'$, elles s'annulent tandis que pour $\varphi > 51°50'$ elles deviennent des contraintes de traction. Ces résultats ne se vérifient que si la coupole a été réalisée de telle façon qu'elle permet uniquement des réactions dirigées d'après la tangente à la courbe méridionale.

§ 89. Bagues d'écartement dans les enveloppes

Si une section quelconque de l'enveloppe AA_1 (fig. 289) est caractérisée par une brisure, les tangentes à la courbe méridionale menées de la gauche et de la droite du point A forment entre elles un angle égal à $180° - (\alpha_1 + \alpha_2)$. Les efforts, par unité de longueur, suscités par les contraintes méridionales σ_{m_1} et σ_{m_2} (fig. 290) agissant dans les sections BB_1 et CC_1 situées dans le voisinage immédiat de AA_1 (elles s'obtiennent à l'aide

de l'intersection par les surfaces coniques O_1BB_1 et O_2CC_1 normales à la surface médiane de l'enveloppe), seront $\sigma_{m_1}h_1$ et $\sigma_{m_2}h_2$, où h_1 et h_2 sont les épaisseurs des parties *1* et *2* de l'enveloppe.

De la condition d'équilibre de l'anneau BB_1C_1C il vient

$$\sigma_{m_1}h_1 \cos\alpha_1 \cdot 2\pi r = \sigma_{m_2}h_2 \cos\alpha_2 \cdot 2\pi r$$

ou

$$\sigma_{m_1}h_1 \cos\alpha_1 = \sigma_{m_2} h_2 \cos\alpha_2.$$

FIG. 289

Ainsi, les projections de ces efforts sur l'axe de l'enveloppe s'équilibrent mutuellement. En même temps, la somme des projections desdits efforts sur le plan AA_1 (fig. 291) donne l'effort radial par unité de longueur

$$q = \sigma_{m_1} h_1 \sin\alpha_1 + \sigma_{m_2} h_2 \sin\alpha_2, \quad (16.20)$$

que l'on peut considérer comme une charge locale comprimant l'enveloppe et susceptible de provoquer une flexion importante dans cette dernière.

Pour diminuer la flexion on place souvent dans les enveloppes les anneaux de rigidité ou les bagues d'écartement (fig. 292) qui vont supporter à eux seuls les efforts radiaux suivant le schéma de la fig. 293. Dans l'anneau ne se développent que les contraintes de compression et la condition de résistance y sera

$$\frac{qR_a}{F_a} \leq [\sigma], \quad (16.21)$$

R_a étant le rayon du plan médian de l'anneau; F_a, l'aire de la section transversale de l'anneau; q, la charge par unité de longueur supportée par l'anneau et déterminée de la formule (16.20).

FIG. 290

FIG. 291

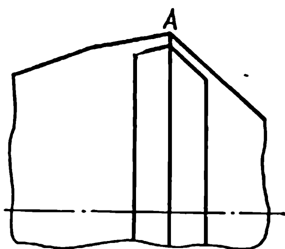


FIG. 292

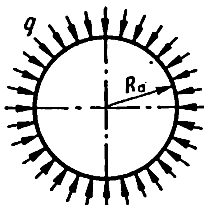


FIG. 293

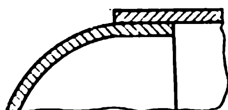


FIG. 294

Parfois, au lieu de la bague d'écartement, on fait appel, à l'endroit de la cassure, à un renflement local de l'enveloppe en recourbant vers l'intérieur de l'enveloppe les extrémités du fond du réservoir ou, par exemple, en procédant comme le montre la fig. 294.

Le tableau 36 donne les formules de calcul pour la détermination des contraintes et des déplacements dans les enveloppes à parois minces.

Tableau 36

Formules de calcul pour la détermination des contraintes et des déplacements dans les enveloppes à parois minces

p — pression; q — charge par unité de longueur; σ_m et σ_t — contraintes normales méridionale et circonférentielle (positives en traction); h — épaisseur de l'enveloppe; R — rayon du plan médian dans une section transversale de l'enveloppe; E, μ, γ_m — module d'élasticité, coefficient de Poisson et poids spécifique respectivement du matériau constitutif de l'enveloppe; w — déplacement dans la direction de la normale à la surface (la direction dont l'origine part de l'axe ou du centre de l'enveloppe est adoptée positive); γ — poids spécifique du liquide.

Schéma	Formules
Enveloppe sphérique. Pression intérieure uniforme	$\sigma_m = \sigma_t = \frac{pR}{2h}$; $w = \frac{pR^2}{2Eh}(1-\mu)$
Enveloppe sphérique remplie entièrement de liquide et appuyée sur un anneau de rayon $R \sin \alpha_0$	Pression intérieure $p = \gamma R(1-\cos\alpha)$ $\alpha < \alpha_0$ $\sigma_m = \frac{\gamma R^2}{6h}\left(1 - \frac{2\cos^2\alpha}{1+\cos\alpha}\right)$ $\sigma_t = \frac{\gamma R^2}{6h}\left(5 - 6\cos\alpha + \frac{2\cos^2\alpha}{1+\cos\alpha}\right)$ $\alpha > \alpha_0$ $\sigma_m = \frac{\gamma R^2}{6h}\left(5 + \frac{2\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha}\right)$ $\sigma_t = \frac{\gamma R^2}{6h}\left(1 - 6\cos\alpha - \frac{2\cos^2\alpha}{1-\cos\alpha}\right)$

Suite

Schéma	Formules
Réservoir sphérique rempli de liquide. Bords appuyés librement	Pression intérieure $p = \gamma R(\cos\varphi - \cos\beta)$ $$\sigma_m = \frac{\gamma R^2}{h}\left[\frac{1+\cos\varphi+\cos^2\varphi}{3(1+\cos\varphi)} - \frac{\cos\beta}{2}\right]$$ $$\sigma_t = \frac{\gamma R^2}{h}\left[\frac{-1+2\cos\varphi+2\cos^2\varphi}{3(1+\cos\varphi)} - \frac{\cos\beta}{2}\right]$$ pour $\varphi = 0$ $$\sigma_m = \sigma_t = \frac{\gamma R^2}{h}\,\frac{1-\cos\beta}{2} = \sigma_{max}$$ pour $\varphi = \beta$ $$\sigma_m = -\sigma_t = \frac{\gamma R^2}{h}\cdot\frac{2-\cos\beta-\cos^2\beta}{6(1+\cos\beta)}$$ Variation du rayon d'un cercle sur le contour $$\Delta = -\frac{\gamma R^2\sin\beta}{Eh}\cdot\frac{(1+\mu)(2-\cos\alpha-\cos^2\alpha)}{6(1+\cos\alpha)}$$
Coupole sphérique sous l'action de son propre poids. Bords ppuyés librement	$$\sigma_m = -\frac{\gamma_m R}{1+\cos\varphi};$$ $$\sigma_t = \gamma_m R\,\frac{1-\cos\alpha-\cos^2\varphi}{1+\cos\varphi}$$ $\sigma_t = 0$ pour $\varphi = 51°50'$ $\sigma_t < 0$ pour $0 < \alpha < 51°50'$ $\sigma_t > 0$ pour $\alpha > 51°50'$

Schéma	Formules
Coupole sphérique. Pression normale uniforme. Bords articulés sur l'anneau élastique. Les matériaux constitutifs de l'enveloppe et de l'anneau sont identiques 	Loin des bords, pour $H > 10h$ $$\sigma_m = \sigma_t = \frac{pR}{2h}$$ Contraintes dans l'anneau d'appui $$\sigma_a = -\frac{pR^2 \sin\alpha}{2}\left[\frac{\cos\alpha - 0{,}39\dfrac{\sqrt{Rh}}{R\sin\alpha}}{F + 0{,}39h\sqrt{Rh}}\right],$$ où F est l'aire de la section de l'anneau d'appui
Enveloppe cylindrique longue dotée de fonds. Pression intérieure uniforme 	Loin des bords $$\sigma_m = \frac{pR}{2h}; \quad \sigma_t = \frac{pR}{h} = \sigma_{max}$$ $$w = \frac{pR^2}{Eh}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right)$$
Cylindre rempli de liquide. Les bords supérieurs sont appuyés librement 	$$\sigma_m = \frac{\gamma HR}{2h}; \quad \sigma_t = \frac{\gamma(H - x)R}{h}$$

Schéma	Formules
Enveloppe conique longue. Pression intérieure uniforme	Loin des bords $\sigma_m = \frac{px\,tg\alpha}{2h}$; $\sigma_t = \frac{px\,tg\alpha}{h}$ $w = \frac{3px^2\,tg^2\alpha}{4hE}$
Enveloppe conique sous l'action de son propre poids. Bords appuyés librement	Loin des bords $\sigma_m = \frac{\gamma_m \cdot x}{2\cos\alpha}$; $\sigma_t = \frac{\gamma_m \cdot x \cdot \sin^2\alpha}{\cos\alpha}$ Déplacement radial du bord $(x = l)$ $\Delta = \frac{\gamma_m l^2}{E}\,tg\,\alpha\left(\sin^2\alpha - \frac{\mu}{2}\right)$ Pour $\sin\alpha = \sqrt{\frac{\mu}{2}}$ $\Delta = 0$
Enveloppe conique entièrement remplie de liquide. Bords appuyés librement	$\sigma_m = \frac{\gamma x\,tg\alpha\left(H - \frac{2}{3}x\right)}{2h\cos\alpha}$ $\sigma_t = \frac{\gamma x\,tg\alpha}{h\cos\alpha}(H - x)$ $\sigma_{m_{max}} = \frac{3\gamma H^2\,tg\alpha}{16h\cos\alpha}$ pour $x = \frac{3}{4}H$ $\sigma_{t_{max}} = \frac{\gamma H^2 tg\alpha}{4h\cos\alpha}$ pour $x = \frac{H}{2}$ Variation du rayon d'un cercle sur le contour $\Delta = -\mu\frac{\gamma H^3\,tg^2\alpha}{6h\,E\cos\alpha}$

Schéma	Formules
Enveloppe cylindrique dotée d'un fond conique et remplie de liquide	**Contraintes dans le fond** $\sigma_m = \frac{\gamma \operatorname{tg}\alpha}{2h\cos\alpha}\left(H + H_c - \frac{2}{3}x\right)x$ $\sigma_t = \frac{\gamma x \operatorname{tg}\alpha}{h\cos\alpha}(H + H_c - x)$ Si $H > \frac{H_c}{3}$, alors $\sigma_{m_{max}} = \frac{\gamma \operatorname{tg}\alpha}{2h\cos\alpha}\left(H + \frac{H_c}{3}\right)H_c$ pour $x = H_c$ Si $H < \frac{H_c}{3}$, alors $\sigma_{m_{max}} = \frac{3\gamma \operatorname{tg}\alpha}{16h\cos\alpha}(H + H_c)^2$ pour $x = \frac{3}{4}(H + H_c)$ Si $H \geqslant H_c$, alors $\sigma_{t_{max}} = \frac{\gamma \operatorname{tg}\alpha}{4h\cos\alpha}(H + H_c)^2$ pour $x = \frac{H + H_c}{2}$ Si $H \leqslant H_c$, alors $\sigma_{t_{max}} = \frac{\gamma \operatorname{tg}\alpha}{h\cos\alpha}HH_c$ pour $x = H_c$

Schéma	Formules
Enveloppe cylindrique dotée d'un fond sphérique et remplie de liquide	Contraintes dans le fond $\sigma_m = \frac{\gamma R}{2h}\left[H + H_s - x + \frac{x(3R - x)}{3(2R - x)}\right]$ $\sigma_{m_{max}} = \frac{\gamma R}{2h}(H + H_s)$ pour $x = 0$ $\sigma_t = \frac{\gamma R}{2h}\left[H + H_s - x - \frac{x(3R - x)}{3(2R - x)}\right]$ $\sigma_{t_{max}} = \frac{\gamma R}{2h}(H + H_s)$ pour $x = 0$ Pour un fond demi-sphérique ($H_s = R$) $\sigma_{m_{max}} = \sigma_{t_{max}} = \frac{\gamma R}{2h}(H + R)$ pour $x = 0$
Enveloppe torique. Pression intérieure uniforme	$\sigma_m = \frac{pR}{2h} \cdot \frac{2a + R \sin\varphi}{a + R \sin\varphi}$ $\sigma_{m_{max}} = \frac{pR(2a - R)}{2h(a - R)}$ pour $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ $\sigma_t = \frac{pR}{2h}$ $w = \frac{pR^2}{2Eh}\left[\frac{a}{R}(1 - 2\mu) + (1 - \mu)\cos\varphi\right]$ Les valeurs de σ_m et σ_t sont suffisamment précises pour $a > (2 \text{ à } 3)R$

CHAPITRE 17

Calcul des structures d'après les états limites

§ 90. Notions fondamentales d'état limite

Les techniques de calcul de la résistance des barres, poutres et structures, étudiées plus haut, étaient fondées sur l'évaluation de la résistance d'un matériau en un point représentant du danger; en d'autres mots, les calculs s'effectuaient en se référant aux *contraintes admissibles*. En tant que l'état dangereux ou limite, on considérait un tel état de la structure pour lequel une contrainte locale maximale atteignait une valeur dangereuse: la limite d'écoulement (pour les matériaux plastiques) et la limite d'écrouissage temporaire (pour les matières fragiles). L'état de toute la partie restante du matériau n'était pas pris en considération.

Or, lorsque la répartition des contraintes n'est pas uniforme, par exemple en flexion et en torsion, dans les structures hyperstatiques réalisées en matériaux plastiques, l'apparition des contraintes locales égales, de par leur grandeur, à la limite d'écoulement, ne représente pas, dans la majorité des cas, de danger pour toute la structure dans son ensemble.

Ainsi, on a vu s'imposer la nécessité d'avoir une nouvelle approche dans l'évaluation de la résistance d'une structure d'après son état limite.

Par état limite d'une structure on entend l'état pour lequel la structure perd la capacité de résister aux sollicitations extérieures ou bien cesse de satisfaire à des exigences requises pour son exploitation.

On distingue trois formes d'états limites: a) *d'après la capacité portante* (résistance, stabilité et fatigue). Lorsqu'une structure se trouve en un tel état, elle perd la capacité de résister aux sollicitations extérieures ou bien elle connaît des modifications résiduelles telles qu'elle cesse de répondre aux exigences requises pour son exploitation; b) *d'après le développement des déformations excessives* provoquées par les charges statiques ou dynamiques pour lesquelles la structure, tout en conservant sa résistance et sa stabilité, devient le foyer des déformations irréversibles ou des oscillations d'une amplitude dangereuse, de sorte qu'elle cesse de répondre aux exigences requises pour son exploitation; c) *d'après la formation et le dévelop-*

pement des fissures, quand la structure, tout en conservant sa résistance et sa stabilité, est affectée de grandes fissures qui rendent impossible son exploitation ultérieure (perte d'une imperméabilité à l'eau requise; danger de corrosion dû à la déstruction de la couche de finition, etc.).

Les techniques de calcul d'après les états limites sont largement employées quand on élabore les projets des structures de constructions et permettent de mettre à jour les réserves de résistance que les calculs d'après les contraintes admissibles n'autorisent pas à utiliser; elles permettent aussi de réduire le poids de la structure.

On trouve ci-bas quelques exemples de calcul, d'après les sollicitations limites, des structures réalisées en matériaux plastiques dotés d'un palier d'écoulement sur les diagrammes de traction, de compression et de cisaillement pur. Dans le but de simplifier les calculs, l'allure de ces diagrammes(fig. 295) est schématisée de telle façon que le segment de droite traduisant la loi de Hooke se transforme directement, sans aucun passage intermédiaire, en une ligne horizontale (fig. 296). Par là même, on suppose que la limite de proportionnalité et la limite d'écoulement se confondent. La longueur de la tranche horizontale du diagramme n'est pas limitée, autrement dit, l'on suppose que le matériau est d'une plasticité idéale et non à durcissement. Un tel diagramme porte le nom de *diagramme de Prandtl.*

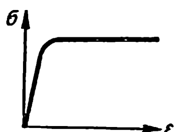


FIG. 295

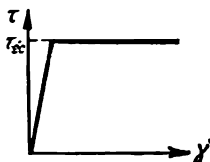


FIG. 296

La substitution du diagramme schématisé de Prandtl à des diagrammes réels se justifie pour des matériaux de type aluminium et, de plus, est suffisamment plausible pour des matériaux caractérisés par des diagrammes ayant une longueur limitée du palier d'écoulement (fig. 297).

Dans une structure, l'état limite déterminé par une déformation plastique importante survient au début du

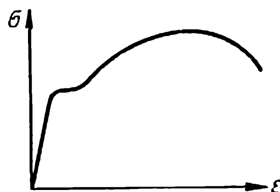


FIG. 297

durcissement du matériau et la charge limite peut être calculée d'après la limite d'écoulement.

Pour un état de contrainte complexe il existe plusieurs théories expliquant le passage du matériau en un état plastique. La théorie de plasticité de Saint-Venant permet d'effectuer les calculs d'une façon particulièrement simple. Selon cette théorie, dans un état de contrainte complexe, l'état plastique du matériau survient quand les contraintes tangentielles maximales atteignent une valeur limite, à savoir, la limite d'écoulement en cisaillement

$$\tau_{max} = \tau_{éc}. \tag{17.1}$$

Nous basant sur les considérations exposées plus haut, étudions quelques cas caractéristiques du calcul d'après l'état limite.

§ 91. Calculs en traction et en compression

En traction et en compression, les contraintes se répartissent de façon uniforme sur l'aire de la section transversale d'une barre. C'est pourquoi les calculs de résistance des systèmes isostatiques réalisés d'après le principe des contraintes admissibles et le principe de l'état limite donnent un résultat identique. Mais dans le cas des systèmes hyperstatiques, les résultats de ces deux types de calcul seront différents. Cela se démontre aisément sur l'exemple d'un calcul à la traction d'une suspension à trois tiges (fig. 298) sollicitée par une force *P*. Les aires des sections transversales des tiges. sont égales; le matériau est plastique avec $\sigma_{éc}$ pour limite d'écoulement

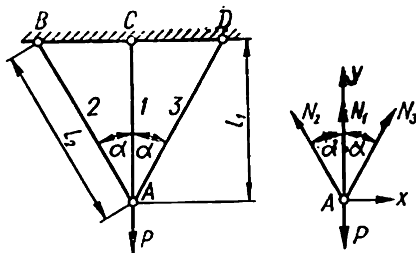


FIG. 298

Si l'on calcule le système en question (qui est hyperstatique d'ordre 1) d'après le principe des contraintes admissibles, en accord avec les données

au § 41 on aura pour $F_1 = F_2 = F$

$$N_1 = \frac{P}{1 + 2\cos^3\alpha}\ ; \tag{17.2}$$

$$N_2 = N_3 = \frac{\cos^2\alpha}{1 + 2\cos^3\alpha} P. \tag{17.3}$$

On aura, évidemment, toujours $N_1 > N_2 = N_3$, autrement dit, c'est dans la tige du milieu qu'on observe l'effort le plus élevé. Par conséquent, c'est dans cette même tige qu'on aura la contrainte maximale de valeur égale à

$$\sigma_{max} = \frac{N_1}{F} = \frac{1}{1 + 2\cos^3\alpha} \cdot \frac{P}{F}. \tag{17.4}$$

Le coefficient de sécurité est, dans ce cas, égal à

$$n_{éc} = \frac{\sigma_{éc}}{\sigma_{max}} = \frac{1 + 2\cos^3\alpha}{P} F\sigma_{éc}. \tag{17.5}$$

Si l'on calcule la même suspension d'après le principe de l'état limite, l'effort agissant dans la tige du milieu, au moment où les déformations plastiques y apparaissent, sera

$$N_{1éc} = F \cdot \sigma_{éc}. \tag{17.6}$$

En même temps, la charge extérieure en vertu de (17.2) sera

$$P_{1éc} = (1 + 2\cos^3\alpha) F\sigma_{éc}, \tag{17.7}$$

tandis que les efforts agissants dans les tiges extrêmes du système étudié, devenu maintenant un système isostatique, seront

$$N_2 = N_3 = \frac{P - F\sigma_{éc}}{2\cos\alpha}. \tag{17.8}$$

La capacité portante pour la structure en question de supporter une charge $P > P_{1éc}$ sera épuisée quand les contraintes agissant dans les tiges extrêmes atteindront la limite d'écoulement; à ce moment en vertu de (17.8) la charge sera égale à

$$N_2 = N_3 = F\sigma_{éc} = \frac{P_{lim} - F\sigma_{éc}}{2\cos\alpha}.$$

De là, il vient

$$P_{\text{lim}} = (1 + 2\cos\alpha)\, F\sigma_{\text{éc}}. \tag{17.9}$$

Le coefficient de sécurité calculé d'après le principe de l'état limite est

$$n_{\text{lim}} = \frac{P_{\text{lim}}}{P} = \frac{(1 + 2\cos\alpha)\, F\sigma_{\text{éc}}}{P}. \tag{17.10}$$

Comparant (17.5) et (17.10), on remarque que $n_{\text{lim}} > n_{\text{éc}}$. Par exemple, pour $\alpha = 30°$ le rapport $\frac{n_{\text{lim}}}{n_{\text{éc}}} = 1{,}19$. Ainsi, le calcul d'après le principe de l'état limite a permis de mettre à jour une réserve voilée de résistance de la structure.

§ 92. Calcul en torsion

Pour des barres de section transversale ronde pleine les contraintes tangentielles dans la zone élastique, à une distance ρ du centre de la section (fig. 299), sont données par la formule (§ 46)

$$\tau_\rho = \frac{M_t\,\rho}{J_p}, \tag{17.11}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{W_p}. \tag{17.12}$$

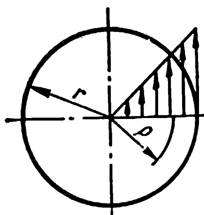


FIG. 299

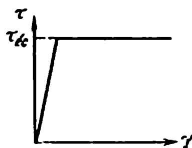


FIG. 300

Calculé d'après le principe des contraintes admissibles, l'état dangereux de la barre à la torsion se détermine par l'apparition de déformations plastiques dans les fibres extrêmes au moment où le couple de torsion

$$M_t = M_{\text{éc}} = \tau_{\text{éc}} W_p. \tag{17.13}$$

Dans ce cas, la barre conserve sa capacité de supporter un moment de torsion qui augmente avec l'accroissement des contraintes jusqu'à la limite d'écoulement $\tau_{éc}$ (fig. 300) dans les points plus proches du centre de la section (fig. 301, *a*).

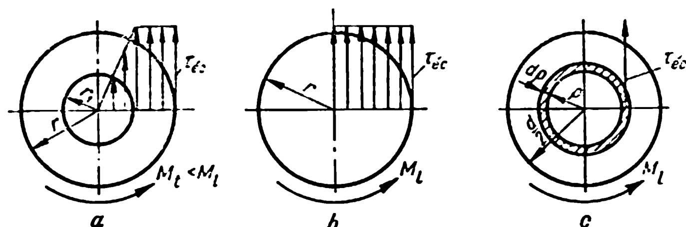


FIG. 301

Calculé d'après le principe de l'état limite pour lequel les déformations plastiques sont réparties sur toute la section (fig. 301, *b*), le moment de torsion sera égal (fig. 301, *c*) à

$$M_{lim} = \int_F \rho \, dF \tau_{éc} = \tau_{éc} \cdot 2\pi \int_0^{d/2} \rho^2 d\rho \qquad (17.14)$$

ou

$$M_{lim} = \tau_{éc} \frac{\pi d^3}{12} . \qquad (17.15)$$

La grandeur

$$\frac{\pi d^3}{12} = W_{p(pl)} \qquad (17.16)$$

est dite *module de résistance plastique en torsion*. On a alors

$$M_{lim} = \tau_{éc} \cdot W_{p(pl)}. \qquad (17.17)$$

Le rapport du moment limite M_{lim} au moment $M_{éc}$ obtenu de la formule (17.13) sera

$$\frac{M_{lim}}{M_{éc}} = \frac{W_{p(pl)}}{W_p} = \frac{\pi d^3 \cdot 16}{12 \cdot \pi d^3} = \frac{4}{3}$$

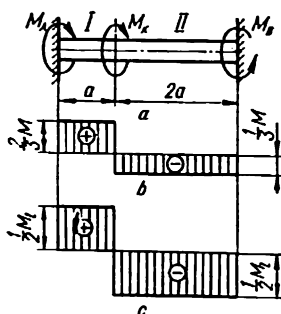


FIG. 302

ou

$$M_{\text{lim}} = \frac{4}{3} M_{\text{éc}} = 1{,}33\, M_{\text{éc}}.$$

Telle est la réserve de résistance voilée d'une barre ronde en torsion qui se met à jour lors du passage du calcul d'après le principe des contraintes admissibles au calcul d'après le principe de l'état limite.

Dans le cas d'un système hyperstatique que montrent les fig.302, *a*, *b*, *c*, le taux de sécurité calculé d'après le principe de l'état limite s'avère être de 1,78 fois plus grand que pour un calcul d'après le principe des contraintes admissibles.

§ 93. Calcul en flexion

En flexion, les contraintes normales sont réparties sur la hauteur de la section (fig. 303, *a*) d'une façon inégale et à une distance y de la ligne neutre elles sont données par la formule de Navier (10.6)

$$\sigma = \frac{My}{J}.$$

Les contraintes maximales à l'extrémité de la section sont

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{W},$$

où W est le module de résistance en flexion qui, par exemple, pour une poutre de section rectangulaire ayant une largeur b et une hauteur h, est égal à

$$W = \frac{bh^2}{6}.$$

Calculée d'après le principe des contraintes admissibles la valeur dangereuse que peut atteindre le moment fléchissant sera (si les limites

d'écoulement sont identiques en traction comme en compression)

$$M_{éc} = \sigma_{éc} W. \tag{17.18}$$

Avec cette valeur la poutre est capable de supporter un moment fléchissant en augmentation. Au fur et à mesure que le moment fléchissant croît par rapport à $M_{éc}$, l'état plastique du matériau se répand dans la direction de l'axe neutre (fig. 303, *b*) jusqu'à l'épuisement total de la capacité por-

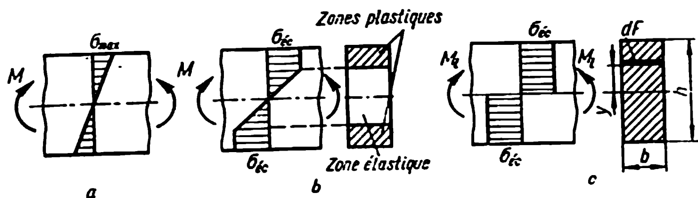


FIG. 303

tante de la poutre. L'état limite surviendra au moment où l'écoulement se sera répandu sur toute la section transversale (fig. 303, *c*), après quoi la déformation ultérieure de la poutre va se produire sans augmentation du moment fléchissant. Dans la section considérée se forme une charnière dite rotule plastique qui transmet un moment fléchissant égal au moment fléchissant limite que l'on détermine, pour une section symétrique par rapport à la ligne neutre, d'après la formule

$$M_{lim} = \int_F \sigma_{éc} y dF = \sigma_{éc} \cdot 2 \cdot \int_{F/2} y\, dF = \sigma_{éc} \cdot 2 \cdot S_{max}, \tag{17.19}$$

où S_{max} est le moment statique de l'aire d'une moitié de la section transversale par rapport à l'axe neutre.

Il est convenu d'appeler la grandeur $2S_{max}$ moment résistant plastique et de la désigner par W_{pl}. On aura alors

$$M_{lim} = \sigma_{éc} W_{pl}. \tag{17.20}$$

Le rapport

$$\frac{M_{lim}}{M_{éc}} = \frac{W_{pl}}{W} \tag{17.21}$$

caractérise le taux d'accroissement du coefficient de sécurité de la poutre quand on passe au calcul d'après le principe de l'état limite (des charges limites). Dans le cas d'une poutre de section rectangulaire

$$\frac{W_{pl}}{W} = \frac{\frac{bh^2}{4}}{\frac{bh^2}{6}} = 1,5.$$

Pour des profilés en I le rapport moyen $\frac{W_{pl}}{W} = 1,18$.

Le tableau 37 donne des formules de calcul permettant de déterminer les moments résistants plastiques pour certaines sections des poutres.

Tableau 37

Moments résistants plastiques pour certaines sections des poutres

Section	Moments résistants plastiques
	$W_{pl} = \frac{bh^2}{4}$; $W_{pl} = 1{,}5\ W_x$
	$W_{pl} = \frac{h^2}{3(b_2 - b_1)^2}\left[b_1^3 + b_2^3 - (b_1^2 + b_2^2)\sqrt{\frac{b_1^2 + b_2^2}{2}} \right]$
	$W_{pl} = \frac{bh^2}{6}(2 - \sqrt{2}) \approx 0{,}0977\ bh^2$; $W_{pl} \approx 2{,}36\ W_x$
	$W_{pl} = \frac{d^3}{6}$; $W_{pl} = 1{,}7\ W_x$

Section	Moments résistants plastiques
	$W_{pl} = \frac{1}{6}(d_{ext}^3 - d_{int}^3) \approx d^2\delta$; $W_{pl} = 1{,}7\,\frac{1-\alpha^3}{1-\alpha^4}\,W_x$; $\alpha = \frac{d_{int}}{d_{ext}}$
	$W_{pl} = 2S_x$; $W_{pl} \approx (1{,}14 \text{ à } 1{,}18)\,W_x$

CHAPITRE 18

Stabilité des barres comprimées

§ 94. Equilibre élastique, stable et instable

Dans un système se trouvant dans un état déformé, l'équilibre entre les sollicitations extérieures et les efforts élastiques internes qu'elles suscitent peut être non seulement stable, mais aussi instable.

Un équilibre élastique est *stable* si, tout petit que soit l'écart de l'état d'équilibre, le corps en déformation tend à revenir dans son état initial et le fait lorsqu'on élimine l'action extérieure qui était à l'origine de cette perturbation de l'état d'équilibre initial. Un équilibre élastique est *instable* si, après avoir perdu l'équilibre sous l'action d'une sollicitation quelconque, le corps en déformation continue de se déformer dans le même sens que cette déviation imprimée et ne revient pas dans son état initial lorsque la sollicitation cesse son action. Entre ces deux états d'équilibre se trouve un état transitoire dit *critique*. Lorsqu'un corps en déformation se trouve dans l'état critique, il est dans un équilibre indifférent: il peut conserver la forme initiale ou bien la perdre, poussé par une sollicitation toute petite qu'elle soit.

La stabilité d'une forme d'équilibre d'un corps en déformation dépend de la valeur de la charge qui lui est appliquée. *On appelle charge critique, que l'on désigne par* P_{cr}, *la charge qui une fois surpassée provoque la perte de stabilité de la forme initiale du corps.*

La fig. 304, *a*, *b*, *c* montre les cas possibles de déformation d'une barre en fonction de la force de compression: pour $P < P_{cr}$, la forme d'équilibre reste stable (fig. 304, *a*); pour $P = P_{cr}$, on a un état d'équilibre indifférent et la barre peut prendre une des trois positions montrées sur la fig. 304, *b* par une ligne grasse et des lignes en pointillé; pour $P > P_{cr}$, la barre perd de stabilité et s'incurve, c'est-à-dire la forme d'équilibre rectiligne cesse d'être stable (fig. 304, *c*).

Lorsque les charges atteignent leurs valeurs critiques, cela signifie que la structure se détruit, car la forme instable d'équilibre va être inévitablement perdue, ce qui entraine pratiquement un accroissement illimité des déformations et des contraintes. D'ordinaire, la destruction survient

instantanément sous l'action de la flexion et pour des valeurs insignifiantes des contraintes de compression au moment où la résistance de l'élément en compression est encore loin d'être épuisée. Pour assurer une marge déterminée de stabilité il faut que soit respectée la condition

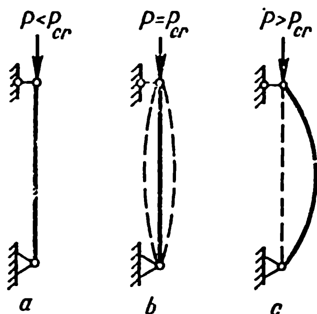


FIG. 304

$$P \leqslant [P], \qquad (18.1)$$

où P est la charge sollicitante; $[P]$, charge admissible qui pour un coefficient de la marge de stabilité n_s est égale à

$$[P] = \frac{P_{cr}}{n_s}. \qquad (18.2)$$

Ainsi, quand on calcule les systèmes élastiques à la stabilité (en particulier les systèmes types tels que les barres comprimées), il faut d'abord savoir déterminer la valeur de la force critique P_{cr}.

Dans ce qui suit nous examinerons les formules principales permettant de déterminer les charges critiques pour une barre longue et mince en compression ou, comme on dit, en flambage.

§ 95. Formule d'Euler pour la détermination de la charge critique d'une barre comprimée

Dans l'hypothèse que la force critique P_{cr} ne suscite pas dans la barre des contraintes supérieures à la limite de proportionnalité et que seules des déviations infimes de la forme rectiligne ont lieu, on peut déterminer la valeur de la force critique P_{cr} pour une barre comprimée de longueur l et fixée d'après le schéma de la fig. 305, *a* de l'équation différentielle approximative suivante qui décrit l'axe incurvé d'une poutre (§ 54):

$$EJ_{min} \frac{d^2w(z)}{dz^2} = M(z), \qquad (18.3)$$

où J_{min} est le plus petit moment d'inertie de la section de la barre (en flambage la flexion se produit perpendiculairement à l'axe correspondant à la rigidité la plus faible); $M(z)$, moment fléchissant égal à

$$M(z) = -Pw. \qquad (18.4)$$

Mettant (18.4) dans (18.3), nous aurons

$$EJ_{\min}\frac{d^2w}{dz^2}+Pw=0$$

ou

$$\frac{d^2w}{dz^2}+k^2w=0, \tag{18.5}$$

avec

$$k^2=\frac{P}{EJ_{\min}}. \tag{18.6}$$

La solution de cette équation différentielle homogène (18.5) sera

$$w=A\sin kz+B\cos kz,$$

A et B étant des constantes d'intégration qui se déterminent des conditions limites. En particulier, pour le cas d'une fixation articulée des bouts de la barre comprimée (fig. 305, *a*), les conditions limites seront

$$w(z)|_{z=0}=0;\quad w(z)|_{z=l}=0.$$

De la première condition limite il vient que $B=0$, donc

$$w(z)=A\sin kz. \tag{18.7}$$

De la seconde condition on obtient

$$A\sin kl=0.$$

Comme

$$A\neq 0,$$

on aura

$$\sin kl=0. \tag{18.8}$$

La racine de cette équation kl peut prendre un nombre infini de valeurs: $0, \pi, 2\pi, \ldots, n\pi$, c'est-à-dire

$$kl=n\pi,$$

n étant un nombre entier arbitraire.

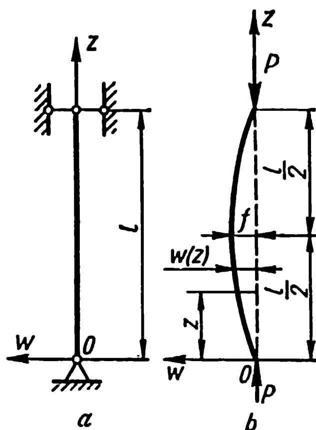


FIG. 305

On doit évidemment exclure la première racine $kl = 0$ ne correspondant pas aux données du problème. Ainsi,

$$k^2l^2 = n^2\pi^2. \tag{18.9}$$

Tenant compte de (18.6) et (18.9), trouvons la valeur critique cherchée de l'effort P

$$P_{cr} = \frac{n^2\pi^2 EJ_{min}}{l^2}. \tag{18.10}$$

Cette expression a été obtenue pour la première fois par Euler et se dit *formule d'Euler.*

La plus petite valeur de la force critique P_{cr}^{I} obtenue pour $n = 1$ et $kl = \pi$ est égale à

$$P_{cr}^{I} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{l^2}. \tag{18.11}$$

L'équation de la déformée pour de petites déformations, en accord avec (18.7), a la forme suivante

$$w(z) = A \sin \frac{n\pi z}{l}.$$

La valeur de A est définie par la valeur de la flèche maximale $w_{max} = f$ quand $\sin \frac{\pi n z}{l} = 1$. Par conséquent,

$$w = f \sin \frac{\pi n z}{l}. \tag{18.12}$$

$w(z)$ atteint son maximum pour une valeur de z pour laquelle se vérifie

$$\frac{dw}{dz} = 0,$$

c'est-à-dire

$$\frac{dw}{dz} = f\frac{n\pi}{l} \cos \frac{n\pi z}{l} = 0$$

ou

$$\cos \frac{\pi n z}{l} = 0.$$

La plus petite valeur de l'argument qui annule le cosinus est égale à $\frac{\pi}{2}$, par conséquent,

$$\frac{n\pi z}{l} = \frac{\pi}{2},$$

d'où l'on obtient

$$z = \frac{l}{2n}. \qquad (18.13)$$

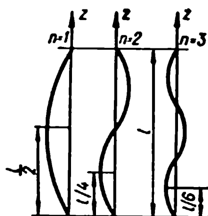


FIG. 306

De l'équation (18.12) ou (18.13) découle que n est égal au nombre de demi-ondes d'une sinusoïde qui diminuent sur la longueur de la barre incurvée (fig. 306). Si $n = 1$, on a $z = \frac{l}{2}$, et la valeur maximale de la flèche $w_{max} = f$ est atteinte au milieu de la barre. Cela correspond au cas principal (fig. 305, *b*) quand, après le flambage de la barre dû à une force critique minimum P_{cr}^{I}, seule une demi-onde de la sinusoïde couvre son axe incurvé.

§ 96. Influence des conditions de fixation des bouts de la barre sur la valeur de la force critique

L'influence des conditions de fixation des bouts des barres sur la valeur de la force critique se prête aisément à la détermination si l'on compare la forme de l'axe incurvé d'une barre, pour différents cas de fixation, avec la forme de l'axe incurvé dans le cas fondamental, c'est-à-dire dans le cas de fixation articulée des deux bouts de la barre.

Barre de longueur l avec un bout encastré, l'autre étant libre (fig. 307, *a*). En flambement la barre se trouve dans un état analogue à celui de la moitié d'une barre de longueur $L = 2l$ aux bouts reposant sur des charnières (fig. 307, *b*). Cela signifie que dans le cas étudié

$$P_{cr}^{I} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(2l)^2} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{4l^2}. \qquad (18.14)$$

Dans ces conditions, l'axe incurvé de la barre (fig. 307, *a*) épouse la forme de la moitié d'une demi-onde de la sinusoïde. Autrement dit, $n = 1/2$.

Barre de longueur l aux bouts encastrés (fig. 308). En flambement, la partie centrale épousera la même forme qu'une barre de longueur $L = l/2$ articulée à ses deux bouts, c'est-à-dire

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{\left(\frac{l}{2}\right)^2} = \frac{4\pi^2 EJ_{min}}{l^2}. \qquad (18.15)$$

Dans ce cas, deux demi-ondes vont se former: une au milieu, avec pour longueur $L = l/2$ et deux moitiés extrêmes de la demi-onde ayant pour longueur $l/2$. En d'autres mots, $n = 2$.

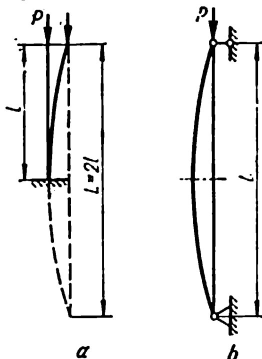


FIG. 307

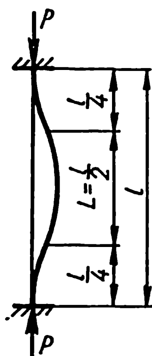


FIG. 308

Barre de longueur l à un bout encastré, l'autre étant articulé (fig. 309). En flambement, la partie droite CB de la barre aura la forme d'une demi-

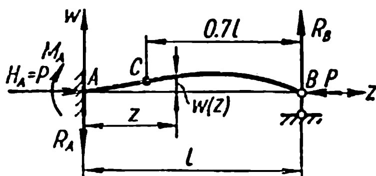


FIG. 309

onde de la sinusoïde. De la comparaison des fig. 309 et 307, *b* on constate que le tronçon CB a une longueur $L = 0{,}7l$ et, par conséquent,

$$P_{cr}^{I} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(0{,}7l)^2}. \qquad (18.16)$$

De la comparaison de (18.11) avec (18.14)-(18.15) il s'ensuit que, dans le cas général, les formules ci-dessus peuvent s'écrire

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{(\nu l)^2}, \tag{18.17}$$

avec $\nu l = l_{réd}$, *longueur réduite*; l, longueur réelle de la barre; ν, *coefficient de réduction de la longueur.*

Si les deux bouts de la barre sont articulés, $\nu = 1$; si l'un des bouts de la barre est encastré, l'autre étant libre, $\nu = 2$; si les deux bouts sont encastrés, $\nu = 1/2$; si l'un des bouts est encastré et l'autre articulé, $\nu = 0{,}7$.

Les cas de fixation de la barre étudiés plus haut sont, dans leur forme pure, très rares en pratique. Les cas les plus fréquents sont ceux où l'un des bouts de la barre est encastré alors que l'autre repose sur un appui élastique ou, enfin, quand les deux bouts sont dotés d'encastrements élastiques.

Considérant le premier des cas mentionnés (fig. 310), on remarque aisément que, après le flambement, le bout doté d'appui élastique se déplace dans la direction verticale d'une valeur égale à f_B, et avec cela apparaît une réaction élastique R_B proportionnelle à l'écart f_B et égale à

$$R_B = c \cdot f_B,$$

c étant le coefficient de rigidité de l'appui B.

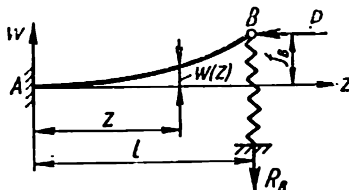


FIG. 310

L'équation différentielle de la ligne élastique sera alors

$$EJ_{\min} \frac{d^2 w}{dz^2} = P(f_B - w) - cf_B(l - z) \tag{18.18}$$

$$\frac{d^2w}{dz^2} = k^2(f_B - w) - \frac{cf_B}{EJ_{\min}}(l - z), \tag{18.19}$$

avec

$$k^2 = \frac{P_{cr}}{EJ_{\min}}.$$

Mettant l'équation (18.19) sous la forme suivante:

$$\frac{d^2w}{dz^2} + k^2w = k^2f_B\left(1 - \frac{cl}{P_{cr}}\right) + k^2\frac{cf_B}{P_{cr}}z, \tag{18.20}$$

trouvons sa solution

$$w = C\sin kz + D\cos kz + f_B\left(1 - \frac{c}{P_{cr}}l\right) + \frac{c}{P_{cr}}f_Bz. \tag{18.21}$$

Les constantes d'intégration et la charge critique se déterminent des conditions limites:
pour $z = 0$

$$w(0) = w_A = 0 \tag{18.22}$$

$$\frac{dw(0)}{dz} = \theta(0) = 0; \tag{18.23}$$

pour $z = l$

$$w(l) = w_B = f_B. \tag{18.24}$$

De (18.22) il vient

$$D = -f_B\left(1 - \frac{c}{P_{cr}}l\right).$$

Pour pouvoir nous servir de (18.23), calculons la dérivée de (18.21):

$$\frac{dw}{dz} = kC\cos kz - kD\sin kz + \frac{c}{P_{cr}}f_B,$$

de là, pour $z = 0$, nous aurons

$$kC + \frac{c}{P_{cr}} f_B = 0$$

ou

$$C = -\frac{c}{kP_{cr}} f_B.$$

Introduisant les valeurs de C et D obtenues dans (18.21), trouvons

$$w(z) = -\frac{c}{kP_{cr}} f_B \sin kz - f_B\left(1 - \frac{c}{P_{cr}} l\right)\cos kz + \\ + f_B\left(1 - \frac{c}{P_{cr}} l\right) + \frac{cf_B}{P_{cr}} z. \qquad (18.25)$$

Utilisons la condition limite (18.24). Posant dans (18.25) $z = l$, trouvons

$$w(l) = -\frac{c}{kP_{cr}} f_B \sin kl - f_B\left(1 - \frac{c}{P_{cr}} l\right)\cos kl + \\ + f_B\left(1 - \frac{c}{P_{cr}} l\right) + \frac{c}{P_{cr}} f_B l = f_B$$

ou

$$-\frac{c}{kP_{cr}} \sin kl - \left(1 - \frac{c}{P_{cr}} l\right)\cos kl = 0,$$

de là

$$\operatorname{tg} kl = kl\left(1 - \frac{P_{cr}}{cl}\right). \qquad (18.26)$$

A supposer que de cette équation on ait trouvé la plus petite valeur de k, on aura par là même trouvé la valeur minimum de la charge critique

$$P_{cr} = k^2 EJ_{min}.$$

Etudions deux cas limites. Posant $c = 0$, trouvons

$$\operatorname{tg} kl = \infty; \quad kl = \frac{\pi}{2},$$

c'est-à-dire nous avons le schéma de calcul pour lequel l'un des bouts (le bout gauche) est encastré tandis que l'autre (le bout droit) est libre

(fig. 307, *a*). La valeur de la force critique s'obtient alors de la formule (18.14).

Posant $c = \infty$, de (18.26) nous aurons $\operatorname{tg} kl = kl$; $kl = \frac{\pi}{0{,}7}$, et la valeur de la force critique (18.16) correspondant au cas où l'un des bouts de la barre est encastré tandis que l'autre articulé (fig. 309.)

Par conséquent, la variation du coefficient d'élasticité c de zéro à l'infini peut être prise en considération à l'aide du coefficient de réduction ν qui varie dans ce cas de 2 à 0,7.

Les valeurs du coefficient de réduction de la longueur ν ainsi que celles du coefficient de stabilité $\eta = k^2 l^2$ pour des barres comprimées au centre, de sections transversales constante et variable, sont données dans le tableau 38 pour différents cas de mise en charge et de fixation de ces barres. Le tableau 39 offre les valeurs des charges critiques pour une bande et pour certaines poutres en double T.

§ 97. Sur le flambement survenant à des contraintes supérieures à la limite de proportionnalité du matériau

La formule d'Euler a été obtenue de l'équation différentielle de la ligne élastique et on ne peut donc s'en servir que dans le cas où la loi de Hooke reste valable, c'est-à-dire tant que la contrainte critique suscitée dans une barre comprimée par une charge critique P_{cr}^{I} ne dépasse pas la limite de proportionnalité

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{F} \leqslant \sigma_{pr}.$$

Mettons la contrainte critique dans la forme suivante

$$\sigma_{cr} = \frac{P_{cr}^{I}}{F} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{F(\nu l)^2} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\nu l}{i}\right)^2},$$

où $i = i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{F}}$ est le plus petit rayon de giration principal de l'aire de la section de la barre (§ 10) ou

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}, \tag{18.27}$$

avec

$$\lambda = \frac{\nu l}{i_{\min}} \tag{18.28}$$

une grandeur adimensionnelle dite *flexibilité de la barre*; de (18.27) on voit que la contrainte critique ne dépend que du module d'élasticité E et de la flexibilité λ.

En construisant la courbe de dépendance $\sigma_{cr} = f(\lambda)$ (fig. 311), l'*hyperbole d'Euler*, on peut se convaincre que, pour un matériau donné (dont le module d'élasticité E est connu), la formule (18.27) se vérifie à partir d'une valeur déterminée de la flexibilité qu'on peut trouver de la condition

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \leqslant \sigma_{pr}.$$

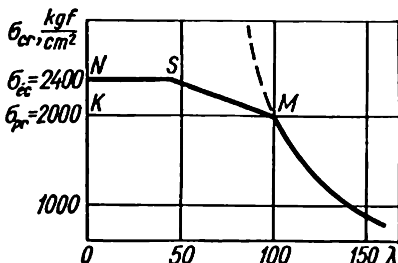


FIG. 311

Déterminons la flexibilité limite $\lambda_{\lim}$ au-dessous de laquelle on n'est plus autorisé de se servir de la formule (18.27):

$$\lambda_{\lim} \geqslant \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{pr}}}.$$

Ainsi, pour un acier de nuance Cт. 3 dont le module d'élasticité est $E = 2 \cdot 10^6$ kgf/cm², $\sigma_{pr} \approx 2000$ kgf/cm²,

$$\lambda < \lambda_{\lim} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{pr}}} = \sqrt{\frac{3{,}14^2 \cdot 2 \cdot 10^6}{2000}} \approx 100,$$

autrement dit, on ne peut se servir de la formule d'Euler (18.27) que dans les limites du tronçon montré en ligne forte sur la fig. 311 correspondant à une flexibilité λ non inférieure à 100.

Cependant, comme en témoigne l'expérience, même sur le tronçon où $\lambda < \lambda_{lim}$ quand dans la barre agissent des contraintes supérieures à σ_{pr} pour lesquelles la formule d'Euler donne des valeurs exagérées des contraintes critiques (le tronçon de l'hyperbole d'Euler montré en pointillé sur la fig. 311), la barre peut connaître un flambement. Dans ce cas, la valeur de la contrainte critique peut être calculée d'après les données expérimentales de F. Yassinski; pour différents matériaux elle est donnée par la formule empirique suivante:

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda. \tag{18.29}$$

Pour une fonte on peut se servir de la dépendance quadratique

$$\sigma_{cr} = a - b\lambda + c\lambda^2. \tag{18.30}$$

Les valeurs des constantes a, b et c sont données ci-bas pour certains matériaux.

Matériau	λ_{lim}	a	b	c
Ст. 2, Ст 3	100	3100	11,4	—
Ст. 5	100	4640	32,6	—
Acier 40	90	3210	11,6	—
Acier au silicium	100	5890	38,2	—
Bois (pin)	110	293	1,94	—
Fonte	80	7760	120	0,53

Pour certaines valeurs de la flexibilité λ_0 la valeur de σ_{cr} obtenue des formules (18.29) ou (18.30) devient égale à la contrainte limite en compression, c'est-à-dire pour des matériaux plastiques

$$\sigma_{cr} = \sigma_{éc};$$

pour des matières fragiles

$$\sigma_{cr} = \sigma_B.$$

Les barres dont $\lambda < \lambda_0$ sont dites *barres de faible flexibilité* et ne sont calculées qu'à la résistance. Pour un acier de nuance Ст. 3, par exemple, lorsque $40 < \lambda < 100$, la courbe de dépendance $\sigma_{cr} = f(\lambda)$ obtenue à partir de (18.29) se présente comme une droite inclinée SM (fig. 311) tandis que la partie NS de la courbe, correspondant à $0 < \lambda < 40$, peut être considérée comme une ligne horizontale.

Ainsi, pour un acier de nuance Ст. 3, la courbe $\sigma_{cr} = f(\lambda)$ contient trois tronçons: le tronçon horizontal NS correspondant à $\sigma_{cr} = \sigma_{éc}$; le tronçon oblique SM correspondant à $40 < \lambda < 100$ et l'hyperbole d'Euler correspondant à $\lambda > 100$ (à droite du point M).

§ 98. Stabilité des barres comprimées: calcul à l'aide de coefficients de réduction de la contrainte admissible principale

Les barres à faible flexibilité ($\lambda < \lambda_0$) comprimées au centre conservent leur capacité portante à condition que les contraintes critiques ne dépassent pas la contrainte dangereuse, c'est-à-dire

$$\sigma_{cr} < \sigma_0,$$

avec, pour des matières fragiles, $\sigma_0 = \sigma_B$ pour des matériaux plastiques $\sigma_0 = \sigma_{éc}$. La capacité portante des barres de faible flexibilité se détermine de la condition de résistance du matériau.

Dans le cas des barres de grande flexibilité, on doit considérer comme état dangereux le moment correspondant à l'apparition dans une barre comprimée des contraintes égale à σ_{cr}. Aussi, pour assurer l'aptitude à l'exploitation de la barre il faut remplir la condition de stabilité suivante:

$$\sigma_{cr} \leqslant [\sigma]_s, \qquad (18.31)$$

$[\sigma]_s$ étant la contrainte admissible de stabilité qu'on détermine de la formule

$$[\sigma]_s = \frac{\sigma_{cr}}{n_s}.$$

Ici, n_s est le coefficient de stabilité que l'on adopte toujours quelque peu supérieur au facteur de sécurité ($n_s > n_0$) à cause de l'éventuelle excentricité dans l'application de la charge, de l'incurvation de la barre et de la non-homogénéité du matériau. Pour l'acier, $n_s = 1,8$ à $3,0$; pour la fonte $n_s = 5,0$ à $5,5$; pour le bois $n_s = 2,8$ à $3,2$. Plus grande est la flexibilité, plus petite est n_s adoptée.

En pratique, quand on calcule la stabilité, il est convenu de se servir non pas de la contrainte admissible de stabilité $[\sigma]_s$, mais de la contrainte admissible en compression $[\sigma_-]$ avec un coefficient de correction correspondant φ dont la valeur peut être établie de la relation

$$\frac{[\sigma]_s}{[\sigma_-]} = \frac{\sigma_{cr}}{n_s} \cdot \frac{n_0}{\sigma_0}.$$

De là

$$[\sigma]_s = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_0} \cdot \frac{n_0}{n_s} [\sigma_-]$$

ou

$$[\sigma]_s = \varphi[\sigma_-], \qquad (18.32)$$

avec

$$\varphi = \frac{\sigma_{cr}}{\sigma_0} \cdot \frac{n_0}{n_s} \cdot \qquad (18.33)$$

Ici φ *est le coefficient de réduction de la contrainte admissible en compression ou le coefficient de la contrainte admissible conventionnelle.* Le tableau 40 en offre des valeurs pour différentes flexibilités.

Ainsi, compte tenu de (18.32), on peut maintenant mettre la formule de calcul à la stabilité (18.31) dans la forme suivante:

$$\sigma_{max} < [\sigma]_s = \varphi[\sigma_-]$$

ou

$$\sigma = \frac{N}{F_{brutto}} < \varphi[\sigma_-]. \qquad (18.34)$$

On distingue deux types de calcul à la stabilité: *calcul de vérification* et *calcul d'élaboration de projet.*

Le *calcul de vérification* se fait à partir des dimensions et de la forme de la section transversale de la barre connues en avance et se propose avant tout de déterminer le plus petit moment d'inertie axial J_{min}, l'aire F, e rayon de giration minimal

$$i_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{F}},$$

ainsi que la flexibilité

$$\lambda = \frac{\nu l}{i_{min}} \cdot$$

Connaissant la flexibilité, on trouve ensuite sur le tableau le coefficient φ; on détermine la contrainte admissible de stabilité

$$[\sigma]_s = \varphi[\sigma_-],$$

on compare la contrainte effective $\sigma = \frac{P}{F_{brutto}}$ avec la contrainte admissible de stabilité $[\sigma]_s$ pour établir si se vérifie la condition

$$\sigma \leqslant [\sigma]_s.$$

Quand on procède à un *calcul d'élaboration de projet*, on part de la condition

$$\sigma = \frac{P}{\varphi F_{\text{brutto}}} < [\sigma_{-}]. \qquad (18.35)$$

La section requise se détermine de la formule

$$F_{\text{brutto}} = \frac{P}{\varphi [\sigma_{-}]}. \qquad (18.36)$$

Outre l'aire cherchée F_{brutto}, le coefficient φ constitue lui aussi une inconnue dans cette dernière relation. C'est pourquoi, quand on choisit les sections on est obligé d'utiliser la méthode d'approximations successives en variant la valeur du coefficient φ. D'ordinaire, lors du premier essai on prend $\varphi_1 = 0{,}5$ à $0{,}6$. Avec φ_1 ainsi adopté, on détermine F_{brutto} d'après la formule (18.36) et l'on choisit la section correspondante. Connaissant la section et, après avoir déterminé $J_{\min}$, $i_{\min}$ et λ, on établit la valeur effective φ_1'. Si φ_1' diffère sensiblement de φ_1, c'est que la contrainte différera aussi de la contrainte admissible. Il faut alors reprendre le calcul, c'est-à-dire entreprendre un second essai en adoptant une valeur intermédiaire entre les coefficients φ_1 et φ_1':

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2}.$$

Après ce second essai on établit φ_2'. Si un troisième essai s'avère indispensable, on reprend le calcul pour

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2'}{2},$$

et ainsi de suite. En pratique, on peut se limiter à deux ou trois essais.

§ 99. Choix du matériau et de la forme rationnelle pour les sections transversales des barres comprimées

Pour les barres de grande flexibilité ($\lambda \geqslant \lambda_{\lim}$) lorsque $\sigma_{\text{cr}} < \sigma_{\text{pr}}$, le module d'élasticité E est la seule caractéristique déterminant l'aptitude de la barre à résister au flambement. Par conséquent, il est évident que pour des barres soumises à la compression et dont E varie faiblement on n'a aucun intérêt à employer un acier à résistance élevée. Pour ce qui est de la forme de la section transversale, elle sera rationnelle si elle permet la valeur la plus élevée du plus petit rayon de giration $i_{\min}$ pour une aire donnée.

Introduisons une caractéristique adimensionnelle

$$\xi = \frac{i_{min}}{\sqrt{F}},$$

que nous appellerons *rayon de giration spécifique*. Les données citées ci-après permettent de juger sur la rationnalité de certaines sections.

Section	ξ
Section en tube $\left(\alpha = \frac{d_{int}}{d_{ext}} = 0{,}95 \text{ à } 0{,}8\right)$	2,25 à 1,64
Section en tube ($\alpha = 0{,}7$ à 0,8)	1,2 à 1,0
Section à cornière	0,5 à 0,3
Section à double T	0,41 à 0,27
Section en U	0,41 à 0,29
Section carrée	0,289
Section circulaire	0,283
Section rectangulaire ($h = 2b$)	0,204

L'analyse de ces données montre que les plus rationnelles sont les sections en tube et les sections en caisson à parois minces. Les sections rectangulaires pleines sont les moins rationnelles.

Quand on élabore les projets pour des barres dont la capacité portante est déterminée par la résistance au flambement, il faut tendre à ce que la barre soit d'égale stabilité dans toutes les directions, autrement dit, à ce que les moments d'inertie principaux soient, dans la mesure du possible, identiques.

§ 100. Flexion composée

La flexion d'une barre est dite composée si dans ses sections transversales apparaissent des moments fléchissants dus aussi bien à des sollicitations longitudinales qu'à des charges transversales (fig. 312).

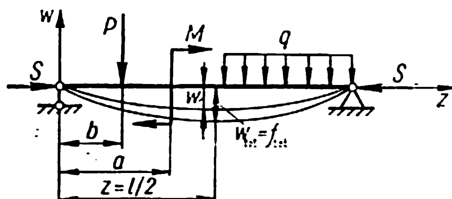


FIG. 312

Le moment fléchissant total M_{tot} agissant dans les sections transversales se calcule en tenant compte des flèches de l'axe de la barre

$$|M_{tot}(z)| = |M(z)| + |Sw_{tot}(z)|, \tag{18.37}$$

où $M(z)$ est le moment fléchissant dû à l'action de la charge transversale; $Sw_{tot}(z)$, moment fléchissant dû à l'action de la charge axiale S. La détermination de la valeur du moment fléchissant total $M_{tot}(z)$ se complique du fait que, dans ce cas, on n'est plus autorisé à se servir du principe de l'indépendance des effets des forces.

Examinons une méthode approximative de détermination du moment fléchissant $M_{tot}(z)$. Elle est basée sur l'hypothèse que la déformée de la, poutre épouse, sous l'action d'une charge transversale, la forme sinusoïdale c'est-à-dire

$$w(z) \approx f \sin \frac{\pi z}{l} \cdot \tag{18.38}$$

S'il y a une force longitudinale, on pose aussi, approximativement

$$w_{tot}(z) \approx f_{tot} \sin \frac{\pi z}{l} \cdot \tag{18.39}$$

Cette hypothèse permet d'obtenir une précision suffisante pour une poutre aux appuis articulés soumise à l'action de charges transversales dirigées dans un même sens, en particulier, si la déformation de la poutre est symétrique par rapport à son milieu lorsque $w_{tot}\left(\frac{l}{2}\right) = f_{tot}$.

Les équations différentielles de la ligne élastique en flexion transvesale et en flexion composée s'écriront, respectivement, comme suit

$$\frac{d^2w(z)}{dz^2} = \frac{M(z)}{EJ}; \tag{18.40}$$

$$\frac{d^2w_{tot}(z)}{dz^2} = \frac{M(z)}{EJ} - \frac{Sw_{tot}(z)}{EJ}. \tag{18.41}$$

Excluant $M(z)$ des équations (18.40) et (18.41), compte tenu de (18.38) et (18.39), nous aurons

$$(f_{tot} - f)\frac{d^2}{dz^2}\left(\sin\frac{\pi z}{l}\right) = -\frac{S}{EJ} f_{tot} \sin\frac{\pi z}{l}.$$

Après dérivation nous aurons

$$\frac{\pi^2}{l^2}(f_{tot} - f) = \frac{S}{EJ} f_{tot}. \tag{18.42}$$

Introduisant la désignation

$$\frac{\pi^2 EJ}{l^2} = P_e \tag{18.43}$$

trouvons de l'équation (18.42) l'expression qui donne la flèche au milieu de la travée de la poutre en flexion composée

$$f_{tot} = \frac{f}{1 - \frac{S}{P_e}}. \tag{18.44}$$

La formule (18.44) donne des résultats satisfaisants tant que la force de compression S ne dépasse pas 0,8 P_{cr}^{I}. Supposant que les moments fléchissants sont proportionnels aux flèches, on peut, en accord avec (18.44), obtenir une formule approximative simple permettant de déterminer le moment fléchissant en flexion composée

$$M_{tot} = \frac{M}{1 - \frac{S}{P_e}}. \tag{18.45}$$

La valeur des contraintes maximales agissant dans une section de la barre va alors se déterminer de la formule

$$\sigma_{max} = \frac{S}{F} + \frac{(M_{tot})_{max}}{W} \tag{18.46}$$

ou, compte tenu de (18.45), de la formule

$$\sigma_{max} = \frac{S}{F} + \frac{M}{W\left(1 - \frac{S}{P_e}\right)} . \tag{18.47}$$

De cette dernière formule découle que le principe de l'indépendance des effets des forces ne se vérifie pas ici.

Le tableau 41 donne les équations du moment fléchissant et de la ligne élastique pour quelques cas de flexion composée des poutres de section transversale constante.

Tableau 38

Coefficients ν et η pour la détermination de la charge critique des barres comprimées au centre d'après la formule $P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{(\nu l)^2} = \eta \frac{EJ}{l^2}$

Nº d'ordre	Schéma de la barre et de sa mise en charge	Coefficient de réduction de la longueur ν	Coefficient de stabilité η
1		1	9,8696
2		0,699	20,199
3		2	2,4674
4			9,8696

5	P, l	2	2,4674
6	P, l	0,5	39,4784
7	P, l	0,699	20,199
8	P, a, l	$\frac{a}{l}$ | ν 0 | 2 0,1 | 1,87 0,2 | 1,73 0,3 | 1,6 0,4 | 1,47 0,5 | 1,35 0,6 | 1,23 0,7 | 1,13 0,8 | 1,06 0,9 | 1,01	$\frac{a}{l}$ | η 0 | 2,4674 0,1 | 2,832 0,2 | 3,283 0,3 | 3,845 0,4 | 4,551 0,5 | 5,438 0,6 | 6,511 0,7 | 7,726 0,8 | 8,874 0,9 | 9,637

Suite

Nº d'ordre	Schéma de la barre et de sa mise en charge	Coefficient de réduction de la longueur ν		Coefficient de stabilité η	
		$\frac{a}{l}$	ν	$\frac{a}{l}$	η
9		0	2	0	2,467
		0,1	1,85	0,1	2,883
		0,2	1,7	0,2	3,414
		0,3	1,55	0,3	4,105
		0,4	1,4	0,4	5,021
		0,5	1,26	0,5	6,26
		0,6	1,11	0,6	7,99
		0,7	0,975	0,7	10,39
		0,8	0,852	0,8	13,59
		0,9	0,757	8,9	17,24
		P_2/P_1	ν	P_2/P_1	η
		0	1	0	9,8696
		0,25	0,95	0,25	10,93
		0,5	0,91	0,5	11,92
		0,75	0,89	0,75	12,46
		1	0,87	1	13,04
		2	0,82	2	14,68

10	$P_{cr} = (P_1 + P_2)_{cr}$	Dans le cas général, pour $m = \frac{P_1 + P_2}{P_1}$	—
11	$P_{cr} = (P_1 + P_2)_{cr}$	Pour $m = \frac{P_1 + P_2}{P_1}$ et $n = \frac{a}{b}$	—
12		0,773	16,5

Suite

Nº d'ordre	Schéma de la barre et de sa mise en charge	Coefficient de réduction de la longueur ν	Coefficient de stabilité η
13	$\frac{P}{3}$, $\frac{P}{3}$, $\frac{2}{3}P$; $\frac{l}{4}$, $\frac{l}{2}$, $\frac{l}{4}$	0,858	13,41
14	P_2, P_1, a, l $P_{cr} = (P_1 + P_2)_{cr}$		(see tables below)

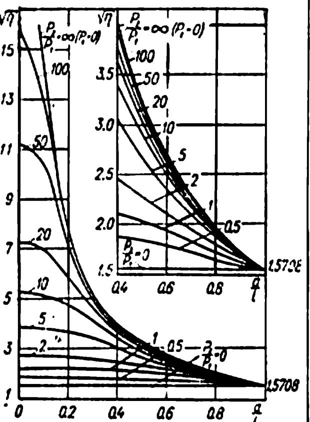
Nº 14 — Coefficient de stabilité η:

$\frac{a}{l}$	$\frac{P_2}{P_1}$ = 0	0,1	0,2	0,5
0	2,467	2,714	2,961	3,701
0,1	2,467	2,714	2,960	3,698
0,2	2,467	2,710	2,953	3,679
0,3	2,467	2,703	2,936	3,622
0,4	2,467	2,688	2,904	3,525
0,5	2,467	2,665	2,856	3,384
0,6	2,467	2,635	2,793	3,211
0,7	2,467	2,599	2,715	3,020
0,8	2,467	2,557	2,636	2,821
0,9	2,467	2,513	2,551	2,641
1,0	2,467	2,467	2,467	2,467

$\frac{a}{l}$	$\frac{P_2}{P_1}$ = 1	2	5	10
0	4,935	7,402	14,80	27,14
0,1	4,930	7,377	14,68	26,66
0,2	4,880	7,207	13,78	23,19

0,3	4,712	6,796	11,70	16,82
0,4	4,470	6,074	9,187	11,57
0,5	4,136	5,268	7,060	8,210
0,6	3,759	4,497	5,504	6,048
0,7	3,385	3,830	4,376	4,660
0,8	3,040	3,280	3,551	3,685
0,9	2,734	2,832	2,936	2,986
1,0	2,467	2,467	2,467	2,467

Dans le cas général



Suite

Nº d'ordre	Schéma de la barre et de sa mise en charge	Coefficient de réduction de la longueur ν	Coefficient de stabilité η
15	P, 2P, 3P; $\frac{l}{3}$, $\frac{l}{3}$, $\frac{l}{3}$; l	3,952	0,632
16	P_1, P_2, P_i, P_n; a_1, a_2, a_i, $a_n = l$ $P_{cr} = \left[P_1\left(\frac{a_1}{l}\right)^2 + P_2\left(\frac{a_2}{l}\right)^2 + \ldots + P_i\left(\frac{a_i}{l}\right)^2 + \ldots + P_n\right]_{cr}$	2	$\frac{\pi^2}{4}$
17	q; l $P_{cr} = (ql)_{cr}$	0,725	18,76

18	q, l $P_{cr} = (ql)_{cr}$	0,434	52,5
19	q, l $P_{cr} = (ql)_{cr}$	1,122	7,839
20	q, l $P_{cr} = (ql)_{cr}$	0,723	18,9
21	q, l $P_{cr} = (ql)_{cr}$	0,577	29,64

Suite

Nº d'ordre	Schéma de la barre et de sa mise en charge	Coefficient de réduction de la longueur ν	Coefficient de stabilité η
22	q, l — $P_{cr} = (ql)_{cr}$	0,366	73,65
23	q, $\frac{l}{2}$, $\frac{l}{2}$, l — $P_{cr} = \left(\frac{ql}{2}\right)_{cr}$	0,560	31,47
24	q, q, $\frac{l}{2}$, $\frac{l}{2}$, l — $P_{cr} = \left(\frac{ql}{2}\right)_{cr}$	0,694	20,49

25	q; $\frac{l}{2}$; $\frac{l}{2}$; l $P_{cr} = \left(\frac{ql}{2}\right)_{cr}$	1,486	4,47
26	q; l $P_{cr} = \left(\frac{ql}{2}\right)_{cr}$	1,388	5,123
27	q; l $P_{cr} = \left(\frac{ql}{2}\right)_{cr}$	0,782	16,126

Suite

N° d'ordre	Schéma de la barre et de sa mise en charge	Coefficient de réduction de la longueur ν	Coefficient de stabilité η
28		—	Pour $n = ql$: $\frac{\pi^2 EJ}{l^2}$ n | η 0 | 9,87 0,25 | 8,62 0,50 | 7,40 0,75 | 6,08 1,0 | 4,77 2,0 | − 0,66 3,0 | − 4,94 4,0 | − 9,87 5,0 | −14,80 Pour de grandes valeurs de n le coefficient η peut s'avérer négatif. Pour assurer la stabilité de l'équilibre de la barre on doit donc lui appliquer une force de traction P
29		—	Pour $n = ql$: $\frac{\pi^2 EJ}{4l^2}$ n | η 0 | 2,47 0,25 | 2,28 0,50 | 2,08 0,75 | 1,91 1,0 | 1,72 2,0 | 0,96

			3,0 — 0,15 4,0 — −0,69 5,0 — −1,56 Voir notation concernant le schéma 28
30	J, J_1, P, a, l	–	see table 30 below
31	J, J_1, P, a, l	–	see table 31 below

30

$J_1 : J$	$a : l$ = 0,2	0,4	0,6	0,8	1
0,01	0,153	0,27	0,598	2,26	π^2
0,1	1,47	2,40	4,50	8,59	π^2
0,2	2,80	4,22	6,69	9,33	π^2
0,4	5,09	6,68	8,51	9,67	π^2
0,6	6,98	8,19	9,24	9,78	π^2
0,8	8,55	9,18	9,63	9,84	π^2
1,0	π^2	π^2	π^2	π^2	π^2

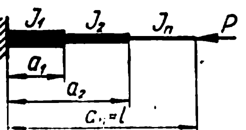
31

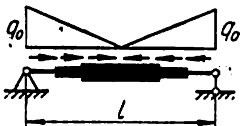
$J_1 : J$	$a : l$ = 0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
0,01	0,614	1,08	2,39	8,48	$4\pi^2$
0,1	5,87	9,48	15,5	17,1	$4\pi^2$
0,2	11,1	16,3	20,5	21,1	$4\pi^2$
0,4	20,2	24,9	26,3	27,5	$4\pi^2$
0,6	27,7	30,6	31,1	32,5	$4\pi^2$
0,8	34,0	35,3	35,4	36,4	$4\pi^2$
1,0	$4\pi^2$	$4\pi^2$	$4\pi^2$	$4\pi^2$	$4\pi^2$

Suite

Nº d'ordre	Schéma de la barre et de sa mise en charge	Coefficient de réduction de la longueur ν	Coefficient de stabilité η
32	J_1, J, P, a, l		Approximativement $2{,}467 : \left[\frac{l-a}{l} + \frac{l-a}{l} \cdot \frac{J}{J_1} + \frac{1}{\pi}\left(\frac{J}{J_1} - 1\right) \sin \frac{\pi a}{l}\right]$ Certaines valeurs concrètes de η:

$a:l$	$\frac{J_1 - J}{J}$										
	0	0,1	0,2	0,5	1,0	2,0	5,0	10	20	50	100
0	2,467	2,243	2,056	1,645	1,234	0,8225	0,411	0,2243	0,1175	0,0484	0,0247
0,1	2,467	2,285	2,126	1,761	1,367	0,944	0,4894	0,2714	0,1436	0,0595	0,0301
0,2	2,467	2,325	2,197	1,881	1,520	1,093	0,5919	0,3350	0,1793	0,0749	0,038
0,3	2,467	2,363	2,262	2,013	1,692	1,277	0,7293	0,4237	0,2302	0,0971	0,0494
0,4	2,467	2,396	2,327	2,141	1,879	1,499	0,9174	0,5498	0,3064	0,1309	0,067
0,5	2,467	2,423	2,379	2,256	2,068	1,756	1,178	0,7462	0,4268	0,1860	0,0958
0,6	2,467	2,444	2,420	2,350	2,235	2,025	1,531	1,052	0,633	0,2848	0,1482
0,7	2,467	2,457	2,446	2,415	2,356	2,256	1,950	1,530	1,018	0,488	0,2588
0,8	2,467	2,464	2,461	2,453	2,440	2,402	2,297	2,106	1,730	0,9991	0,5592
0,9	2,467	2,467	2,466	2,465	2,465	2,459	2,446	2,424	2,374	2,189	1,746
1,0	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467	2,467

<table>
<tr>
<td>33</td>
<td>
</td>
<td>—</td>
<td>$P_{cr} = \eta \dfrac{EJ_1}{l^2}$. Approximativement

$\eta = 2,467 : \left[\left(1 - \dfrac{J_2 - J_1}{J_1} \times \dfrac{(l - a_1)^2}{l^2}\right) \times \left(1 - \dfrac{J_3 - J_2}{J_2} \times \dfrac{(l - a_2)^2}{l^2}\right) \ldots \left(1 - \dfrac{J_n - J_{n-1}}{J_{n-1}} \times \dfrac{(l - a_{n-1})^2}{l^2}\right)\right]$</td>
</tr>
<tr>
<td>34</td>
<td>

$P_{cr} = \left(\dfrac{q_0 l}{4}\right)_{cr}$</td>
<td>—</td>
<td>
<table>
<tr><th rowspan="2">$\dfrac{J_1}{J}$</th><th colspan="5">Nombre de tronçons ayant des moments d'inertie différents</th></tr>
<tr><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>10</th></tr>
<tr><td>0,2</td><td>5,2</td><td>6,32</td><td>6,48</td><td>7,32</td><td>7,4</td></tr>
<tr><td>0,4</td><td>9,88</td><td>10,9</td><td>11,1</td><td>11,2</td><td>11,2</td></tr>
<tr><td>0,6</td><td>14,0</td><td>14,6</td><td>14,7</td><td>14,76</td><td>14,8</td></tr>
<tr><td>0,8</td><td>17,4</td><td>17,8</td><td>17,8</td><td>17,9</td><td>18,0</td></tr>
<tr><td>1,0</td><td>20,5</td><td>20,5</td><td>20,5</td><td>20,5</td><td>20,5</td></tr>
</table>
*
**
</td>
</tr>
</table>

Suite

Nº d'or-dre	Schéma de la barre et de sa mise en charge	Coefficient de réduction de la longueur ν	Coefficient de stabilité η
35	$P_{cr} = \left(\frac{q_0 l}{4}\right)_{cr}$	—	see table 35 below
36		—	see table 36 below

35

$\frac{J_1}{J}$	Nombre de tronçons ayant des moments d'inertie différents: 2	3	4
0,2	18,1	21,8	22,8
0,4	31,2	34,2	34,3
0,6	41,0	42,4	42,4
0,8	49,4	49,5	49,5
1,0	54,8	54,8	54,8

*

**

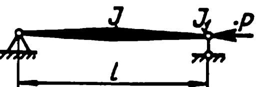
36

Loi de variation du moment d'inertie de la section le long de l'axe

$J(z) = J_0(a + bz)^n$

$\frac{J_1^\circ}{J}$	n = 1	2	3	4
0	3,67	0,25	—	—
0,1	4,67	3,59	3,24	3,12
0,2	5,41	4,73	4,52	4,41
0,4	6,78	6,39	6,28	6,24
0,6	7,78	7,70	7,64	7,64
0,8	8,85	8,83	8,83	8,83
1,0	π^2	π^2	π^2	π^2

$n = 1$ barre pleine de section transversale rectangulaire à hauteur constante; la largeur de la section varie suivant une loi linéaire
$n = 2$ — barre pyramidale composée de quatre membrures angulaires réunies en un treillis (ou revêtues de tôles minces)
$n = 3$ — barre de section rectangulaire à largeur constante; la hauteur de la section varie suivant une fonction linéaire
$n = 4$, barre pleine pyramidale (conique)

37		—	Le moment d'inertie de la section varie le long de l'axe suivant la loi $J(z) = J_0(a + bz)^n$

$\frac{J_1^*}{J}$	n = 0,5	1	1,5	2	3	4
0	—	5,78	—	1,0	—	—
0,1	7,86	6,48	5,78	5,4	5,01	4,81
0,2	7,97	7,01	6,58	6,37	6,14	6,02
0,4	8,31	7,87	7,69	7,61	7,52	7,48
0,6	8,76	8,61	8,54	8,51	8,5	8,47
0,8	9,3	9,27	9,25	9,24	9,23	9,23
1,0	π^2	π^2	π^2	π^2	π^2	π^2

Nº d'ordre	Schéma de la barre et de sa mise en charge	Coefficient de réduction de la longueur ν	Coefficient de stabilité η
38	J, J_1, P, l		Le moment d'inertie de la section varie le long de l'axe suivant la loi $J(z) = J_0(a + bz)^n$
39	J, J_1, P, a, l	—	La variation du moment d'inertie des sections des tronçons extrêmes le long de l'axe se fait d'après la loi $J(z) = J_0(a + bz)^n$

Nº 38:

$\frac{J_1}{J}$	n = 1	2	3	4
0,1	—	14,39	13,7	13,3
0,2	20,35	18,93	18,49	18,23
0,4	26,16	25,54	25,34	25,23
0,6	31,03	30,79	30,71	30,68
0,8	35,42	35,35	35,33	35,32
1,0	$4\pi^2$	$4\pi^2$	$4\pi^2$	$4\pi^2$

Nº 39:

$\frac{J_1}{J}$	$a : l$ = 0	0,2	0,4	0,6	0,8	n
0	5,78	7,04	8,35	9,36	9,8	1
	1,0	1,56	2,78	6,25	9,59	2

0,01	5,87	7,11	8,4	9,4	9,8	1
	3,45	4,73	6,58	8,61	9,71	2
	2,55	3,65	5,42	7,99	9,63	3
	2,15	3,13	4,84	7,53	9,56	4
0,1	6,48	7,58	8,63	9,46	9,82	1
	5,4	6,67	8,08	9,25	9,79	2
	5,01	6,32	7,84	9,14	9,77	3
	4,81	6,11	7,68	9,1	9,77	4
0,2	7,01	7,99	8,9	9,73	9,82	1
	6,37	7,49	8,61	9,44	9,81	2
	6,14	7,31	8,49	9,39	9,81	3
	6,02	7,2	8,42	9,38	9,8	4
0,4	7,87	8,59	9,19	9,7	9,85	1
	7,61	8,42	9,15	9,63	9,84	2
	7,52	8,38	9,1	9,62	9,84	3
	7,48	8,33	9,1	9,62	9,84	4
0,6	8,61	9,12	9,55	9,76	9,85	1
	8,51	9,04	9,48	9,74	9,85	2
	8,5	9,02	9,46	9,74	9,85	3
	8,47	9,01	9,45	9,74	9,85	4
0,8	9,27	9,53	9,69	9,82	9,86	1
	9,24	9,5	9,69	9,82	9,86	2
	9,23	9,5	9,69	9,81	9,86	3
	9,23	9,49	9,69	9,81	9,86	4

Suite

Nº d'ordre	Schéma de la barre et de sa mise en charge	Coefficient de réduction de la longueur ν	Coefficient de stabilité η
40		–	La variation du moment d'inertie des sections des tronçons extrêmes obéit à la loi $J(z) = J_0(a + bz)^n$

$\frac{J_1^*}{J}$	$a : l$ = 0	0,2	0,4	0,6	0,8	n
0,2	20,36	22,36	23,42	25,55	29,0	1
	18,94	22,25	22,91	24,29	27,67	2
	18,48	20,88	22,64	23,96	27,24	3
	18,23	20,71	22,49	23,8	27,03	4
0,4	26,16	27,8	28,96	30,2	33,08	1
	25,54	27,35	28,52	29,69	32,59	2
	25,32	27,2	28,4	29,52	32,44	3
	25,23	27,13	28,33	29,46	32,35	4
0,6	31,04	32,2	32,92	33,8	35,8	1
	30,79	32,02	32,77	33,63	35,64	2
	30,72	31,96	32,72	33,56	35,6	3
	30,68	31,94	32,69	33,54	35,56	4
0,8	35,4	36,0	36,36	36,84	37,84	1
	35,35	35,97	36,34	36,8	37,81	2
	35,33	35,96	36,32	36,8	37,8	3
	35,32	35,96	36,32	36,78	37,8	4

<table>
<tr><td>41</td><td>l, q_0
$P_{cr} = (q_0 l)_{cr}$</td><td>—</td><td>La variation du moment d'inertie de la section le long de l'axe obéit à la loi $J(z) = J\left(\frac{l-z}{l}\right)^n$
<table><tr><td>n</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td></tr><tr><td>η</td><td>7,839</td><td>5,78</td><td>3,67</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>42</td><td>$q = q_0 \frac{l-z}{2}$.
l, q_0
$P_{cr} = \left(\frac{q_0 l}{2}\right)_{cr}$</td><td>—</td><td>La variation du moment d'inertie de la section le long de l'axe obéit à la loi $J(z) = J\left(\frac{l-z}{l}\right)^n$
<table><tr><td>n</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr><tr><td>η</td><td>16,1</td><td>13</td><td>9,87</td><td>6,59</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>43</td><td>$q = q_0\left(\frac{l-z}{}\right)^m$
l, q_0
$P_{cr} = \left(\frac{q_0 l}{m+1}\right)_{cr}$</td><td>—</td><td>La variation du moment d'inertie de la section le long de l'axe obéit à la loi $J(z) = J\left(\frac{l-z}{l}\right)^n$
<table><tr><td rowspan="2">n</td><td colspan="4">m</td></tr><tr><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td></tr><tr><td>0</td><td>27,3</td><td>41,3</td><td>—</td><td>—</td></tr><tr><td>1</td><td>23,1</td><td>36,1</td><td>52,1</td><td>—</td></tr><tr><td>2</td><td>18,9</td><td>30,9</td><td>45,8</td><td>63,6</td></tr><tr><td>3</td><td>14,7</td><td>25,7</td><td>39,5</td><td>—</td></tr><tr><td>4</td><td>10,2</td><td>20,2</td><td>33,0</td><td>—</td></tr></table></td></tr>
</table>

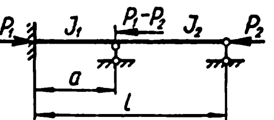
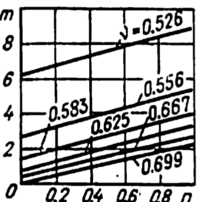
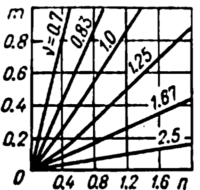
Suite

Nº d'ordre	Schéma de la barre et de sa mise en charge	Coefficient de réduction de la longueur ν	Coefficient de stabilité η
44	P_1, J_1, P_1-P_2, J_2, P_2, a, l	Pour $m = \frac{J_2 a}{J_1(l-a)}$ et $n = \frac{P_2(l-a)}{P_1 a}$ $P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\nu a)^2}$ (graphique : m 0, 2, 4 ; n 0, 0.4, 0.8, 1.2, 1.6 ; ν=0.769, 0.933, 0.909, 1.0)	—

Pour $P_1 = P_2 = P$ et $J_1 = J_2 = J$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{(\nu l)^2} = \eta \frac{EJ}{l^2}$$

$\frac{a}{l}$	ν	$\frac{a}{l}$	η
0	0,699	0	20,19
0,1	0,652	0,1	23,23
0,2	0,604	0,2	27,06
0,3	0,558	0,3	31,75
0,4	0,518	0,4	36,8
0,5	0,500	0,5	39,48
0,6	0,518	0,6	36,8
0,7	0,558	0,7	31,75
0,8	0,604	0,8	27,04
0,9	0,652	0,9	23,23
1,0	0,699	1,0	20,19

45		Pour $m = \frac{J_2 a}{J_1(l-a)}$ et $n = \frac{P_2(l-a)}{P_1 a}$ $P_{cr} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{(\nu a)^2}$   Pour $P_1 = P_2 = P$ et $J_1 = J_2 = J$ $P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{(\nu l)^2} = \eta \frac{EJ}{l^2}$

Suite

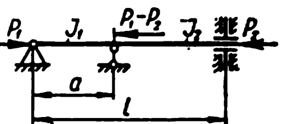
Nº d'ordre	Schéma de la barre et de sa mise en charge	Coefficient de réduction de la longueur ν		Coefficient de stabilité η	
		$\frac{a}{l}$	ν	$\frac{a}{l}$	η
		0	0,699	0	20,19
		0,1	0,646	0,1	23,63
		0,2	0,593	0,2	28,09
		0,3	0,539	0,3	33,96
		0,4	0,487	0,4	41,68
		0,5	0,439	0,5	51,12
		0,6	0,41	0,6	58,84
		0,7	0,412	0,7	58,92
		0,8	0,436	0,8	51,97
		0,9	0,467	0,9	45,27
		1,0	0,500	1,0	39,48
46	P_1, J_1, P_1-P_2, J_2, P_2, a, l	Pour $m = \frac{J_2 a}{J_1(l-a)}$ et $n = \frac{P_2(l-a)}{P_1 a}$ $P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\nu a)^2}$ (graph: m 0, 2, 4, 6; n 0,4, 0,8, 1,2, 1,6; ν=0,525, 0,556, 0,588, 0,625, 0,667, 0,699)		—	

Pour $P_1 = P_2 = P$ et $J_1 = J_2 = J$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{(\nu l)^2} = \eta \frac{EJ}{l^2}$$

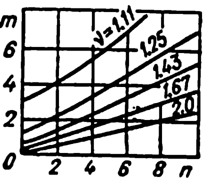
$\frac{a}{l}$	ν	$\frac{a}{l}$	η
0	0,5	0	39,48
0,1	0,463	0,1	46,13
0,2	0,426	0,2	54,45
0,3	0,391	0,3	64,56
0,4	0,362	0,4	75,22
0,5	0,35	0,5	80,76
0,6	0,362	0,6	75,22
0,7	0,391	0,7	64,56
0,8	0,426	0,8	54,45
0,9	0,463	0,9	46,13
1,0	0,5	1,0	39,48

47



Pour $m = \frac{J_2 a}{J_1(l-a)}$ et $n = \frac{P_2(l-a)}{P_1 a}$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\nu a)^2}$$



—

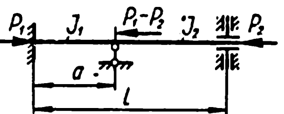
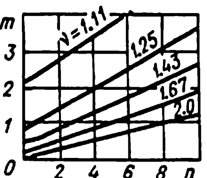
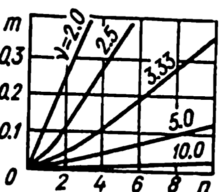
Suite

Nº d'ordre	Schéma de la barre et de sa mise en charge	Coefficient de réduction de la longueur ν	Coefficient de stabilité η
			—

Pour $P_1 = P_2 = P$ et $J_1 = J_2 = J$

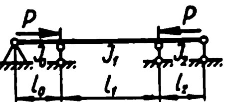
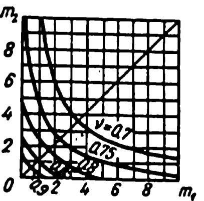
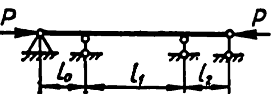
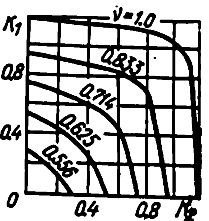
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{(\nu l)^2} = \eta \frac{EJ}{l^2}$$

$\frac{a}{l}$	ν	$\frac{a}{l}$	η
0	1,0	0	9,87
0,1	0,933	0,1	11,83
0,2	0,868	0,2	13,11
0,3	0,804	0,3	15,26
0,4	0,746	0,4	17,72
0,5	0,699	0,5	20,19
0,6	0,672	0,6	21,88
0,7	0,668	0,7	22,14
0,8	0,679	0,8	21,4
0,9	0,693	0,9	20,55
1,0	0,699	1,0	20,19

48	 	Pour $m = \frac{J_2 a}{J_1(l-a)}$ et $n = \frac{P_2(l-a)}{P_1 a}$ $P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\nu a)^2}$   Pour $P_1 = P_2 = P$ et $J_1 = J_2 = J$ $P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{(\nu l)^2} = \eta \frac{EJ}{l^2}$

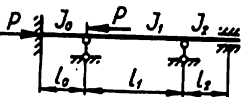
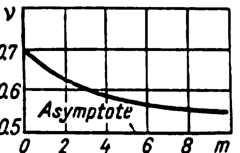
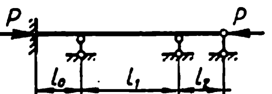
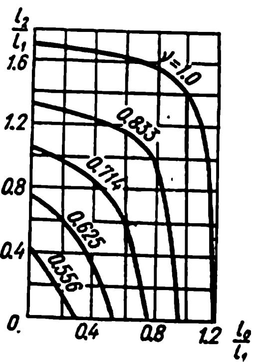
Suite

Nº d'ordre	Schéma de la barre et de sa mise en charge	Coefficient de réduction de la longuer ν	Coefficient de stabilité η
		$\frac{a}{l}$ / ν: 0 / 1,0 0,1 / 0,925 0,2 / 0,85 0,3 / 0,776 0,4 / 0,704 0,5 / 0,636 0,6 / 0,575 0,7 / 0,53 0,8 / 0,507 0,9 / 0,501 1,0 / 0,5	$\frac{a}{l}$ / η: 0 / 9,87 0,1 / 11,53 0,2 / 13,65 0,3 / 16,37 0,4 / 19,9 0,5 / 24,42 0,6 / 29,82 0,7 / 35,1 0,8 / 38,41 0,9 / 39,4 1,0 / 39,48
49	P_2 P_1-P_2 J_1 P_1-P_2 P_2 J_2 l_2 $2l_1$ l_2	Pour $m = \frac{J_2 l_1}{J_1 l_2}$ et $n = \frac{P_2 l_2}{P_1 l_1}$ $P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\nu l_1)^2}$ Les valeurs de ν se déterminent sur les courbes tracées pour le schéma 47	—

50		Pour $m_1 = \frac{3J_0 l_1}{J_1 l_0}$ et $m_2 = \frac{3J_2 l_1}{J_1 l_2}$ $P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{(\nu l_1)^2}$ 	—
51		Pour $k_1 = \frac{l_0}{l_1}$ et $k_2 = \frac{l_2}{l_1}$ $P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{(\nu l_1)^2}$ 	—

Suite

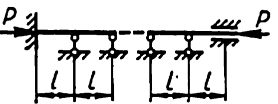
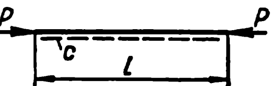
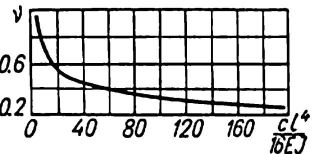
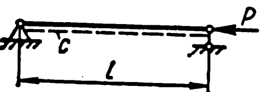
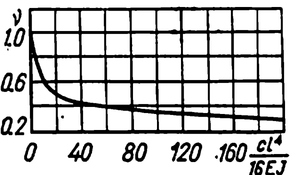
N° d'ordre	Schéma de la barre et de sa mise en charge	Coefficient de réduction de la longueur ν	Coefficient de stabilité η
52		Pour $m = \frac{3J_0 l_1}{J_1 l_0}$	$P_{cr} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{(\nu l_0)^2}$ —
53		Pour $m = \frac{J_2 l_1}{J_1 l_2}$ et $n = \frac{P_2 l_2}{P_1 l_1}$ $P_{cr} = \frac{\pi^2 E J_{min}}{(\nu l_1)^2}$ Les valeurs de ν se déterminent sur les courbes tracées pour le schéma 48	—

54		Pour $m = \frac{3J_0l_1}{J_1l_0}$ $P_{cr} = \frac{\pi^2EJ_{min}}{(\nu l_0)^2}$ 	—
55		$P_{cr} = \frac{\pi^2EJ}{(\nu l_1)^2}$ 	—

Suite

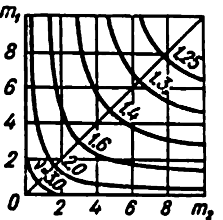
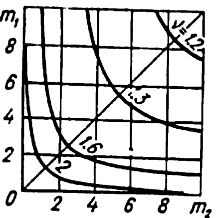
Nº d'ordre	Schéma de la barre et de sa mise en charge	Coefficient de réduction de la longueur ν		Coefficient de stabilité η	
56		1		9,8696	
57		n — nombre de travées			
		n	ν	n	η
		1	0,699	1	20,2
		2	0,879	2	12,77
		3	0,939	3	11,19
		4	0,964	4	10,62
		5	0,977	5	10,34
		6	0,983	6	10,21
		7	0,988	7	10,1
		8	0,99	8	10,07
		9	0,992	9	10,029
		10	0,994	10	9,9895

n — nombre de travées

		n	ν	n	η
58		1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	0,5 0,699 0,814 0,879 0,917 0,939 0,954 0,964 0,971 0,977	1 2 3 4 5 6 7 8 9 10	39,48 20,2 14,9 12,77 11,74 11,19 10,84 10,62 10,47 10,34
59		***** 		—	
60		***** 		—	

Suite

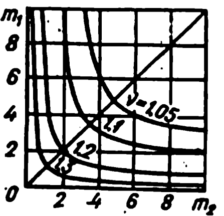
Nº d'ordre	Schéma de la barre et de sa mise en charge	Coefficient de réduction de la longueur ν	Coefficient de stabilité η
61	q, C, l $P_{cr} = \left(\frac{ql}{4}\right)_{cr}$	ν; 0.6; 0.2; 0; 40; 80; 120; 160; $\frac{cl^4}{16EJ}$ *****	—
62	q, C, l $P_{cr} = \left(\frac{ql}{4}\right)_{cr}$	ν; 0.6; 0.2; 0; 40; 80; 120; 160; $\frac{cl^4}{16EJ}$ *****	—
63	P, l	$m_1 = \frac{s_1 l}{EJ}$; $m_2 = \frac{s_2 l}{EJ}$; ***, **** $n = \frac{r_1 r_2 l^3}{(s_1 + s_2)EJ}$ $0{,}5 \leqslant \nu \leqslant \infty$	

	Quelques données concrètes pour: $n = 0$  $n = 0,5$ 	$0 < \eta < 39,48$

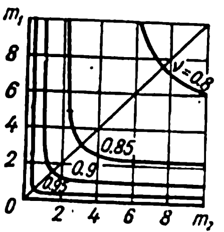
Suite

Nº d'or-dre	Schéma de la barre et de sa mise en charge	Coefficient de réduction de la longueur ν	Coefficient de stabilité η
63		$n = 1$ m_1 8 6 4 2 0 · 2 4 6 8 m_2 · $\nu = 1.15$ 1.2 1.3 1.6 2 $n = 2$ m_1 8 6 4 2 0 · 2 4 6 8 m_2 · $\nu = 1.1$ 1.2 1.5 1.6 2	

$n = 4$

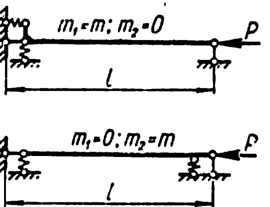
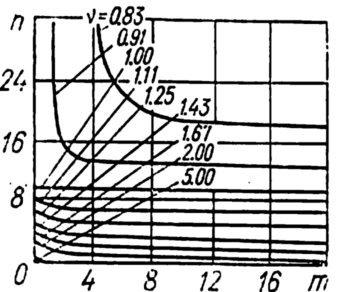
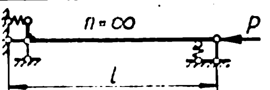


$n = 10$



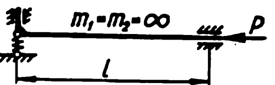
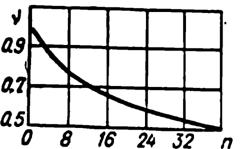
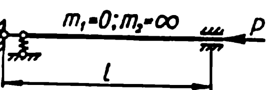
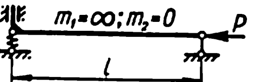
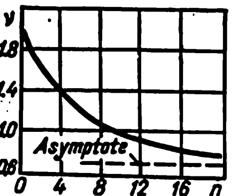
Suite

Nº d'ordre	Schéma de la barre et de sa mise en charge	Coefficient de réduction de la longueur ν	Coefficient de stabilité η
64	$m_1 = m;\ m_2 = \infty$ — P — l $m_1 = \infty;\ m_2 = m$ — P — l	$0{,}5 \leqslant \nu \leqslant 2$ Quelques données concrètes n: 0, 8, 16, 24; m: 0, 4, 8, 12, 16; ν = 0.71, 0.77, 0.83, 0.91, 1.00, 1.11, 1.23, 1.43, 1.67 $m_1 = \frac{s_1 l}{EJ}$, $m_2 = \frac{s_2 l}{EJ}$ et $n = \frac{r_1 r_2 l^3}{(s_1 + s_2)EJ}$ ***, ****	$2{,}4424 \leqslant \eta \leqslant 39{,}48$

65	 	$0{,}7 < \nu < \infty$ Quelques données concrètes  $m_1 = \frac{s_1 l}{EJ}, \quad m_2 = \frac{s_2 l}{EJ}$ et $n = \frac{r_1 r_2 l^{\bullet}}{(s_1 + s_2)EJ}$ ***, ****	$0 < \eta \leqslant 20{,}14$
66	 	$0{,}5 \leqslant \nu < 1$ Les valeurs concrètes de ν peuvent être déterminées de la courbe tracée pour le schéma 50	$9{,}8696 < \eta \leqslant 39{,}48$

Suite

N° d'ordre	Schéma de la barre et de sa mise en charge	Coefficient de réduction de la longueur ν	Coefficient de stabilité η
66	$n = \frac{r_1 r_2 l^3}{(s_1 + s_2)EJ}$ ***,****	Si $m_1 = m_2 = m = \frac{sl}{EJ}$, on aura ν; 0,9; 0,7; 0,5; Asymptote; 0 2 4 6 8 m	
67	$n=0$; P; l $n = \frac{r_1 r_2 l^3}{(s_1 + s_2)EJ}$ ***,****	$1 < \nu < \infty$ Les valeurs concrètes de ν peuvent être déterminées de la courbe tracée pour le schéma 63 (cas $n = 0$) Si $m_1 = m_2 = m = \frac{sl}{EJ}$, on aura ν; 2,2; 1,8; 1,4; 1,0; Asymptote; 0 2 4 6 8 m	$0 < \eta < 9{,}8696$

68	 $m_1 = \frac{s_1 l}{EJ}$ $m_2 = \frac{s_2 l}{EJ}$	$0{,}5 < \nu < 1$ Quelques données concrètes  $n = \frac{r_1 r_2 l^3}{(s_1 + s_2)EJ}$ ***, ****	$9{,}8696 < \eta < 39{,}48$
69	  $m_1 = \frac{s_1 l}{EJ}$ $m_2 = \frac{s_2 l}{EJ}$	$0{,}7 < \nu < 2$ Quelques données concrètes  $n = \frac{r_1 r_2 l^3}{(s_1 + s_2)EJ}$ ***, ****	$2{,}4424 < \eta < 20{,}14$

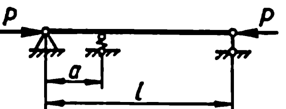
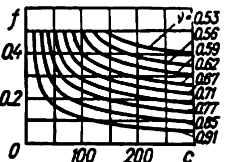
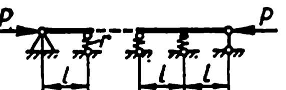
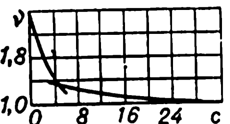
Suite

Nº d'ordre	Schéma de la barre et de sa mise en charge	Coefficient de réduction de la longueur ν	Coefficient de stabilité η
70	$m_1 = m;\ m_2 = n = \infty$, P, l $m_1 = n = \infty;\ m_2 = m$, P, l $m_1 = \frac{s_1 l}{EJ}$ $m_2 = \frac{s_2 l}{EJ}$ ****	$0{,}5 \leqslant \nu \leqslant 0{,}7$ Les valeurs concrètes de ν peuvent être déterminées de la courbe tracée pour le schéma 54 $n = \frac{r_1 r_2 l^3}{(s_1 + s_2)EJ}$ ***	$20{,}14 \leqslant \eta \leqslant 39{,}48$
71	$m_1 = m;\ n = 0;\ m_2 = \infty$, P, l $m_1 = \infty;\ n = 0;\ m_2 = m$, P, l	$1 \leqslant \nu \leqslant 2$ [Quelques données concrètes ν; 1.8; 1.4; 1.0; 0 2 4 6 8 m; Asymptote	$2{,}4424 \leqslant \nu \leqslant 9{,}8696$

	$m_1 = \frac{s_1 l}{EJ}$ $m_2 = \frac{s_2 l}{EJ}$ $n = \frac{r_1 r_2 l^3}{(s_1 + s_2)EJ}$ ***, ****		
72	$m_1 = m; n = \infty; m_2 = 0$; P; l $m_1 = 0; n = \infty; m_2 = m$; P; l	$0{,}7 \leqslant \nu \leqslant 1$ Les valeurs concrètes de ν peuvent être déterminées de la courbe tracée pour le schéma 52 compte tenu du fait que $m_1 = \frac{s_1 l}{EJ}$; $m_2 = \frac{s_2 l}{EJ}$; $n = \frac{r_1 r_2 l^3}{(s_1 + s_2)EJ}$ ***, ****	$9{,}8696 \leqslant \eta \leqslant 20{,}14$
73	$m_1 = m; n = 0; m_2 = 0$; P; l $m_1 = 0; n = 0; m_2 = m$; P; l	$2 \leqslant \nu < \infty$ Quelques données concrètes ν; 6; 4; 2; 0; 2; 4; 6; 8; m.; Asymptote	$0 \leqslant \eta \leqslant 2{,}4424$

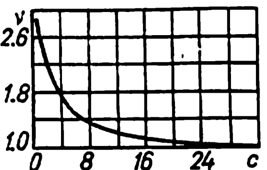
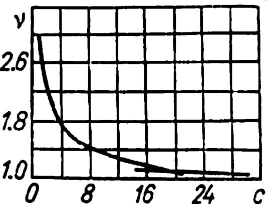
Suite

N° d'ordre	Schéma de la barre et de sa mise en charge	Coefficient de réduction de la longueur ν	Coefficient de stabilité η
73	$m_1 = \frac{s_1 l}{EJ}$ $m_2 = \frac{s_2 l}{EJ}$ $n = \frac{r_1 r_2 l^3}{(s_1 + s_2)EJ}$ ***, ****		
74	$m_1 = m_2 = 0$; P ; l $m_1 = \frac{s_1 l}{EJ}$; $m_2 = \frac{s_2 l}{EJ}$ ****	1 Il faut en outre vérifier la stabilité d'après la formule $P_{cr} = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} l$ *** Pour la valeur nominale de P_{cr} on prend sa valeur minimale	9,8696

75		 $f = \frac{a}{l}$; $c = \frac{rl^3}{EJ}$ (*r* — coefficient de rigidité de l'appui à déplacement élastique)	—
76		Pour un nombre de travées $n = 2$, les valeurs de ν peuvent être déterminées de la courbe tracée pour le schéma 69. Pour $n = 3$ 	—

Suite

Nº d'ordre	Schéma de la barre et de sa mise en charge	Coefficient de réduction de la longueur ν	Coefficient de stabilité η
76	r — coefficient de rigidité de l'appui à déplacement élastique	Pour $n = 4$ ν: 2.6, 1.8, 1.0; c: 0, 8, 16, 24 $c = \frac{rl^3}{EJ}$	—
77	P, r, l, l, l, P	Pour un nombre de travées $n = 2$ ν: 2.6, 1.8, 1.0; c: 0, 8, 16	—

	r — coefficient de rigidité de l'appui à déplacement élastique	$n =$  $n = 4$  $c = \frac{rl^3}{EJ}$	

Nº d'ordre	Schéma de la barre et de sa mise en charge	Coefficient de réduction de la longueur ν	Coefficient de stabilité η
78		Les valeurs de ν peuvent être déterminées de la courbe tracée pour le schéma 52. On y pose $$m = \frac{sl}{2EJ}$$ (s — coefficient de rigidité de l'appui à déplacement élastique)	—
79		Les valeurs de ν peuvent être déterminées de la courbe tracée pour le schéma 54. On y pose $$m = \frac{sl}{2EJ}$$ (s — coefficient de rigidité de l'appui à déplacement élastique)	—

* J et J_1 — respectivement le plus grand et le plus petit moment d'inertie de la section transversale.

** On suppose qu il y a des tronçons de même longueur et que les différences entre les moments d'inertie des tronçons avoisinants sont identiques.

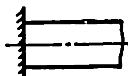
*** r_1 et r_2 — coefficients de rigidité des appuis gauche et droit, à déplacement élastique.

**** s_1 et s_2 — coefficients de rigidité des appuis gauche et droit à rotation élastique.

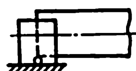
***** [illegible] — coefficient de rigidité de la base élastique (module de réaction) égal au rapport de la réaction de la base au tassement de cette dernière.

Charges critiques pour une bande et certaines poutres en double T*)

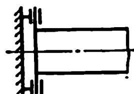
Types d'appuis:



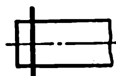
Encastrement dans les plans vertical et horizontal



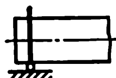
Encastrement dans le plan horizontal; charnière dans le plan vertical



Charnière dans le plan horizontal; encastrement dans le plan vertical



Charnière dans le plan horizontal; glissières dans le plan vertical



Charnières dans les plans horizontal et vertical

Schéma	Charge critique
	$M_{cr} = \frac{\pi S}{2l}$ Lors du flambement le plan d'action du couple reste inchangé dans un système des axes mobiles rigidement liés à la section frontale en déplacement

*) $S=\sqrt{EJ\cdot GJ_t}$, où EJ est la rigidité minimale en flexion; GJ_t, la rigidité en torsion.

Schéma	Charge critique

$$P_{cr} = \frac{4{,}013}{l^2}\left(S - \frac{a}{l}EJ\right)$$

pour $a = 0$ $\quad P_{cr} = \dfrac{4{,}013S}{l^2}$

Si la hauteur de la bande cantilever varie suivant la fonction $h = h_0\sqrt[n]{1 - \frac{z}{l}}$, h_0 étant la hauteur de la bande à son pied; z, la coordonnée courante le long de la bande, on aura

$$P_{cr} = \frac{mS}{l^2}$$

n	1	1,333	2	4
m	2,4	2,81	3,21	3,61

$$P_{cr} = \frac{kS}{l^2}$$

Le coefficient k se détermine du tableau. Avec $\mu = \frac{l^2}{h^2}\cdot\frac{2GJ_t}{D}$, ou D—rigidité d'une des ailes du double T soumis à la flexion dans son plan

μ	0,1	1	2	3	4	6	10	24	40
k	44,3	15,7	12,2	10,7	9,76	8,69	7,58	6,19	5,64

Pour $\mu > 40$ $\quad k = \dfrac{4{,}013}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\mu}}\right)^2}$

$$P_{cr} = \frac{5{,}56\,S}{l^2}$$

<table>
<tr><th>Schéma</th><th>Charge critique</th></tr>
<tr><td></td><td>

$$(ql)_{cr} = \frac{12,85S}{l^2}$$

Dans le cas où la hauteur de la bande cantilever varie suivant la fonction $h = h_0 \sqrt[n]{1 - \frac{z}{l}}$, h_0 — hauteur de la bande à son pied; z—coordonnée courante le long de la bande, on aura $(ql)_{cr} = \frac{mS}{l^2}$

<table>
<tr><td>n</td><td>1</td><td>1,333</td><td>2</td><td>4</td></tr>
<tr><td>m</td><td>9,6</td><td>10,4</td><td>11,2</td><td>12,8</td></tr>
</table>

</td></tr>
<tr><td></td><td>

$$\left(\frac{q_0 l}{2}\right)_{cr} = \frac{26,5\,S}{l^2}$$

q_0 à l'origine

</td></tr>
<tr><td></td><td>

$$(ql)_{cr} = \frac{15,95\,S}{l^2}$$

</td></tr>
<tr><td></td><td>

$$M_{cr} = \frac{\pi S}{l}$$

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Schéma</th><th>Charge critique</th></tr>
<tr><td></td><td>$$M_{cr} = \frac{\pi S}{l}\sqrt{1+\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \frac{Dh^2}{2GJ_t}}$$
h — hauteur de la poutre; D — rigidité d'une des ailes du profilé soumis à la flexion dans son propre plan</td></tr>
<tr><td></td><td>$$M_{cr} = \frac{EJ+GJ_t}{2R} \pm$$
$$\pm \sqrt{\left(\frac{EJ+GJ_t}{2R}\right)^2 + \frac{S^2}{R^2}\left(\frac{\pi^2}{\theta^2}-1\right)}$$
Le symbole inférieur montre la valeur critique du moment dirigé dans le sens contraire à celui indiqué sur le schéma</td></tr>
<tr><td></td><td>$$P_{cr} = \frac{kS}{l^2}$$
<table><tr><td>$a:l$</td><td>0,05</td><td>0,1</td><td>0,15</td><td>0,2</td><td>0,25</td></tr><tr><td>k</td><td>111,6</td><td>56,01</td><td>37,88</td><td>29,11</td><td>24,1</td></tr></table>
<table><tr><td>$a:l$</td><td>0,3</td><td>0,35</td><td>0,4</td><td>0,45</td><td>0,5</td></tr><tr><td>k</td><td>21,01</td><td>19,04</td><td>17,82</td><td>17,15</td><td>16,94</td></tr></table></td></tr>
<tr><td></td><td>$$P_{cr} = \frac{16,93}{l^2}\left(S - 3,48\frac{a}{l}EJ\right)$$</td></tr>
</table>

Schéma	Charge critique

$$P_{cr} = \frac{kS}{l^2}$$

Pour $\varkappa = \frac{l^2}{h^2} \cdot \frac{2GJ_t}{D}$, h — hauteur de la poutre, D—rigidité d'une des ailes du double T soumis à la flexion dans son propre plan, les valeurs de k seront

$\varkappa$	0,4	4	8	16	32	64	160	400
k	86,4	31,9	25,6	21,8	19,6	18,3	17,5	17,2

$$(ql)_{cr} = \frac{28{,}31S}{l^2}$$

$$(ql)_{cr} = \frac{kS}{l^2}$$

Pour $\varkappa = \frac{l^2}{h^2} \cdot \frac{2GJ_t}{D}$, h — hauteur de la poutre, D—rigidité d'une des ailes du double T soumis à la flexion dans son propre plan, les valeurs de k seront

$\varkappa$	0,4	4	8	16	32	64	128	400
k	143	53	42,6	36,3	32,6	30,5	29,4	28,6

Si lors du basculement la charge reste parallèle à sa direction initiale, on aura

$$(qR)_{cr} = \frac{EJ}{R^3} \cdot \frac{(\pi^2 - \theta^2)^2}{\theta^2\left(\pi^2 + \theta^2 \frac{EJ}{GJ_t}\right)}$$

Si lors du basculement la charge reste pointée vers le centre de courbure initial, on aura

$$(qR)_{cr} = \frac{\pi^2 EJ}{R^3} \cdot \frac{\pi^2 - \theta^2}{\theta^2\left(\pi^2 + \theta^2 \frac{EJ}{GJ_t}\right)}$$

<table>
<tr><th>Schéma</th><th>Charge critique</th></tr>
<tr><td></td><td>$M_{cr} = \frac{2\pi S}{l}$</td></tr>
<tr><td></td><td>$P_{cr} = \frac{44,5S}{l^2}$</td></tr>
<tr><td></td><td>$P_{cr} = \frac{kS}{l^2}$
Pour $\varkappa = \frac{l^2}{h^2} \cdot \frac{2GJ_t}{D}$; h — hauteur de la poutre; D — rigidité d'une des ailes du double T quand il est soumis à la flexion dans son propre plan, les valeurs de k seront
<table>
<tr><td>$\varkappa$</td><td>0,4</td><td>4</td><td>8</td><td>16</td><td>32</td><td>64</td><td>128</td><td>320</td></tr>
<tr><td>k</td><td>268</td><td>88,8</td><td>65,5</td><td>50,2</td><td>40,2</td><td>34,1</td><td>30,7</td><td>28,4</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td></td><td>$P_{cr} = \frac{kS}{l^2}$
<table>
<tr><td>$a:l$</td><td>0,1</td><td>0,2</td><td>0,3</td><td>0,4</td><td>0,5</td></tr>
<tr><td>k</td><td>117</td><td>53,2</td><td>35,2</td><td>28,5</td><td>26,7</td></tr>
</table></td></tr>
</table>

Schéma	Charge critique
	$(ql)_{cr} = \frac{48{,}6S}{l^2}$
	$(ql)_{cr} = \frac{kS}{l^2}$ Pour $\varkappa = \frac{l^2}{h^2} \cdot \frac{2GJ_t}{D}$, h — hauteur de la poutre; D — rigidité d'une des ailes du profilé soumis à la flexion dans son propre plan, les valeurs de k seront $\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|c\|c} \varkappa & 0{,}4 & 4 & 8 & 16 & 32 & 96 & 128 & 400 \\ \hline k & 488 & 161 & 119 & 91{,}3 & 73{,}0 & 58{,}0 & 55{,}8 & 51{,}2 \end{array}$
	$P_{cr} = \frac{kS}{l^2}$ $\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c\|c} a:l & 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ \hline k & 608 & 155 & 80{,}9 & 58{,}6 & 53{,}0 \end{array}$
	$(ql)_{cr} = \frac{129{,}1S}{l^2}$
	$(qR)_{cr} = \frac{mEJ}{R^3}$ La charge reste parallèle à sa direction initiale $\begin{array}{c\|c\|c\|c\|c\|c\|c} \theta & \pi:4 & \pi:2 & \pi & 1{,}063\pi & 1{,}1\pi & 1{,}24\pi \\ \hline m & 60{,}1 & 12{,}6 & 1{,}85 & 1{,}54 & 1{,}40 & 1{,}00 \end{array}$

Suite

Schéma	Charge critique
	$P_{cr} = \frac{kS}{l^2}$

$a:l$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
k	65,8	34,7	25,8	22,8	22,9	25,7	32,9	50,7	111

Schéma	Charge critique
	$(ql)_{cr} = \frac{39{,}6\,S}{l^2}$
	$P_{cr} = \frac{kS}{l^2}$

$a:l$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
k	77,5	41,5	31,5	28,9	30,5	37,1	53,9	104	376

Schéma	Charge critique
	$(ql)_{cr} = \frac{57{,}2\,S}{l^2}$
	$P_{cr} = \frac{kS}{l^2}$

$a:l$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
k	79,6	43,2	33,7	31,9	35,1	45,1	70,3	149	625

Schéma	Charge critique
	$$(ql)_{cr} = \frac{64{,}6S}{l^2}$$
	$$P_{cr} = \frac{kS}{l^2}$$
	$$(ql)_{cr} = \frac{84{,}8\,S}{l^2}$$
	$$P_{cr} = \frac{kS}{l^2}$$

Values of k for the second scheme:

$a:l$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
k	138	67,1	47,0	40,1	39,9	46,2	64,2	119	422

Values of k for the fourth scheme:

$a:l$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
k	145	67,6	47,1	40,7	41,8	50,5	75,0	150	630

Schéma	Charge critique
	$(ql)_{cr} = \frac{86{,}4\,S}{l^2}$
	Les déplacements verticaux des sections d'appuis sont impossibles vu que $P_{cr} = \frac{kS}{l^2}$ $a:l$: 0,1 / 0,2 / 0,3 / 0,4 / 0,5 k: 393 / 114 / 63,1 / 47,2 / 43,2
	On suppose que les déplacements verticaux des sections d'appuis sont impossibles vu que $(ql)_{cr} = \frac{98{,}7\,S}{l^2}$
	$P_{cr} = \frac{kS}{l^2}$ $a:l$: 0,1 / 0,2 / 0,3 / 0,4 / 0,5 / 0,6 / 0,7 / 0,8 / 0,9 k: 399 / 118 / 67,8 / 52,6 / 50,2 / 57,7 / 82,2 / 161 / 621

Schéma	Charge critique
q l	$$(ql)_{cr} = \frac{120{,}6S}{l^2}$$

Coefficients de la contrainte admissible conventionnelle en compression φ

Matériau	Flexibilité λ								
	0	10	20	30	40	50	60	70	80
Acier									
Ст. 0	1,00	0,99	0,97	0,95	0,92	0,89	0,86	0,81	0,75
Ст. 2									
Ст. 3									
Ст. 4									
Ст. 5	1,00	0,98	0,95	0,92	0,89	0,86	0,82	0,76	0,70
НЛ 1									
НЛ 2	1,00	0,98	0,95	0,93	0,90	0,83	0,78	0,71	0,63
(15 ХСНД)									
СПК	1,00	0,97	0,95	0,91	0,87	0,83	0,79	0,72	0,65
Fonte									
СЧ 12-28	1,00	0,97	0,91	0,81	0,69	0,57	0,44	0,34	0,26
СЧ 15-18									
СЧ 15-30									
СЧ 15-32									
СЧ 15-36									
СЧ 18-36									
СЧ 21-40									
СЧ 21-44	1,00	0,95	0,87	0,75	0,60	0,43	0,32	0,23	0,18
СЧ 24-44									
СЧ 28-48									
Alliage d'aluminium									
АМг	1,00	0,973	0,945	0,917	0,87	0,77	0,685	0,603	0,53
АМг 6	1,00	0,973	0,946	0,89	0,77	0,64	0,542	0,458	0,387
АВТ 1	1,00	0,996	0,992	0,90	0,78	0,66	0,557	0,463	0,387
Д 16Т	1,00	0,999	0,998	0,835	0,70	0,568	0,455	0,353	0,269
Eléments de maçonnerie et maçonnerie renforcée	1,00	0,99	0,96	0,91	0,85	0,78	0,72	0,65	0,58
Béton armé	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	0,83	0,73	0,64
Béton lourd	1,00	1,00	0,96	0,90	0,84	0,76	0,70	0,63	0,57
Béton léger	1,00	1,00	0,95	0,86	0,73	0,68	0,59	0,52	0,46
Bois (pin, sapin)	1,00	0,99	0,97	0,93	0,87	0,80	0,71	0,61	0,49

Tableau 40

90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
0,69	0,60	0,52	0,45	0,40	0,36	0,32	0,29	0,26	0,23	0,21	0,19
0,62	0,51	0,43	0,38	0,32	0,28	0,26	0,24	0,21	0,19	0,17	0,16
0,54	0,45	0,39	0,33	0,29	0,26	0,23	0,21	0,19	0,17	0,15	0,14
0,55	0,43	0,35	0,30	0,26	0,23	0,21	0,19	0,17	0,15	0,14	0,13
0,20	0,16	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0,14	0,12	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0,465	0,415	0,365	0,327	0,296	0,265	0,235	—	—	—	—	—
0,322	0,28	0,243	0,213	0,183	0,162	0,148	—	—	—	—	—
0,312	0,252	0,21	0,175	0,15	0,129	0,113	—	—	—	—	—
0,212	0,172	0,142	0,119	0,101	0,087	0,076	—	—	—	—	—
0,53	0,48	0,43	0,38	0,35	0,32	0,29	—	—	—	—	—
0,57	0,52	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0,51	0,45	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
0,38	0,31	0,25	0,22	0,18	0,16	0,14	0,12	0,11	0,10	0,09	0,08

Tableau 41

Equations du moment fléchissant $M(z)$ et de la ligne élastique $w(z)$ pour certains cas de flexion composée des barres de section transversale constante $\left(k = \sqrt{\dfrac{N}{EJ}}\right)$

Schémas de la barre et de sa mise en charge	$M(z)$	$w(z)$
W, P, N, N, z, a, b, l	$M(z) = \dfrac{P}{k}\left[\dfrac{\text{sh } kb}{\text{sh } kl}\,\text{sh } kz - e(a)\,\text{sh } k(z-a)\right]$ $M(a) = \dfrac{P}{k}\,\dfrac{\text{sh } kb}{\text{sh } kl}\,\text{sh } ka$ $e(a) = 0$ pour $z < a$ $e(a) = 1$ pour $z > a$	$w(z) = \dfrac{P}{EJk^3}\left\{\dfrac{\text{sh } kb}{\text{sh } kl}\,\text{sh } kz - \left(1 - \dfrac{a}{l}\right) kz - e(a)\,[\text{sh } k(z-a) - k(z-a)]\right\}$ $w(a) = \dfrac{P}{EJk^3}\left\{\dfrac{\text{sh } kb}{\text{sh } kl}\,\text{sh } ka - \left(1 - \dfrac{a}{l}\right) ka\right\}$
w, M, N, N, z, a, b, l	$M(z) = M\left[\dfrac{\text{ch } kb}{\text{sh } kl}\,\text{sh } kz - e(a)\,\text{ch } k(z-a)\right]$ $M(a) = M\,\dfrac{\text{ch } kb}{\text{sh } kl}\,\text{sh } ka$ $e(a) = 0$ pour $z < a$ $e(a) = 1$ pour $z > a$	$w(z) = \dfrac{M}{EJk^2}\left\{\dfrac{\text{ch } kb}{\text{sh } kl}\,\text{sh } kz - \dfrac{z}{l} - e(a)\,[\text{ch } k(z-a) - 1]\right\}$ $w(a) = \dfrac{M}{EJk^2}\left[\dfrac{\text{ch } kb}{\text{sh } kl}\,\text{sh } ka - \dfrac{a}{l}\right]$

	$M(z) = \frac{q}{k^2}\left[-\frac{\operatorname{ch} k\left(z - \frac{l}{2}\right)}{\operatorname{ch} k\frac{l}{2}} + 1\right]$ $M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q}{k^2}\left(-\frac{1}{\operatorname{ch} k\frac{l}{2}} + 1\right)$	$w(z) = \frac{q}{EJk^4}\left[1 - \frac{\operatorname{ch} k\left(z - \frac{l}{2}\right)}{\operatorname{ch} k\frac{l}{2}} - \frac{k^2lz}{2}\left(1 - \frac{z}{l}\right)\right]$ $w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q}{EJk^4}\left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} k\frac{l}{2}} - \frac{k^2l^2}{8}\right)$
	$M(z) = \frac{P}{k}\,\frac{\operatorname{sh} kz}{\operatorname{ch} kl}$	—
	$M(z) = \frac{M}{\operatorname{ch} kl}\operatorname{ch} k(l - z)$	—
	$M(l) = \frac{q}{k^2\operatorname{ch} kl}(1 - \operatorname{ch} kl - kl\operatorname{sh} kl)$	—

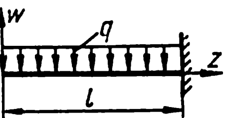
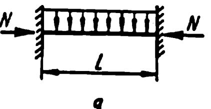
Suite

Schémas de la barre et de sa mise en charge	$M(z)$	$w(z)$
W, q, N, N z, l	$M(z) = \frac{q}{k^2}\left[1 - \frac{kl}{2}\frac{\operatorname{ch} k\left(z - \frac{l}{2}\right)}{\operatorname{sh}\frac{kl}{2}}\right]$ $M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q}{k^2}\left(1 - \frac{\frac{kl}{2}}{\operatorname{sh}\frac{kl}{2}}\right)$ $M(0) = \frac{q}{k^2}\left(1 - \frac{\frac{kl}{2}}{\operatorname{th}\frac{kl}{2}}\right)$	$w(z) = \frac{q}{EJk^4}\left[\frac{-\operatorname{ch} k\left(z - \frac{l}{2}\right) + \operatorname{ch}\frac{kl}{2}}{\operatorname{sh}\frac{kl}{2}} \times \right.$ $\left.\times \frac{kl}{2} - \frac{k^2lz}{2}\left(1 - \frac{z}{l}\right)\right]$ $w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q}{EJk^4}\left(\frac{kl}{2}\operatorname{th}\frac{kl}{4} - \right.$ $\left. - \frac{k^2l^2}{8}\right)$
W, P, N, N z, a, b, l	$M(z) = \frac{P}{k}\left[\frac{\sin kb}{\sin kl}\sin kz - \right.$ $\left. - e(a)\sin k(z-a)\right]$ $M(a) = \frac{P}{k}\frac{\sin kb}{\sin kl}\sin ka$ $e(a) = 0$ pour $z \leqslant a$ $e(a) = 1$ pour $z > a$	$w(z) = \frac{P}{EJk^3}\left\{-\frac{\sin kb}{\sin kl}\sin kz + \right.$ $+ \left(1 - \frac{a}{l}\right)kz +$ $\left. + e(a)[\sin k(z-a) - k(z-a)]\right\}$ $w(a) = \frac{P}{EJk^3}\left\{-\frac{\sin kb}{\sin kl}\sin ka + \right.$ $\left. + \left(1 - \frac{a}{l}\right)ka\right\}$

W, M, N, N, z, a, b, l	$M(z) = M\left[\frac{\cos kb}{\sin kl}\sin kz - e(a)\cos k(z-a)\right]$ $M(a) = M\frac{\cos kb}{\sin kl}\sin ka$ $e(a) = 0$ pour $z < a$ $e(a) = 1$ pour $z > a$	$w(z) = \frac{M}{EJk^2}\left\{-\frac{\cos kb}{\sin kl}\sin kz + \frac{z}{l} - e(a)[1-\cos k(z-a)]\right\}$ $w(a) = \frac{M}{EJk^2}\left[-\frac{\cos kl}{\sin kl}\sin ka + \frac{a}{l}\right]$
W, q, N, N, z, l	$M(z) = \frac{q}{k^2}\left[-1+\frac{\cos k\left(z-\frac{l}{2}\right)}{\cos\frac{kl}{2}}\right]$ $M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q}{k^2}\left(-1+\frac{1}{\cos\frac{kl}{2}}\right)$	$w(z) = \frac{q}{EJk^4}\left[1-\frac{\cos k\left(z-\frac{l}{2}\right)}{\cos\frac{kl}{2}} + \frac{k^2lz}{2}\left(1-\frac{z}{l}\right)\right]$ $w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q}{EJk^4}\left(1-\frac{1}{\cos\frac{kl}{2}}+\frac{kl^2}{8}\right)$
W, z, q, z', N, N, z, a, b, l	$M(z) = \frac{q}{k^2}\left[\frac{\cos kl-\cos kb}{\sin kl}\sin kz - \cos kz + 1\right]$ $M(z') = \frac{q}{k^2}\left[\frac{\cos kl-\cos kb}{\sin kl}\sin kz - \cos kz + \cos k(z-a)\right]$	—

Suite

Schémas de la barre et de sa mise en charge	$M(z)$	$w(z)$
	$M(z) = \frac{q}{k^2}\left(\frac{\sin kz}{\sin kl} - \frac{z}{l}\right)$ M_{max} pour $z = \frac{1}{k} \arccos \frac{\sin kl}{kl}$	—
	$M(z) = -\frac{P}{k} \frac{\sin kz}{\cos kl}$	—
	$M(z) = \frac{M}{\cos kl} \cos k(l - z)$	—

	$M(l) = \frac{q}{k^2 \cos kl}(1 - \cos kl - kl \sin kl)$	–
 q	$M(z) = \frac{q}{k^2}\left[-1 + \frac{kl}{2}\,\frac{\cos k\left(z - \frac{l}{2}\right)}{\sin \frac{kl}{2}}\right]$ $M\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q}{k^2}\left(-1 + \frac{\frac{kl}{2}}{\sin \frac{kl}{2}}\right)$ $M(0) = \frac{q}{k^2}\left(-1 + \frac{\frac{kl}{2}}{\mathrm{tg} \frac{kl}{2}}\right)$	$w(z) = \frac{q}{EJk^4}\left\{\frac{kl}{2}\left[\frac{-\cos k\left(z - \frac{l}{2}\right) + \cos \frac{kl}{2}}{\sin \frac{kl}{2}}\right] + \frac{k^2 l z}{2}\left(1 - \frac{z}{l}\right)\right\}$ $w\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{q}{EJk^4}\left(-\frac{kl}{2}\,\mathrm{tg}\,\frac{kl}{4} + \frac{k^2 l^2}{8}\right)$

CHAPITRE 19

Oscillations élastiques

§ 101. Classifications des oscillations mécaniques

Tous les processus oscillatoires auxquels on a affaire en physique et en technique peuvent être classés conformément à la loi qui décrit la variation dans le temps d'une certaine grandeur caractérisant le processus oscillatoire. Une telle classification peut être appelée *cinématique* au sens large du terme. Les oscillations peuvent être *périodiques* et *apériodiques*. Outre cela, il existe une large classe intermédiaire d'*oscillations* dites *quasi périodiques*.

Les oscillations périodiques sont décrites par une fonction périodique dont la valeur se répète dans le temps après un intervalle déterminé T qu'on appelle *période des oscillations*, c'est-à-dire

$$f(t + T) = f(t)$$

pour n'importe quelle valeur de la variable t.

Les fonctions ne satisfaisant pas à cette condition sont dites *apériodiques*.

Les fonctions quasi périodiques sont définies par la condition

$$|f_1(t + \tau) - f_1(t)| \leqslant \varepsilon$$

pour n'importe quel t; τ et ε étant des constantes déterminées. Il est évident que si ε est une quantité très petite, durant un temps t, par comparaison avec la valeur moyenne du module de la fonction $f_1(t)$ la fonction quasi périodique sera proche d'une fonction périodique dans laquelle τ sera assimilé à une quasi-période.

Les oscillations *harmoniques*, ou *sinusoïdales*, appartiennent aux oscillations périodiques les plus répandues.

Les oscillations apériodiques sont bien plus variées que les oscillations périodiques. De telles oscillations sont le plus souvent des oscillations sinusoïdales *amorties* (fig. 313, *a*) ou *croissantes* (fig. 313, *b*). Mathéma-

tiquement, les oscillations amorties sont représentées par l'expression suivante

$$x = A^{-\delta t}\cos(\omega t + \varphi), \qquad (19.1)$$

où A, φ, δ et ω sont les constantes; t, temps.

Les oscillations harmoniques croissantes sont décrites par une expression mathématique analogue à (19.1) avec la seule différence que le signe accompagnant δt est remplacé par un signe inverse (plus).

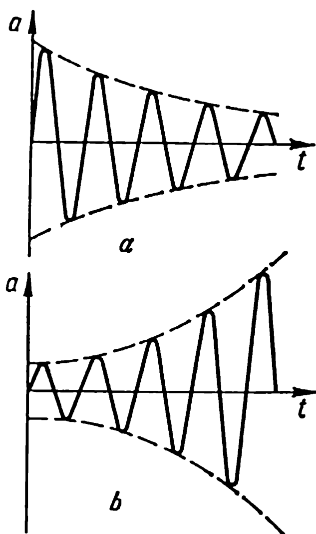


FIG. 313

Strictement parlant, le terme oscillations harmoniques (ou sinusoïdales) amorties n'est pas tout à fait logique car les oscillations harmoniques ne peuvent pas être amorties. Néanmoins, on continue de s'en servir en pratique.

La classification des processus oscillatoires d'après leur forme extérieure n'est pas suffisante, aussi doit-on la compléter par une classification se basant sur les propriétés physiques fondamentales des systèmes oscillatoires en question.

Lorsqu'on examine les mouvements oscillatoires des systèmes élastiques, il importe de savoir le nombre de paramètres indépendants déterminant la position du système à chaque moment donné. Le nombre de tels paramètres s'appelle *nombre de degrés de liberté*.

Dans les cas les plus simples, la position d'un système peut être déterminée par une seule grandeur. De tels systèmes sont dits *à un degré de liberté*. Soit un système oscillatoire constitué d'un poids Q qui pend à un ressort (fig. 314); s'il a été conçu de façon que le poids ne fasse que des mouvements verticaux, il sera un système à un degré de liberté. En n'importe quel moment sa position peut être déterminée à l'aide d'un seul paramètre: le déplacement selon la verticale.

En guise d'exemple d'un système *à deux degrés de liberté*, on peut considérer une poutre impondérable portant deux masses (fig. 315). Ici, ce sont les déplacements des masses m_1 et m_2 par rapport à la position d'équilibre qui vont jouer le rôle de paramètres indépendants déterminant

la position du système en n'importe quel moment. Si l'on augmente le nombre de masses ponctuelles de la poutre en oscillations, on obtient à la limite une poutre ayant une masse distribuée sur toute sa longueur qui sera un *système* oscillatoire *à un nombre infini de degrés de liberté* (fig. 316).

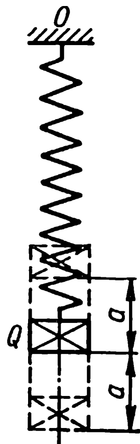


FIG. 314

On peut également classer les oscillations mécaniques d'après d'autres critères. En particulier, on distingue quatre types d'oscillations: *oscillations propres*, *oscillations forcées*, *oscillations paramétriques* et *auto-oscillations*.

On appelle oscillations propres (*ou libres*) *les oscillations apparaissant dans un système isolé sous l'action d'une excitation extérieure* («impulsions») *qui provoque les écarts initiaux des points du système de leur position d'équilibre, les oscillations qui se produisent, par la suite, grâce à la présence de forces élastiques intérieures rétablissant l'équilibre*. L'énergie nécessaire pour assurer les oscillations vient du dehors au moment initial de leur excitation. La période des oscillations (le temps d'une oscillation complète) dépend du système. La fréquence des oscillations est une quantité bien déterminée pour un système donné et porte le nom de *fréquence propre* des oscillations du système. A cause des pertes d'énergie qui ont lieu dans un système, les oscillations propres sont pratiquement toujours amorties, bien que lors de l'examen des oscillations propres on ignore souvent les pertes d'énergie.

On appelle oscillations forcées d'un système élastique les oscillations qui s'y produisent sous l'action des forces perturbatrices extérieures à variation périodique (durant tout le processus oscillatoire). Dans ce cas, la

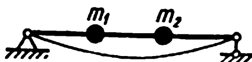
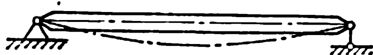


FIG. 315


FIG. 316

nature du processus oscillatoire loin d'être déterminée par les propriétés du système dépend forcément de la force extérieure. En guise d'exemple des oscillations forcées, on peut citer les oscillations transversales que la masse non équilibrée du rotor d'un moteur électrique fonctionnant sur une poutre provoque dans cette dernière (fig. 317).

Les oscillations forcées se produisent avec la même fréquence que la force perturbatrice et sont entretenues grâce à un afflux continu de l'énergie

venant de l'extérieur. Lorsque la fréquence des forces perturbatrices et celle des oscillations propres du système coïncident, on assiste à l'apparition de résonance caractérisée par un brusque accroissement de l'amplitude des oscillations forcées, ce qui présente du danger pour l'exploitation du système mécanique oscillatoire en question.

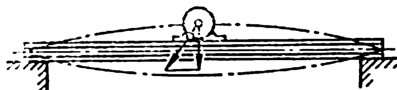


FIG. 317

On appelle oscillations paramétriques d'un système élastique les oscillations faisant varier de façon périodique les paramètres physiques du dit système (paramètres portant sur la masse ou la rigidité du système). Dans ce cas, les forces extérieures sans influencer immédiatement le mouvement oscillatoire ne font que modifier les paramètres physiques. Les oscillations transversales d'une masse placée sur une barre en rotation ayant une section non circulaire et dont le moment d'inertie équatorial par rapport à des axes orthogonaux est différent, peuvent servir d'exemple d'oscillations paramétriques.

On appelle auto-oscillations d'un système élastique les oscillations entretenues par des forces extérieures dont le caractère d'action se détermine par le processus oscillatoire lui-même.

Les auto-oscillations apparaissent dans un système en l'absence des perturbations périodiques extérieures. La nature des oscillations n'est déterminée que de la façon dont le système a été conçu. La source d'énergie appelée à compenser les pertes de celle-ci dans le système au cours des oscillations constitue une partie intégrante du système. Ainsi, les auto-oscillations diffèrent des oscillations propres, étant amorties, par le fait qu'elles sont entretenues. D'autre part, les auto-oscillations diffèrent des oscillations forcées et paramétriques provoquées par des forces extérieures dont le caractère d'action est, dans les deux cas, donné à l'avance, par le fait qu'elles sont *auto-excitées* car le processus des oscillations est ici commandé par les oscillations elles-mêmes.

En guise d'exemple d'auto-oscillations on peut considérer la vibration des éléments d'un avion (flutter) lorsque le rôle de source d'énergie supplémentaire qui sert à entretenir les oscillations du système est joué par l'énergie du courant d'air, ainsi que par la palpitation de l'enseigne au vent.

La classification des oscillations se fait également d'après la forme des déformations que subissent les éléments élastiques d'une structure. En

particulier, dans les systèmes à barres on distingue les oscillations *longitudinales, transversales* et *de torsion.*

Lors des oscillations longitudinales les déplacements de tous les points d'une barre élastique sont dirigés le long de l'axe de cette dernière. Dans ce cas, la barre connaît une déformation d'allongement ou de raccourcissement, autrement dit, les oscillations longitudinales peuvent être appelées oscillations de traction-compression.

Lors des oscillations transversales (de flexion), les composantes principales de déplacements (les flèches) sont dirigées perpendiculairement à l'axe de la barre.

Les oscillations de torsion sont à l'origine des déformations de torsion variables. On peut aussi concevoir les oscillations de flexion-torsion, c'est-à-dire les oscillations qui donnent naissance simultanément à une flexion variable et une torsion.

§ 102. Oscillations libres des systèmes à un degré de liberté

Un poids suspendu sur un ressort disposé verticalement (fig. 318) peut servir de modèle d'un système oscillatoire à un degré de liberté le plus simple.

Additionnant les projections de toutes les forces (y compris les forces d'inertie conformément au principe de D'Alambert) sur l'axe vertical, nous obtiendrons l'équation différentielle des oscillations du poids Q sous la forme suivante

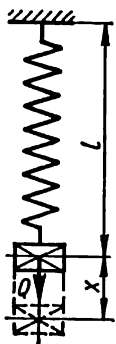


FIG. 318

$$Q + cx - \left(Q - \frac{Q}{g}\ddot{x}\right) = 0.$$

De là

$$\frac{Q}{g}\ddot{x} + cx = 0,$$

ou

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \qquad (19.2)$$

où x est le déplacement vertical du poids par rapport à la position d'équilibre statique; $\ddot{x} = \frac{d^2x}{dt^2}$; t, temps; c, rigidité du ressort; g, accé-

lération de la force de pesanteur; ω, fréquence angulaire des oscillations propres

$$\omega^2 = \frac{cg}{Q} = \frac{g}{\delta_{st}} ; \tag{19.3}$$

$\delta_{st} = \frac{Q}{c}$, allongement que subit le ressort sous l'action statique du point Q.

La solution de l'équation (19.2) sera

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t, \tag{19.4}$$

A et B étant les constantes d'intégration qui dépendent des conditions initiales.

Si par hypothèse on a la coordonnée initiale x_0 du poids ainsi la vitesse initiale $v_0 = \dot{x}$ pour $t = 0$, de (19.4) on va déterminer

$$A = x_0; \quad B = \frac{v_0}{\omega}. \tag{19.5}$$

Posant

$$x_0 = a \sin \alpha \quad \text{et} \quad \frac{v_0}{\omega} = a \cos \alpha, \tag{19.6}$$

on peut mettre (19.4) dans la forme suivante

$$x = a \sin (\omega t + \alpha),$$

a étant l'amplitude des oscillations qui s'obtient de la formule

$$a = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}.$$

La quantité $\omega t + \alpha$ est dite *phase des oscillations*, α, *décalage de phase*. En vertu de (19.6), α peut être déterminé de la condition

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_0 \omega}{v_0}.$$

La fréquence angulaire des oscillations (le nombre d'oscillations en 2π secondes) sera en vertu de (19.3)

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} \tag{19.7}$$

ou

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}},$$

ici $m = \frac{Q}{g}$, masse du poids suspendu.

Connaissant la fréquence angulaire, on peut déterminer la *période des oscillations*

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}. \qquad (19.8)$$

Le nombre d'oscillations par seconde, c'est-à-dire la *fréquence par seconde* qu'on exprime en hertz, s'obtient de la formule

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}. \qquad (19.9)$$

Si le poids en oscillations pend au bout d'un ressort se présentant comme une barre de longueur l et de rigidité en traction de la section transversale EF, la rigidité de ce ressort sera

$$c = \frac{EF}{l},$$

et la fréquence propre des oscillations se déterminera, en vertu de (19.7), de la formule

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} = \sqrt{\frac{EFg}{Ql}}. \qquad (19.10)$$

Vu que $\frac{Q}{g} = m$, on peut écrire:

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{EF}{ml}}. \qquad (19.11)$$

Des formules (19.10) et (19.11) il s'ensuit que pour une masse constante la fréquence des oscillations propres du système croît avec l'augmentation de la rigidité et, pour une rigidité constante, diminue avec l'augmentation de la masse. Le rapport des fréquences des oscillations propres des poids attachés aux extrémités de deux barres différentes est inversement propor-

tionnel à la racine carrée du rapport des allongements statiques de ces barres.

Un système oscillatoire fait d'un disque massif fixé sur l'extrémité inférieure d'un arbre encastré à son extrémité supérieure (fig. 319) peut également servir d'exemple d'un système à un degré de liberté. A supposer qu'on applique au disque, dans son propre plan, un couple de forces qu'on enlève ensuite subitement, on va assister à l'apparition des oscillations propres de torsion dans le système arbre-disque. Désignons par c la rigidité en torsion de l'arbre (le moment de torsion qui provoque le vrillage de l'arbre d'un radian):

$$c = \frac{GJ_p}{l} = \frac{G\pi d^4}{l \cdot 32}; \qquad (19.12)$$

où G est le module d'élasticité en cisaillement; d, diamètre de l'arbre; l, longueur de l'arbre.

Nous servant du principe de D'Alambert (on néglige l'inertie de la masse de la barre) et après avoir égalé le moment de torsion $c\varphi$ qu'éprouve la barre lors de sa torsion d'un angle φ au moment créé par les forces d'inertie de la masse du disque, nous obtiendrons l'équation différentielle des oscillations de torsion du disque:

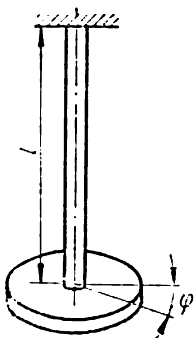


FIG. 319

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + c\varphi = 0, \qquad (19.13)$$

J étant le moment d'inertie du disque par rapport à l'axe de la barre, cet axe étant perpendiculaire au plan du disque.

Pour un disque d'épaisseur constante h fabriqué en un matériau au poids spécifique γ nous aurons

$$J = \frac{\pi D^4 h\gamma}{32g} = \frac{QD^2}{8g}, \qquad (19.14)$$

D étant le diamètre du disque; Q, son poids.

Pour un disque d'épaisseur variable $h(\rho)$

$$J = \frac{2\pi}{g} \int_0^{D/2} h(\rho)\, \gamma \rho^3 d\rho. \qquad (19.15)$$

Introduisant la notation

$$\omega^2 = \frac{c}{J}, \qquad (19.16)$$

mettons l'équation (19.13) sous la forme suivante

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega^2\varphi = 0. \qquad (19.17)$$

La solution générale de cette équation sera

$$\varphi = A\cos\omega t + B\sin\omega t. \qquad (19.18)$$

La période des oscillations du système en question est

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{c}}. \qquad (19.19)$$

Pour une barre de diamètre constant d nous aurons, compte tenu de (19.12)

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{32lJ}{G\pi d^4}}, \qquad (19.20)$$

et la fréquence des oscillations par seconde sera

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi G d^4}{32Jl}}. \qquad (19.21)$$

Le tableau 42 donne les fréquences propres des oscillations des systèmes à un degré de liberté.

§ 103. Oscillations forcées provoquées dans des systèmes à un degré de liberté par une excitation harmonique

L'équation des oscillations forcées d'un système à un degré de liberté (fig. 318) s'obtient de (19.2) si l'on y tient compte, en plus des forces d'inertie $\frac{Q}{g}\ddot{x}$ et des forces d'élasticité agissant sur le poids Q, de l'influence de la force perturbatrice périodique $P\cos pt$:

$$\frac{Q}{g}\ddot{x} + cx = P\cos pt. \qquad (19.22)$$

Introduisant les désignations

$$\frac{cg}{Q} = \omega^2; \tag{19.23}$$

$$\frac{Pg}{Q} = q, \tag{19.24}$$

où P est la fréquence angulaire de la force perturbatrice, ramenons l'équation (19.22) à la forme suivante

$$\ddot{x} + \omega^2 x = q \cos pt. \tag{19.25}$$

Si p est insignifiant par rapport à ω, on peut négliger le terme $\ddot{x}$ tout en supposant que seule une déformation statique a lieu; sa valeur maximale est

$$x_{st} = \frac{q}{\omega^2}. \tag{19.26}$$

Pour déterminer la déformation dynamique il faut résoudre l'équation (19.25). La solution de l'équation (19.25) s'exprimera par la somme de la solution générale de l'équation homogène (pour $q \cos pt = 0$)

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t \tag{19.27}$$

et de la solution particulière de l'équation (19.25)

$$x = C \cdot \cos pt. \tag{19.28}$$

Mettant (19.28) dans (19.25), trouvons

$$C = \frac{q}{\omega^2 - p^2}. \tag{19.29}$$

La solution générale de l'équation (19.25) sera alors

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t + \frac{q}{\omega^2 - p^2} \cos pt. \tag{19.30}$$

Les deux premiers termes du deuxième membre de (19.30) caractérisent les oscillations libres qui d'ordinaire s'amortissent; le troisième caractérise les oscillations forcées persistantes à fréquence angulaire p $\left(\text{période } T_1 = \frac{2\pi}{p} \text{ ou fréquence } f = \frac{p}{2\pi} \text{ Hz}\right)$ et amplitude $C = \frac{q}{\omega^2 - p^2}$. L'amplitude des oscillations forcées dépend sensiblement du rapport entre la fréquence propre ω et la fréquence forcée p des oscillations et

peut être caractérisée par le soi-disant *facteur de croissance des oscillations ou coefficient d'amplification dynamique*

$$\beta = \frac{C}{x_{st}} = \frac{q}{\omega^2 - p^2} : \frac{q}{\omega^2} = \frac{\omega^2}{\omega^2 - p^2} = \frac{1}{1 - \frac{p^2}{\omega^2}} \qquad (19.31)$$

ou

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{T^2}{T_1^2}}, \qquad (19.32)$$

avec

$$T_1 = \frac{2\pi}{p}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

De (19.31) il s'ensuit que si le rapport $\frac{p}{\omega}$ est petit, $\beta \to 1$ et $C \to x_{st}$.

Lorsque la fréquence des oscillations forcées $p \to \omega$, c'est-à-dire $\frac{p}{\omega} \to 1$, $C \to \infty$. Quand $p = \omega$, c'est l'état de *résonance* qui se réalise. La fréquence correspondante de la force perturbatrice $p = p_{cr}$ s'appelle alors *critique*. La courbe de dépendance $|\beta| = f\left(\frac{p}{\omega}\right)$ montrée sur la fig. 320 représente ce qu'on appelle la *courbe de l'amplitude de résonance* ou encore la *caractéristique amplitude-fréquence* et permet d'analyser le comportement du système oscillatoire en fonction du rapport entre la fréquence des oscillations libres ω et celle des oscillations forcées p.

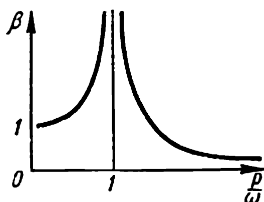


FIG. 320

§ 104. Oscillations libres des systèmes à un degré de liberté dans le cas d'une résistance proportionnelle à la vitesse

Compte tenu d'une résistance proportionnelle à la vitesse du mouvement d'un poids en oscillations, l'équation des oscillations libres d'un système à un degré de liberté (fig. 321, *a*) s'obtient de l'examen des conditions de

l'équilibre dynamique du dit poids:

$$Q - \frac{Q}{g}\ddot{x} - \alpha\dot{x} = Q + cx,$$

ou

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = 0, \tag{19.33}$$

α étant le coefficient de proportionnalité; $\alpha\dot{x}$, force de résistance.
Dans l'équation (19.33)

$$\omega^2 = \frac{cg}{Q}; \qquad 2n = \frac{\alpha g}{Q}. \tag{19.34}$$

Introduisons la désignation

$$\omega_1^2 = \omega^2 - n^2. \tag{19.35}$$

La solution de l'équation (19.33) sera

$$x = e^{-nt}(A \sin \omega_1 t + B \cos \omega_1 t), \tag{19.36}$$

avec $e = 2{,}718$.

La période des oscillations amorties du système considéré est

$$T = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega^2 - n^2}}, \tag{19.37}$$

où n est le coefficient caractérisant la capacité d'amortissement du système oscillatoire. De (19.36) il s'ensuit que vu le facteur e^{-nt} l'amplitude des oscillations décroît avec le temps, les oscillations s'amortissent. Les constantes d'intégration A et B dans la solution (19.36) se déterminent à partir des conditions initiales. En posant donc que pour $t = 0$, $x = x_0$; $\dot{x} = \dot{x}_0$, on obtient

$$B = x_0; \quad A = \frac{1}{\omega_1}(\dot{x}_0 + nx_0).$$

Dans ce cas, la solution de (19.36) peut être mise sous la forme suivante

$$x = e^{-nt}\left[\frac{\dot{x}_0}{\omega_1}\sin \omega_1 t + x_0\left(\cos \omega_1 t + \frac{n}{\omega_1}\sin \omega_1 t\right)\right]. \tag{19.38}$$

Dans le cas particulier où $A = 0$, c'est-à-dire quand

$$\frac{\dot{x}_0}{\omega_1} + \frac{nx_0}{\omega_1} = 0,$$

l'équation (19.38) prend la forme suivante

$$x = x_0 e^{-nt} \cos \omega_1 t.$$

La fig. 321, *b* en donne une représentation graphique. La diminution de l'amplitude suit une progression géométrique. En effet, pour $t = 0$; $t = T$; $t = 2T$, etc., les amplitudes sont respectivement les valeurs suivantes:

$$a_0 = x_0; \quad a_1 = x_0 e^{-nT}; \quad a_2 = x_0^{-2nT}, \text{ etc.,}$$

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \ldots = \frac{a_k}{a_{k+1}} = e^{nT},$$

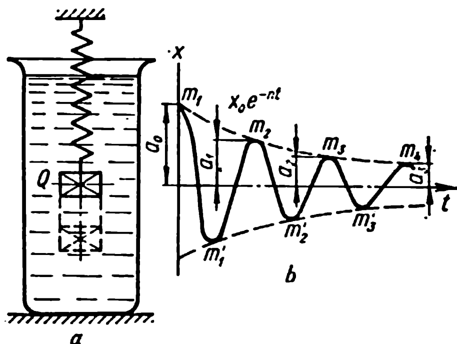


FIG. 321

de là

$$\ln \frac{a_k}{a_{k+1}} = \ln e^{nT} = nT = \delta. \tag{19.39}$$

est grandeur δ portant le nom de *décrément logarithmique des oscillations* La généralement considérée comme la caractéristique principale d'amortis-

sement des oscillations ou la caractéristique des propriétés amortissantes d'un système oscillatoire *).

§ 105. Oscillations forcées des systèmes à un degré de liberté dans le cas d'une résistance proportionnelle à la vitesse

Conformément aux indications des paragraphes précédents, l'équation différentielle des oscillations forcées d'un système qui subit l'action d'une force perturbatrice extérieure $P \sin pt$ (fig. 321, *a*) peut être mise sous sa forme définitive suivante:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega^2 x = q \sin pt, \tag{19.40}$$

où, comme auparavant,

$$\omega^2 = \frac{cg}{Q}; \quad q = \frac{Pg}{Q}. \tag{19.41}$$

La solution générale de l'équation (19.40) s'exprimera par la somme de la solution de l'équation homogène (19.33)

$$x = e^{-nt}(A \sin \omega_1 t + B \cos \omega_1 t),$$

où $\omega_1 = \sqrt{\omega^2 - n^2}$, ainsi que de la solution particulière de l'équation (19.40)

$$x = K \sin pt + L \cos pt. \tag{19.42}$$

Mettant (19.42) dans (19.40), nous aurons

$$K = \frac{q(\omega^2 - p^2)}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2}; \quad L = -\frac{2qpn}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2}. \tag{19.43}$$

La solution générale de l'équation (19.40) aura alors la forme suivante

$$x = e^{-nt}(A \sin \omega_1 t + B \cos \omega_1 t) - \\ - \frac{2pqn}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2} \cos pt + \frac{q(\omega^2 - p^2)}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2} \sin pt. \tag{19.44}$$

*) Les méthodes de détermination des caractéristiques d'amortissement des systèmes oscillatoires ainsi que les données concernant les propriétés amortissantes des matériaux de construction sont exposées dans l'ouvrage de Pissarenko G., Yakovlev A., Matvéev V.: «Propriétés d'amortissement des vibrations des matériaux de construction», Aide-mémoire, Ed. «Haoukova doumka», Kiev, 1971.

Comme les oscillations libres caractérisées par le terme contenant le facteur e^{-nt} s'amortissent avec le temps, les oscillations forcées du système, pour des oscillations persistantes, seront caractérisées par les deux derniers termes du deuxième membre de la solution (19.44), ces termes étant proportionnels à q. La période des oscillations entretenues sera

$$T_1 = \frac{2\pi}{p}.$$

Si l'on introduit les substitutions suivantes:

$$\frac{2qpn}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2} = \mathfrak{A} \sin \alpha; \tag{19.45}$$

$$\frac{q(\omega^2 - p^2)}{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2} = \mathfrak{A} \cos \alpha, \tag{19.46}$$

la solution pour des oscillations forcées peut prendre la formule suivante

$$x = \mathfrak{A}(\cos \alpha \sin pt - \sin \alpha \cos pt) = \mathfrak{A} \sin(pt - \alpha), \tag{19.47}$$

où l'amplitude $\mathfrak{A}$ et l'angle de décalage des phases α s'obtiendront, en vertu de (19.45) et (19.46), respectivement des formules:

$$\mathfrak{A} = \frac{q}{\sqrt{(\omega^2 - p^2)^2 + 4p^2n^2}}; \tag{19.48}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2pn}{\omega^2 - p^2}. \tag{19.49}$$

Pour $\omega > p$ l'angle α sera positif et inférieur à $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Pour $\omega < p$ nous aurons $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, autrement dit, les oscillations forcées sont déphasées par rapport à la force perturbatrice de plus de $\frac{\pi}{2}$. Pour $p = \omega$, $\operatorname{tg} \alpha = \infty$, en d'autres termes, le système oscillatoire occupe sa position médiane au moment où la force perturbatrice atteint sa valeur maximum.

Vu que

$$q = \frac{gP}{Q}; \quad \omega^2 = \frac{cg}{Q}, \tag{19.50}$$

trouvons

$$\frac{q}{\omega^2} = \frac{gPQ}{Qcg} = \frac{P}{c} = \delta_{st}, \tag{19.51}$$

ici δ_{st} est la déformation du ressort au moment où la force perturbatrice atteint sa valeur amplitudinale.

Compte tenu de (19.51), l'équation de l'amplitude des oscillations forcées $\mathfrak{A}$ (19.48) peut être mise sous la forme

$$\mathfrak{A} = \frac{\delta_{st}}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4p^2n^2}{\omega^4}}} = \frac{\delta_{st}}{\sqrt{\left(1 - \frac{T^2}{T_1^2}\right)^2 + \frac{T^2\gamma^2}{T_1^2}}}, \tag{19.52}$$

où $\gamma = \frac{2n}{\omega}$ est un coefficient qui dépend de la capacité amortissante du système oscillatoire.

$$\text{Pour } T_1 \gg T,\ \mathfrak{A} \to \delta_{st};\ \text{pour } T_1 \to T,\ \mathfrak{A} \to \infty.$$

Le coefficient de croissance de l'amplitude β est dans le cas examiné égal à

$$\beta = \frac{\mathfrak{A}}{\delta_{st}}$$

ou, compte tenu de (19.52),

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right)^2 + \frac{4p^2n^2}{\omega^4}}}. \tag{19.53}$$

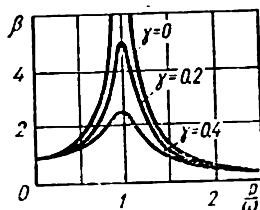


FIG. 322

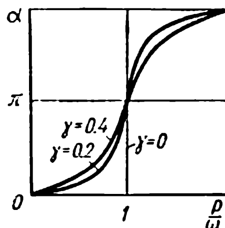


FIG. 323

Les courbes de résonance amplitudinale $\beta = f_1\left(\frac{p}{\omega}\right)$ pour différentes valeurs de γ sont données sur la fig. 322, la fig. 323 montre la courbe traduisant la dépendance $\alpha = f_2\left(\frac{p}{\omega}\right)$.

§ 106. Vitesse critique de rotation d'une tige

On appelle *critique* le nombre de tours pour lequel les tiges en rotation passent dans un état de résonance, se font dynamiquement instables et deviennent le foyer d'oscillations inadmissibles. On peut montrer que ce nombre coïncide avec celui de tours par seconde correspondant à la fréquence propre des oscillations d'une tige.

Examinons la rotation d'un disque installé sur une tige (fig. 324, *a*). Le centre de gravité C du disque est pratiquement toujours décalé par rapport à l'axe de rotation d'une certaine valeur e. La force centrifuge que supporte la tige quand un disque de poids Q se trouve en rotation avec une vitesse angulaire p sera

$$T = \frac{Q}{g} p^2(w + e),$$

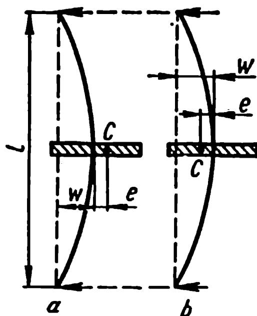


FIG. 324

w étant la flèche de la tige en l'endroit où elle supporte le disque.

La réaction de la tige en l'endroit où est appliquée la force T est égale à

$$P = cw,$$

c étant sa rigidité en flexion. Dans le cas d'une section constante de rigidité EJ et si le disque se trouve au milieu d'une tige aux appuis articulés, $c = \frac{48EJ}{l^3}$.

De la condition d'équilibre il s'ensuit que $P = T$. Substituant à T et P leurs expressions, trouvons:

$$\frac{Q}{g}(w + e)p^2 = cw$$

ou

$$w = \frac{e}{\frac{c}{p^2} \cdot \frac{g}{Q} - 1}. \tag{19.54}$$

Vu que la fréquence propre des oscillations transversales de la tige

$$\omega^2 = \frac{cg}{Q}, \tag{19.55}$$

on peut écrire l'équation (19.54) comme suit:

$$w = \frac{e}{\frac{\omega^2}{p^2} - 1}. \tag{19.56}$$

De (19.56) découle que la vitesse critique, lorsque $w \to \infty$, sera

$$P_{cr} = \omega = \sqrt{\frac{cg}{Q}}. \tag{19.57}$$

Pour $p_{cr} > \omega$ le centre de gravité du disque se situe entre la ligne reliant les appuis et l'axe incurvé de la tige (fig. 324, b). L'équation pour la détermination de la flèche s'écrira alors comme suit:

$$\frac{Q}{g}(w - e)p^2 = cw,$$

d'où

$$w = \frac{e}{1 - \frac{cg}{p^2Q}} = \frac{e}{1 - \frac{\omega^2}{p^2}}. \tag{19.58}$$

De (19.58) il s'ensuit qu'avec l'augmentation de p la flèche $w \to e$, autrement dit, pour des vitesses très grandes le centre de gravité du disque atteint la ligne reliant les appuis, et la tige incurvée tourne autour du centre de gravité C du disque.

§ 107. Oscillations libres des systèmes élastiques à plusieurs degrés de liberté

Lors de l'examen des oscillations des systèmes élastiques à plusieurs degrés de liberté, les équations différentielles de mouvement peuvent, dans la plupart des cas, s'obtenir comme dans le cas d'un système à un degré de liberté en se servant du principe de D'Alambert. Considérons par exemple, le système à deux degrés de liberté (fig. 325, *a*) fait de deux masses

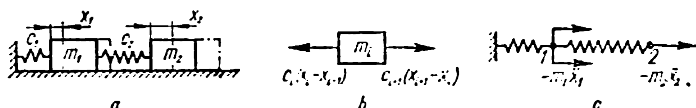


FIG. 325

m_1 et m_2 et deux ressorts à rigidités c_1 et c_2. Supposons que les masses ne peuvent se déplacer, en l'absence de frottement, que dans une direction horizontale le long de l'axe x. Désignons par x_1 et x_2 les déplacements des masses m_1 et m_2 respectivement. On aura alors que la masse m_1 subit l'action des forces de traction des ressorts $-c_1x_1$ et $c_2(x_2 - x_1)$, ainsi que celle de la force d'inertie $-m_1\ddot{x}_1$. L'équation de mouvement de la masse m_1 sera

$$-c_1x_1 + c_2(x_2 - x_1) - m_1\ddot{x}_1 = 0,$$

ou

$$m_1\ddot{x}_1 + c_1x_1 - c_2(x_2 - x_1) = 0. \tag{19.59}$$

La fig. 325, *b* montre le schéma des forces agissant sur la masse i dans le cas le plus général.

En plus de la force d'inertie, la masse m_2 ne subit que l'action de la force de traction du deuxième ressort $-c_2(x_2 - x_1)$ et l'équation de son mouvement sera

$$m_2\ddot{x}_2 + c_2(x_2 - x_1) = 0. \tag{19.60}$$

On aurait pu obtenir les équations de mouvement (19.59) et (19.60) d'une façon quelque peu différente. Effectivement, on peut supposer qu'on

a affaire à deux ressorts reliés entre eux (fig. 325, *c*) qui subissent l'action des forces d'inertie $-m_1\ddot{x}_1$ et $-m_2\ddot{x}_2$ appliquées aux points *1* et *2*.Le premier ressort sera alors sollicité par une force $-m_1\ddot{x}_1 - m_2\ddot{x}_2$,tandis que le second par une force $-m_2\ddot{x}_2$. Dans ce cas, le déplacement de la première masse équivaudra à l'allongement du premier ressort:

$$x_1 = \frac{-m_1\ddot{x}_1 - m_2\ddot{x}_2}{c_1},$$

tandis que le déplacement de la seconde masse

$$x_2 = x_1 - \frac{m_2\ddot{x}_2}{c_2} = \frac{-m_1\ddot{x}_1 - m_2\ddot{x}_2}{c_1} - \frac{m_2\ddot{x}_2}{c_2}.$$

Transformant ces dernières équations, nous aurons un système d'équations différentielles équivalentes à (19.59) et (19.60):

$$x_1 c_1 + m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2 = 0, \qquad (19.61)$$

$$x_2 c_1 c_2 + c_2(m_1\ddot{x}_1 + m_2\ddot{x}_2) + c_1 m_2\ddot{x}_2 = 0. \qquad (19.62)$$

Le procédé le plus général d'établissement des équations différentielles est celui, connu de la mécanique rationnelle, qui est fondé sur l'utilisation des équations de Lagrange de seconde espèce ayant, en l'absence des forces de résistance et des forces perturbatrices extérieures, la forme suivante

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_i} = -\frac{\partial U}{\partial x_i}, \qquad (19.63)$$

$$(i = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

où T et U sont respectivement les énergies cinétique et potentielle du système.

Eu égard au système que montre la fig. 325, *a*, on aura

$$T = \frac{m_1\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m_2\dot{x}_2^2}{2};$$

$$U = \frac{c_1 x_1^2}{2} + \frac{c_2(x_2 - x_1)^2}{2};$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = m_1\dot{x}_1; \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m_2\dot{x}_2; \quad \frac{\partial T}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial T}{\partial x_2} = 0;$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = m_1\ddot{x}_1; \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2\ddot{x}_2;$$

$$\frac{\partial U}{\partial x_1} = c_1x_1 - c_2(x_2 - x_1); \quad \frac{\partial U}{\partial x_2} = c_2(x_2 - x_1).$$

L'équation (19.63) s'écrira

$$\left.\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 + c_1x_1 - c_2(x_2 - x_1) = 0; \\ m_2\ddot{x}_2 + c_2(x_2 - x_1) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (19.64)$$

Les équations obtenues des équations de Lagrange se sont avérées absolument identiques à celles obtenues à partir du principe de D'Alambert. Cette coïncidence reste toujours en vigueur.

Nous chercherons la solution des équations (19.64) dans la forme suivante

$$\left.\begin{aligned} x_1 = \lambda_1 \sin(\omega t + \alpha); \\ x_2 = \lambda_2 \sin(\omega t + \alpha), \end{aligned}\right\} \qquad (19.65)$$

où λ_1, λ_2, ω et α sont des constantes qui doivent être choisies de façon à satisfaire aux équations (19.64). Mettant les solutions (19.65) dans les équations (19.64), nous aurons

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1(c_1 + c_2 - m_1\omega^2) - \lambda_2c_2 = 0; \\ - \lambda_1c_2 + \lambda_2(c_2 - m_2\omega^2) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (19.66)$$

Dans ces équations λ_1, λ_2 et ω sont des inconnues. La fréquence ω s'obtiendra de (19.66) si l'on y pose $\lambda_1 \neq 0$ et $\lambda_2 \neq 0$. Ces conditions ne se réalisent que lorsque le déterminant du système homogène par rapport à λ_1 et λ_2 sera nul:

$$\begin{vmatrix} c_1 + c_2 - m_1\omega^2 & - c_2 \\ - c_2 & c_2 - m_2\omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

ou

$$\omega^4 - \left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2}\right)\omega^2 + \frac{c_1c_2}{m_1m_2} = 0.$$

De là

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2}\right) \mp \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2}\right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}}.$$

Deux fréquences propres correspondantes peuvent être déterminées d'une façon identique

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2}\right) - \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2}\right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}}}; \\ \omega_2 &= \sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2}\right) + \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{c_1 + c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2}\right)^2 - \frac{c_1 c_2}{m_1 m_2}}}. \end{aligned}\right\} \quad (19.67)$$

Conformément à (19.67) un processus oscillatoire à deux fréquences peut s'écrire comme suit:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \lambda_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \lambda_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2); \\ x_2 &= \lambda_{21} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \lambda_{22} \sin(\omega_2 t + \alpha_2). \end{aligned}\right\} \quad (19.68)$$

Le premier indice accompagnant λ montre le numéro de la coordonnée et le second, le numéro du terme dans la ligne ou le numéro de la fréquence. De (19.66) nous aurons

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{c_1 + c_2 - m_1\omega_1^2}{c_2}; \quad \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{c_2}{c_2 - m_2\omega_2^2},$$

ou, en accord avec le système d'indexation adopté,

$$\chi_{21} = \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{11}} = \frac{c_1 + c_2 - m_1\omega_1^2}{c_2};$$

$$\chi_{22} = \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{12}} = \frac{c_2}{c_2 - m_2\omega_2^2}.$$

Les équations (19.68) peuvent alors s'écrire comme suit:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= \lambda_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \lambda_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2); \\ x_2 &= \chi_{21}\lambda_{11} \sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \chi_{22}\lambda_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2). \end{aligned}\right\} \quad (19.69)$$

Les valeurs de $\lambda_{11}, \lambda_{12}, \alpha_1$ et α_2 se déterminent des conditions initiales. Ainsi, en posant $t = 0$

$$x_1(0) = 0; \quad x_2(0) = 0;$$
$$\dot{x}_1(0) = 0; \quad \dot{x}_2(0) = v_0,$$

de (19.69) nous aurons

$$\lambda_{11} \sin \alpha_1 + \lambda_{12} \sin \alpha_2 = 0;$$
$$\chi_{21}\lambda_{11} \sin \alpha_1 + \chi_{22}\lambda_{12} \sin \alpha_2 = 0;$$
$$\lambda_{11}\omega_1 \cos \alpha_1 + \lambda_{12}\omega_2 \cos \alpha_2 = 0;$$
$$\chi_{21}\lambda_{11}\omega_1 \cos \alpha_1 + \chi_{22}\lambda_{12}\omega_2 \cos \alpha_2 = v_0.$$

Comme $\omega_1, \omega_2, \chi_{21}$ et χ_{22} sont connus, on obtient

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0; \quad \lambda_{11} = \frac{v_0}{\omega_1} \cdot \frac{1}{\chi_{21} - \chi_{22}}; \quad \lambda_{12} = \frac{v_0}{\omega_2} \cdot \frac{1}{\chi_{22} - \chi_{21}}.$$

Choisissant les conditions initiales de telle façon que λ_{12} s'annule, nous obtiendrons les oscillations à une fréquence décrites par un seul harmonique

$$x_{11} = \lambda_{11} \sin (\omega_1 t + \alpha_1);$$
$$x_{21} = \chi_{21}\lambda_{11} \sin (\omega_1 t + \alpha_1).$$

Les oscillations décrites par un harmonique sont dites *premières oscillations normales*.

Il est évident que pour des conditions qui vérifient $\lambda_{11} = 0$, les oscillations se produiront d'après la seconde forme. Les secondes oscillations normales seront décrites par les formules

$$x_{12} = \lambda_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2);$$
$$x_{22} = \chi_{22}\lambda_{12} \sin(\omega_2 t + \alpha_2).$$

Le nombre de formes normales des oscillations et celui de fréquences propres coïncident avec le nombre de degrés de liberté du système oscillatoire.

Le tableau 42 offre les fréquences propres des oscillations des systèmes à deux degrés de liberté.

Les tiges élastiques coiffées de disques (fig. 326, *a*) constituent les systèmes oscillatoires à plusieurs degrés de liberté les plus typiques. Examinons les oscillations de torsion d'une telle tige.

Soit $J_1, J_2, J_3, \ldots, J_n$ les moments d'inertie des masses des disques par rapport à l'axe de la tige; $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4, \ldots, \varphi_n$, angles de rotation des

disques en oscillations; $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_n$, rigidités en torsion des parties différentes de la tige:

$$c_i = \frac{GJ_p}{l_i},$$

où J_p — moment d'inertie polaire de l'aire d'une section de la tige; l_i — longueur du tronçon correspondant.

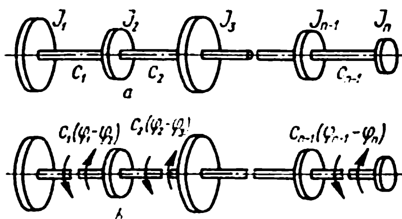


FIG. 326

Les valeurs des moments de torsion qui apparaissent lors de la rotation réciproque des disques dans les sections des tronçons différents de la tige seront respectivement $c_1(\varphi_1 - \varphi_2)$; $c_2(\varphi_2 - \varphi_3)$, etc. (fig. 326, *b*). Les énergies cinétique et potentielle d'un système à n degrés de liberté (si l'on néglige le moment d'inertie de masse de la tige en rotation par comparaison avec les moments d'inertie des disques) peuvent être mises sous la forme

$$\left.\begin{aligned} T &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{J_i \dot{\varphi}_i^2}{2}; \\ U &= \sum_{i=1}^{i=n} \frac{M_{ti}\,\varphi_i}{2}, \end{aligned}\right\} \qquad (19.70)$$

où

$$M_{ti} = c_i(\varphi_i - \varphi_{i+1}).$$

Mettant (19.70) dans les équations de Lagrange (19.63), nous obtiendrons un système des équations différentielles décrivant les oscillations

de torsion libres d'une tige à n degrés de liberté:

$$\left.\begin{aligned}
J_1\ddot{\varphi}_1 + c_1(\varphi_1 - \varphi_2) = 0;\\
J_2\ddot{\varphi}_2 + c_2(\varphi_2 - \varphi_3) - c_1(\varphi_1 - \varphi_2) = 0;\\
J_3\ddot{\varphi}_3 + c_3(\varphi_3 - \varphi_4) - c_2(\varphi_2 - \varphi_3) = 0;\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
J_{n-1}\ddot{\varphi}_{n-1} + c_{n-1}(\varphi_{n-1} - \varphi_n) - c_{n-2}(\varphi_{n-2} - \varphi_{n-1}) = 0;\\
J_n\ddot{\varphi}_n - c_{n-1}(\varphi_{n-1} - \varphi_n) = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (19.71)$$

Additionnant ces équations, nous aurons

$$J_1\ddot{\varphi}_1 + J_2\ddot{\varphi}_2 + \ldots + J_n\ddot{\varphi}_n = 0,$$

d'où

$$J_1\dot{\varphi}_1 + J_2\dot{\varphi}_2 + \ldots + J_n\ddot{\varphi}_n = \text{const},$$

autrement dit, en oscillations libres le moment des quantités de mouvement d'un système autour de l'axe d'une tige reste constant. Généralement, en posant nul le moment des quantités de mouvement, on considère uniquement le mouvement oscillatoire provoqué par le vrillage de la tige en ignorant toute rotation de la tige prise pour un solide.

Nous chercherons la solution des équations (19.71) dans la forme

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1 = \lambda_1 \cos(\omega t + \alpha);\\
\varphi_2 = \lambda_2 \cos(\omega t + \alpha);\\
\cdots\cdots\cdots\\
\varphi_n = \lambda_n \cos(\omega t + \alpha).
\end{aligned}\right\} \qquad (19.72)$$

Mettant (19.72) dans (19.71), nous aurons:

$$\left.\begin{aligned}
J_1\lambda_1\omega^2 - c_1(\lambda_1 - \lambda_2) = 0;\\
J_2\lambda_2\omega^2 + c_1(\lambda_1 - \lambda_2) - c_2(\lambda_2 - \lambda_3) = 0;\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
J_n\lambda_n\omega^2 + c_{n-1}(\lambda_{n-1} - \lambda_n) = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (19.73)$$

Eliminant de ces équations $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, nous obtiendrons *l'équation de fréquence*.

Ainsi, dans le cas de trois disques (fig. 327) le système des équations (19.73) prendra la forme

$$\left.\begin{aligned} J_1\lambda_1\omega^2 - c_1(\lambda_1 - \lambda_2) = 0; \\ J_2\lambda_2\omega^2 + c_1(\lambda_1 - \lambda_2) - c_2(\lambda_2 - \lambda_3) = 0; \\ J_3\lambda_3\omega^2 + c_2(\lambda_2 - \lambda_3) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (19.74)$$

Additionnant ces équations nous aurons

$$J_1\lambda_1 + J_2\lambda_2 + J_3\lambda_3 = 0. \qquad (19.74a)$$

De la première et de la troisième équations du système (19.74) trouvons

$$\lambda_1 = \frac{-c_1\lambda_2}{J_1\omega^2 - c_1}; \quad \lambda_3 = \frac{-c_2\lambda_2}{J_3\omega^2 - c_2}. \qquad (19.75)$$

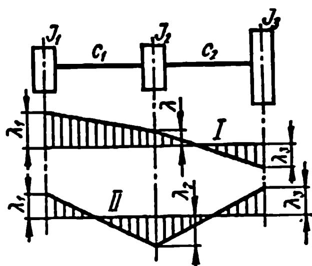


FIG. 327

Introduisant (19.75) dans (19.74a), nous obtiendrons

$$\frac{J_1J_2J_3}{c_1c_2}\omega^4 - \left(\frac{J_1J_2 + J_1J_3}{c_1} + \frac{J_2J_3 + J_1J_3}{c_2}\right)\omega^2 + (J_1 + J_2 + J_3) = 0. \qquad (19.76)$$

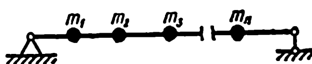


FIG. 328

Résolvant cette équation par rapport à ω^2, on peut obtenir deux racines ω_1^2 et ω_2^2 correspondant aux deux formes principales des oscillations. Introduisant ensuite ω_1^2 et ω_2^2 dans l'équation (19.75), nous obtiendrons les rapports des amplitudes $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ et $\frac{\lambda_2}{\lambda_3}$ propres à deux formes principales des oscillations pour établir ensuite l'état oscillatoire du système. Les deux formes des oscillations ci-indiquées pour un système oscillatoire à trois masses sont représentées sur la fig. 327 par les diagrammes I et II pour les oscillations à un nœud et deux nœuds respectivement.

En guise d'un autre exemple d'un système à plusieurs degrés de liberté, examinons les oscillations transversales d'une poutre élastique portant une série de masses ponctuelles (fig. 328). Dans les endroits où sont appli-

quées les masses $\dot m_1, \dot m_2, \ldots, \dot m_n$ les flèches peuvent être exprimées par l'intermédiaire des forces d'inertie dans la forme canonique suivante:

$$\left.\begin{aligned} w_1 &= -m_1\ddot{w}_1\delta_{11} - m_2\ddot{w}_2\delta_{12} - \ldots - m_n\ddot{w}_n\delta_{1n};\\ w_2 &= -m_1\ddot{w}_1\delta_{21} - m_2\ddot{w}_2\delta_{22} - \ldots - m_n\ddot{w}_n\delta_{2n};\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ w_n &= -m_1\ddot{w}_1\delta_{n1} - m_2\ddot{w}_2\delta_{n2} - \ldots - m_n\ddot{w}_n\delta_{nn}, \end{aligned}\right\} \qquad (19.77)$$

où (voir § 69)

$$\delta_{ik} = \sum \int_0^l \frac{\overline{M}_i\overline{M}_k}{EJ}\,dz$$

(les indices ik accompagnant δ traduisent les déplacements dans la direction i provoqués par une force unitaire agissant dans la direction k); $\overline{M}_i(z)$, $\overline{M}_k(z)$ — moments fléchissants créés respectivement par les forces unitaires $\overline{P}_i = -m_i\ddot{w}_i = 1$; $\overline{P}_k = -m_k\ddot{w}_k = 1$.

Les coefficients δ_{ik} se déterminent plus facilement par la formule de Véréchagine (§ 71):

$$\delta_{ik} = \sum \frac{\Omega_i\overline{M}_k^c}{EJ},$$

où Ω est l'aire du diagramme de $\overline{M}_i$ (ou de sa partie); $\overline{M}_k^c$, ordonnée du diagramme $\overline{M}_k$ située en regard du centre de gravité de l'aire du diagramme Ω.

Pour un système à un degré de liberté nous aurons, en vertu de (19.77), une équation à une inconnue

$$w_1 = -m_1\ddot{w}_1\delta_{11}.$$

Cette équation est équivalente à

$$m\ddot{w} + cw = 0,$$

car

$$c = \frac{1}{\delta_{11}}.$$

Pour un système à deux degrés de liberté les fonctions inconnues de la flèche w_1 et w_2 s'écriront, en vertu de (19.77), comme suit:

$$w_1 = -m_1\ddot{w}_1\delta_{11} - m_2\ddot{w}_2\delta_{12};$$

$$w_2 = -m_1\ddot{w}_1\delta_{21} - m_2\ddot{w}_2\delta_{22}.$$

Pour la résolution plus générale des équations (19.77), il convient de chercher la fonction pour la flèche dans la forme suivante:

$$w_i = \lambda_i \sin(\omega t + \alpha). \qquad (19.78)$$

Mettant (19.78) dans (19.77), nous trouverons

$$\left.\begin{aligned}\lambda_1(m_1\delta_{11}\omega^2 - 1) + \lambda_2 m_2\delta_{12}\omega^2 + \ldots + \lambda_n m_n\delta_{1n}\omega^2 = 0;\\ \lambda_1 m_1\delta_{21}\omega^2 + \lambda_2(m_2\delta_{22}\omega^2 - 1) + \ldots + \lambda_n m_n\delta_{2n}\omega^2 = 0;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \lambda_1 m_1\delta_{n1}\omega^2 + \lambda_2 m_2\delta_{n2}\omega^2 + \ldots + \lambda_n(m_n\delta_{nn}\omega^2 - 1) = 0.\end{aligned}\right\} \quad (19.79)$$

En présence des oscillations, l'amplitude λ_i ne s'annule pas si le déterminant composé de coefficients accompagnant les termes des équations (19.79) est égal à zéro:

$$\begin{vmatrix} m_1\delta_{11}\omega^2 - 1 & m_2\delta_{12}\omega^2 \ldots & m_n\delta_{1n}\omega^2\\ m_1\delta_{21}\omega^2 & m_2\delta_{22}\omega^2 - 1 \ldots & m_n\delta_{2n}\omega^2\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ m_1\delta_{n1}\omega^2 & m_2\delta_{n2}\omega^2 \ldots & m_n\delta_{nn}\omega^2 - 1\end{vmatrix} = 0. \quad (19.80)$$

Mettant ce déterminant dans une forme plus détaillée, nous aurons

$$1 - a_1\omega^2 + a_2\omega^4 - a_3\omega^6 + \ldots + (-1)^n a_n\omega^{2n} = 0, \quad (19.81)$$

où a_i — coefficients qui accompagnent les puissances différentes de la fréquence angulaire ω.

De (19.81) on peut tirer les expressions qui donnent les fréquences $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n (\omega_1 > \omega_2 > \ldots > \omega_n)$.

La solution générale du système des équations (19.79) sera

$$w_i = \lambda_{i1}\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \lambda_{i2}\sin(\omega_2 t + \alpha_2) + \ldots \\ \ldots + \lambda_{in}\sin(\omega_n t + \alpha_n),$$

ou bien

$$\begin{aligned} w_1 &= \lambda_{11}\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \lambda_{12}\sin(\omega_2 t + \alpha_2) + \ldots + \lambda_{1n}\sin(\omega_n t + \alpha_n);\\ w_2 &= \lambda_{21}\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \lambda_{22}\sin(\omega_2 t + \alpha_2) + \ldots + \lambda_{2n}\sin(\omega_n t + \alpha_n);\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ w_n &= \lambda_{n1}\sin(\omega_1 t + \alpha_1) + \lambda_{n2}\sin(\omega_2 t + \alpha_2) + \ldots + \lambda_{nn}\sin(\omega_n t + \alpha_n).\end{aligned}$$

Dans le cas particulier d'un système à deux degrés de liberté, les équations (19.79) et (19.80) auront la forme suivante

$$\lambda_1(m_1\delta_{11}\omega^2 - 1) + \lambda_2 m_2\delta_{12}\omega^2 = 0;$$

$$\lambda_1 m_1\delta_{21}\omega^2 + \lambda_2(m_2\delta_{22}\omega^2 - 1) = 0;$$

$$\begin{vmatrix} m_1\delta_{11}\omega^2 - 1 & m_2\delta_{12}\omega^2\\ m_1\delta_{21}\omega^2 & m_2\delta_{22}\omega^2 - 1\end{vmatrix} = 0,$$

ou bien

$$\omega^4(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)\, m_1 m_2 - \omega^2(\delta_{11} m_1 + \delta_{22} m_2) + 1 = 0.$$

Résolvant cette dernière équation, nous obtiendrons les expressions pour les fréquences ω_1 et ω_2:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)\, m_2} \left[\delta_{11} + \delta_{22}\frac{m_2}{m_1} + \right.}$$

$$\overline{\left. + \sqrt{\left(\delta_{11} + \delta_{22}\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - 4(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)^2 \frac{m_2}{m_1}}\, \right]};$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{1}{2(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)\, m_2} \left[\delta_{11} + \delta_{22}\frac{m_2}{m_1} - \right.}$$

$$\overline{\left. - \sqrt{\left(\delta_{11} + \delta_{22}\frac{m_2}{m_1}\right)^2 - 4(\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}^2)^2 \frac{m_2}{m_1}}\, \right]}.$$

§ 108. Oscillations longitudinales et vibrations de torsion des barres

Toutes les particules d'une barre en *oscillations longitudinales* effectuent un mouvement parallèle à l'axe. Pour établir l'équation différentielle des oscillations longitudinales d'une barre, considérons la condition de l'équilibre dynamique d'un tronçon de la barre de longueur dz (fig. 329, *a*) délimité par les sections *a* et *b*. Désignant par u le déplacement de la section *a* et par $u + \frac{\partial u}{\partial z} dz$ celui de la section *b*, obtenons les efforts qui fatiguent les sections *a* et *b* $\left(\text{sans perdre de vue que l'allongement relatif } \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial z}\right)$:

$$N_a = -EF\frac{\partial u}{\partial z};$$

$$N_b = EF\left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) dz\right].$$

La force d'inertie d'un élément de la barre de longueur dz sera, pour une masse générale de la barre m et une longueur l,

$$P_i = \frac{m}{l} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dz.$$

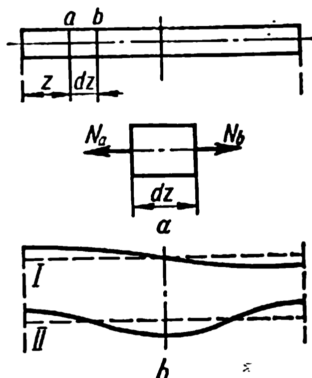


FIG. 329

Se servant du principe de D'Alambert on peut alors écrire la condition d'équilibre dynamique de l'élément de la barre dans la forme suivante:

$$N_b - N_a = P_i,$$

ou

$$EF \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) dz = \frac{m}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} dz.$$

En simplifiant par dz et substituant de $\frac{m}{lF}$ à ρ (densité du matériau), l'équation différentielle des oscillations longitudinales d'une barre s'écrira

$$E \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \tag{19.82}$$

Introduisant la désignation $\frac{E}{\rho} = a^2$, écrivons l'équation (19.82) comme suit:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{19.83}$$

D'après la méthode de Fourier nous chercherons la solution de l'équation (19.33) dans la forme

$$u = ZT, \tag{19.84}$$

où

$$Z = f_1(z); \quad T = f_2(t).$$

Après avoir dérivé l'équation (19.84) par rapport à z et à t on obtient

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Z\frac{d^2T}{dt^2}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = T\frac{d^2Z}{dz^2}. \tag{19.85}$$

Mettant (19.85) dans (19.83), nous aurons

$$Z\frac{d^2T}{dt^2} = a^2T\frac{d^2Z}{dz^2},$$

ou bien

$$\frac{1}{T}\cdot\frac{d^2T}{dt^2} = \frac{a^2}{Z}\cdot\frac{d^2Z}{dz^2}.$$

Egalant, dans cette dernière équation, les membres droit et gauche à une même constante ω^2, nous obtiendrons deux équations ordinaires de second degré:

$$\frac{d^2T}{dt^2} = -\omega^2T; \tag{19.86}$$

$$\frac{d^2Z}{dZ^2} = -\frac{\omega^2}{a^2}Z. \tag{19.87}$$

Les solutions particulières de ces équations seront respectivement

$$\begin{aligned} T &= \cos\omega t; \quad \sin\omega t; \\ Z &= \cos\frac{\omega}{a}z; \quad \sin\frac{\omega}{a}z. \end{aligned} \tag{19.88}$$

Pour obtenir la solution générale de l'équation (19.86) constituée des solutions particulières (19.88), il faut prendre en considération les conditions limites de la barre. Ainsi, si les deux bouts sont libres, on a les conditions suivantes:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=0} = 0; \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{z=l} = 0. \tag{19.89}$$

L'introduction des solutions (19.88) dans (19.86) et (19.87) nous montre que la solution $\sin \frac{\omega}{a} z$ est à exclure de l'équation (19.87) comme ne répondant pas à la première condition (19.89).

Pour satisfaire à la seconde condition (19.89), il faut que se vérifie l'égalité

$$\sin \frac{\omega}{a} l = 0. \tag{19.90}$$

Cette *équation de fréquence* sera satisfaite pour

$$\frac{\omega}{a} l = i\pi,$$

où $i = 1, 2, 3, \ldots$

La fréquence du ton fondamental des oscillations s'obtiendra pour $i = 1$;

$$\omega_1 = \frac{a\pi}{l} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \tag{19.91}$$

La période des oscillations correspondante sera

$$\tau_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 2l \sqrt{\frac{\rho}{E}}. \tag{19.92}$$

La forme de ce type d'oscillations est montrée sur la fig. 329, *b* par la courbe I

$$Z_1 = C_1 \cos \frac{\omega_1 z}{a} = C_1 \cos \frac{\pi z}{l}.$$

La forme du second type des oscillations

$$\frac{\omega_2 l}{a} = 2\pi \text{ et } Z_2 = C_2 \cos \frac{2\pi z}{l}$$

est représentée sur la fig. 329, *b* (courbe *II*).

Pour la forme *i* des oscillations l'aspect général de la solution particulière de l'équation (19.83) sera

$$u = \cos \frac{i\pi z}{l} \left(A_i \cos \frac{i\pi a t}{l} + B_i \sin \frac{i\pi a t}{l} \right). \tag{19.93}$$

En superposant de telles solutions particulières, on peut représenter n'importe quelle oscillation longitudinale d'une barre dans la forme

$$u = \sum_{i=1,2,3\ldots} \cos\frac{i\pi z}{l}\left(A_i \cos\frac{i\pi at}{l} + B_i \sin\frac{i\pi at}{l}\right), \tag{19.94}$$

où les constantes arbitraires A_i et B_i doivent être choisies à partir des conditions d'équilibre.

Ainsi, soit $(u)_{t=0} = f(z)$; $(u')_{t=0} = f_1(z)$ pour $t = 0$, de (19.94) trouvons alors pour $t = 0$

$$f(z) = \sum_{i=1}^{i=\infty} A_i \cos\frac{i\pi z}{l};$$

$$f_1(z) = \sum_{i=1}^{i=\infty} \frac{i\pi a}{l} B_i \cos\frac{i\pi z}{l},$$

où, en faisant appel à la méthode de Fourier, trouvons

$$A_i = \frac{2}{l}\int_0^l f(z)\cos\frac{i\pi z}{l}\,dz;$$

$$B_i = \frac{2}{i\pi a}\int_0^l f_1(z)\cos\frac{i\pi z}{l}\,dz.$$

Pour se faire une idée de vibrations de torsion d'une barre (par exemple de forme cylindrique) il suffit de tracer une ligne ondulée sur la développée de la surface de la barre (fig. 330, *a*). Désignons par φ l'angle de torsion d'une section distant de z par rapport à une section immobile et par

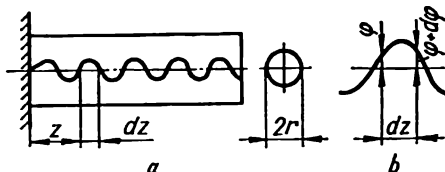


FIG. 330

$\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$, l'angle de torsion d'une section ayant pour coordonnée $z + dz$ (fig. 330, *b*). L'angle de torsion réciproque d'un élément de longueur dz sera alors $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ tandis que les moments de torsion (§ 46) sollicitant les sections d'une barre de rigidité en torsion GJ_p et délimitant un segment élémentaire de cette dernière dz, de sa gauche et droite, seront:

$$GJ_p \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad \text{et} \quad GJ_p \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} dz \right).$$

Egalant la résultante de ces moments de torsion au moment d'inertie en torsion d'un élément de longueur dz qui vaut $\rho J_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dz$, ρ étant la densité du matériau, nous obtiendrons l'équation différentielle des vibrations de torsion de la barre

$$GJ_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} dz = \rho J_p \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dz,$$

ou, après simplification par J_p et dz:

$$G \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}. \tag{19.95}$$

Désignant $\frac{G}{\rho}$ par a^2, on peut mettre l'équation (19.95) dans la forme suivante

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \tag{19.96}$$

La solution d'une équation de ce genre a été examinée plus haut pour le cas des oscillations longitudinales d'une barre.

Le tableau 43 montre les équations de fréquence et les formes propres des oscillations longitudinales et vibrations de torsion des barres pour différentes conditions limites.

§ 109. Oscillations transversales des barres prismatiques

L'équation différentielle des oscillations transversales d'une barre s'obtient de l'analyse des conditions d'un équilibre dynamique d'un élément dz (fig. 331) prélevé d'une barre appuyée de façon arbitraire.

Projetant toutes les forces qui sollicitent cet élément (y compris les forces d'inertie en accord avec le principe de D'Alambert) sur l'axe vertical w, nous aurons

$$Q - q_i dz - Q - \frac{\partial Q}{\partial z} dz = 0,$$

d'où

$$q_i = -\frac{\partial Q}{\partial z}, \tag{19.97}$$

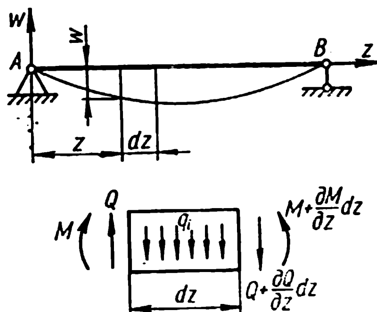


FIG. 331

Q étant l'effort tranchant; q_i — l'intensité des forces d'inertie de la masse

$$q_i = \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \tag{19.98}$$

(F, aire de la section transversale; ρ, densité du matériau; w, déplacement transversal; t, temps).

Mettant (19.98) dans (19.97), trouvons l'équation du mouvement de translation de l'élément de la barre en oscillations

$$\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -\frac{\partial Q}{\partial z}. \tag{19.99}$$

Pour obtenir l'équation du mouvement rotatoire de l'élément de la barre dans le plan wz additionnons l'angle de rotation θ de la section

provoquée par la flexion avec l'angle de cisaillement γ dû à l'action de l'effort tranchant:

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \theta + \gamma. \tag{19.100}$$

Vu la relation bien connue entre le moment fléchissant M et l'angle de rotation θ (§ 54)

$$M = EJ \frac{d\theta}{dz}, \tag{19.101}$$

ainsi qu'entre l'effort tranchant Q et l'angle de cisaillement γ qui, pour le système des coordonnées adopté, s'exprime (§ 66)

$$Q = -k\gamma FG \tag{19.102}$$

(k, facteur dépendant de la forme de la section de la barre), l'expression de Q peut, conformément à (19.100)-(19.102), être représentée comme suit:

$$Q = -kFG\left(\frac{\partial w}{\partial z} - \theta\right). \tag{19.103}$$

Vu que le moment d'inertie de rotation de la masse de l'élément considéré est

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\int y^2 dm = \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}\int y^2\rho \, dF \, dz = \rho J \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} dz,$$

l'équation de mouvement rotatoire de l'élément en question peut, en vertu du principe de D'Alambert, s'écrire dans la forme suivante

$$Q\,dz - \frac{\partial M}{\partial z} dz = -\rho J \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} dz$$

ou, après simplification par dz et introduction de (19.101),

$$kGF\left(\frac{\partial w}{\partial z} - \theta\right) + EJ\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} - \rho J \frac{\partial^2\theta}{\partial t^2} = 0.$$

Dérivant cette équation par rapport à z, nous aurons

$$k\,GF\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial\theta}{\partial z}\right) + EJ\frac{\partial^3\theta}{\partial z^3} - \rho J \frac{\partial^3\theta}{\partial z\,\partial t^2} = 0. \tag{19.104}$$

Mettant (19.103) dans (19.99), nous aurons

$$\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - k\, GF\left(\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} - \frac{\partial \theta}{\partial z}\right) = 0. \qquad (19.105)$$

Excluant l'angle θ de (19.104) et (19.105), nous obtiendrons l'équation différentielle des oscillations transversales libres de la barre

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} - \rho J\left(1 + \frac{E}{kG}\right)\frac{\partial^4 w}{\partial z^2 \partial t^2} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \frac{\rho^2 J}{kG}\frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0. \qquad (19.106)$$

Si l'on néglige les forces d'inertie de rotation de l'élément ainsi que l'influence de l'effort tranchant sur la flexion, l'équation (19.106) prendra la forme suivante

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \qquad (19.107)$$

La solution périodique la plus élémentaire de l'équation (19.107) est l'oscillation dite *oscillation fondamentale* caractérisée par le fait qu'une barre en flexion obéit, dans le temps, à une loi harmonique

$$w = \varphi(z) \sin(\omega t + \alpha). \qquad (19.108)$$

La fonction $\varphi(z)$ qui établit la loi de distribution des écarts maximaux des points de l'axe de la barre porte le nom de *forme de l'oscillation principale* ou *forme propre*.

Pour obtenir les équations des formes propres, mettons (19.108) dans (19.107) et, après simplification par $\sin(\omega t + \alpha)$, nous aurons

$$\frac{d^4 \varphi}{dz^4} - k^4 \varphi = 0, \qquad (19.109)$$

où

$$k^4 = \frac{\rho F \omega^2}{EJ}. \qquad (19.110)$$

La solution générale de l'équation (19.109) a la forme suivante

$$\varphi(z) = A \cos kz + B \sin kz + C \operatorname{ch} kz + D \operatorname{sh} kz, \qquad (19.111)$$

ou, exprimée en fonctions de Krylov dont les valeurs sont données dans l'Appendice 3,

$$\varphi(z) = C_1 S(kz) + C_2 T(kz) + C_3 U(kz) + C_4 V(kz).$$

Ici A, B, C, D (ou C_1, C_2, C_3, C_4), constantes d'intégration qui se déterminent des conditions de fixation de la barre. Ainsi, pour une barre aux appuis articulés (fig. 332), ces conditions seront:

$$\text{pour } z = 0 \quad \varphi(0) = 0; \quad \varphi''(0) = 0;$$

$$\text{pour } z = l \quad \varphi(l) = 0; \quad \varphi''(l) = 0.$$

Partant de ces conditions, ainsi que de (19.111), nous aurons

$$A + C = 0; \quad B \sin kl + D \operatorname{sh} kl = 0;$$

$$-A + C = 0; \quad -B \sin kl + D \operatorname{sh} kl = 0,$$

d'où

$$A = C = D = 0,$$

$$B \sin kl = 0.$$

Mais comme $B \neq 0$, il vient que $\sin kl = 0$. De cette *équation de fréquence* trouvons

$$k_i l = i\pi$$

$$(i = 1, \ 2, \ 3, \ \ldots).$$

De l'égalité

$$k_i^4 = \frac{\rho F \omega_i^2}{EJ} = \frac{m\omega_i^2}{EJ}$$

déterminons la fréquence angulaire propre

$$\omega_i = k_i^2 \sqrt{\frac{EJ}{m}} = \frac{i^2\pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}, \tag{19.112}$$

la période

$$T = \frac{2\pi}{\omega_i} = \frac{2l^2}{i^2\pi} \sqrt{\frac{m}{EJ}}$$

et la fréquence des oscillations, en Hz,

$$f = \frac{1}{T} = \frac{i^2\pi}{2l^2} \sqrt{\frac{EJ}{m}}. \tag{19.113}$$

L'équation des formes propres des oscillations de la barre sera

$$\varphi_i(z) = B \sin \frac{i\pi z}{l}. \tag{19.114}$$

La fig. 332 montre les trois premières formes des oscillations pour une poutre reposant sur deux appuis.

Appliquée à la poutre sur deux appuis, la solution de l'équation différentielle (19.107) peut s'écrire dans la forme

$$w(z,t) = \sum_{i=1}^{\infty} (a_i \cos \omega_i t + b_i \sin \omega_i t) \sin \frac{i\pi z}{l}, \qquad (19.115)$$

où a_i et b_i doivent être choisis des conditions initiales (pour $t = 0$).

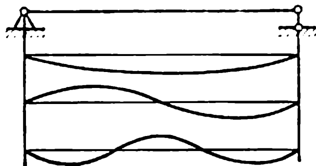


FIG. 332

Les équations de fréquences et leurs racines, ainsi que les équations des formes propres des oscillations transversales des barres pour procédés différents de fixation de leurs bouts sont données dans le tableau 44. Les racines des équations de fréquence pour des oscillations transversales des barres reposant sur des appuis élastiques sont représentées au tableau 45; pour celles des barres aux masses ponctuelles, au tableau 46. Le tableau 47 donne les valeurs de quelques intégrales qu'on rencontre en calcul des oscillations transversales des barres.

Si une barre en oscillations éprouve l'action d'une force longitudinale de compression N, l'équation différentielle de la déformée a la forme suivante

$$EJ \frac{d^2w}{dz^2} = M(z) - Nw.$$

Après avoir dérivé deux fois cette équation et en se rapportant au principe de D'Alambert selon lequel $\frac{d^2M}{dz^2} = -\rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$ nous obtiendrons l'équation différentielle des oscillations transversales libres de la barre

$$EJ \frac{\partial^4 w}{\partial z^4} + N \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \rho F \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0.$$

La forme propre des oscillations est donnée, dans ce cas, par l'expression

$$\varphi(z) = A\cos k_1 z + B\sin k_1 z + C\,\mathrm{ch}\,k_2 z + D\,\mathrm{sh}\,k_2 z,$$

où

$$k_1 = a\sqrt{\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{k^4}{a^4}}};$$

$$k_2 = a\sqrt{-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{k^4}{a^4}}};$$

$$a^2 = \frac{N}{EJ}.$$

La valeur de k se détermine de la formule (19.110).

Le tableau 48 donne les expressions pour les fréquences propres des oscillations transversales des barres sollicitées par des forces longitudinales.

§ 110. Loi de conservation de l'énergie pour des oscillations

Du principe de conservation de l'énergie en oscillations il s'ensuit que la somme des énergies cinétique et potentielle d'un système mécanique oscillatoire reste, à tout moment, constante (les pertes d'énergie sont à négliger), c'est-à-dire

$$T + U = \text{const.} \tag{19.116}$$

En particulier, l'équation (19.116) appliquée à un système à un degré de liberté (fig. 333), pour lequel

$$T = \frac{Q}{2g}\dot{x}^2;$$

$$U = \frac{cx^2}{2},$$

prend la forme suivante:

$$\frac{Q}{2g}\dot{x}^2 + \frac{cx^2}{2} = \text{const}, \tag{19.117}$$

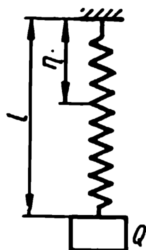


FIG. 333

c étant la rigidité du ressort.

La partie droite de l'équation (19.117) dépend des conditions initiales. Si, par exemple, pour $t = 0$, le déplacement $(x)_{t=0} = x_0$, tandis que la vitesse initiale $(\dot{x})_{t=0} = \dot{x}_0 = 0$, nous aurons

$$\frac{Q}{2g}\dot{x}^2 + \frac{cx^2}{2} = \frac{cx_0^2}{2}, \tag{19.118}$$

autrement dit, lors des oscillations la somme des énergies cinétique et potentielle reste égale à l'énergie initiale de déformation du ressort étendu de x_0.

L'analyse de l'équation (19.118) montre qu'au moment où le poids en oscillations se trouve dans une position médiane ($x = 0$), l'énergie du système est déterminée par l'énergie cinétique

$$\frac{Q\dot{x}_{max}^2}{2g} = \frac{cx_0^2}{2}. \tag{19.119}$$

L'équation (19.119) peut être utilisée pour la détermination de la fréquence des oscillations. Effectivement, posant

$$x = x_0 \cos \omega t; \quad \dot{x}_{max} = x_0\omega,$$

et après avoir introduit les valeurs de x et $\dot{x}_{max}$ dans (19.119), nous aurons

$$\frac{Qx_0^2\omega^2}{2g} = \frac{cx_0^2}{2},$$

de là

$$\omega^2 = \frac{cg}{Q}$$

et

$$\omega = \sqrt{\frac{cg}{Q}} = \sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}, \tag{19.120}$$

ce qui coïncide avec la formule (19.3) établie plus haut.

A remarquer qu'il est aisé d'obtenir l'équation différentielle de mouvement d'un poids en oscillations à partir de l'équation (19.117) qui traduit la loi de conservation de l'énergie pour des oscillations. Il suffit pour cela de dériver l'équation (19.117) par rapport au temps t et d'effectuer les simplifications correspondantes.

§ 111. Quelques méthodes approximatives de détermination des fréquences propres des oscillations des systèmes élastiques

Procédé de Rayleigh. La fréquence des oscillations se détermine de l'examen de la balance d'énergie du système avec certaines hypothèses quant à la déformation d'un système oscillatoire élastique. En particulier, pour prendre en ligne de compte la masse d'un ressort dans le système à un degré de liberté (fig. 333) on fait les suppositions suivantes: la masse du ressort est insignifiante par comparaison avec la masse du point suspendu Q; la forme des oscillations ne dépend pas de façon sensible de la masse du ressort; on admet, avec une précision suffisante, que le déplacement de n'importe quelle section transversale à une distance η à partir de l'extrémité fixée est le même que si le ressort était impondérable (égal à $\frac{x\eta}{l}$, l étant la longueur du ressort).

Si le poids de l'unité de longueur du ressort est q, l'énergie cinétique d'un élément du ressort de longueur $d\eta$ sera

$$dT_r = \frac{q}{2g}\left(\frac{\eta}{l}\cdot\frac{dx}{dt}\right)^2 d\eta,$$

et l'énergie cinétique totale de tout le ressort s'exprimera par l'intégrale

$$T_r = \int_0^l \frac{q}{2g}\left(\frac{\eta}{l}\cdot\frac{dx}{dt}\right)^2 d\eta = \frac{1}{2g}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 \frac{ql}{3},$$

Il convient d'additionner cette valeur de l'énergie cinétique du ressort avec l'énergie cinétique du poids

$$T_Q = \frac{Q}{2g}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

L'énergie cinétique totale sera alors

$$T = T_Q + T_r = \frac{1}{2g}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\left(Q + \frac{ql}{3}\right).$$

L'expression pour l'énergie potentielle reste la même:

$$U = \frac{cx^2}{2}.$$

La condition de conservation de l'énergie dans un système en oscillations peut alors s'écrire

$$\frac{1}{2g}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\left(Q+\frac{ql}{3}\right)+\frac{cx^2}{2}=\frac{cx_0^2}{2}.$$

Comparant cette équation avec (19.118), on constate que pour prendre en considération l'influence de la masse du ressort sur la fréquence des oscillations propres, il faut ajouter au poids de la charge le tiers du poids du ressort. Ainsi, la fréquence angulaire se détermine de la formule

$$\omega=\sqrt{\frac{cg}{Q+\frac{ql}{3}}}. \tag{19.121}$$

Examinons les oscillations d'une charge située au milieu d'une poutre (fig. 334). Conformément à la méthode de Rayleigh, nous supposerons que le poids de la poutre ql est petit par comparaison avec la charge Q et que la courbe décrite par la flèche de la poutre en oscillations a la même forme que la courbe décrite par une flèche statique. Désignant par f le

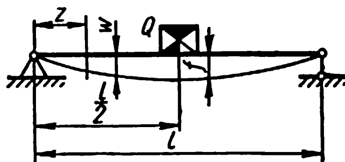


FIG. 334

déplacement de la charge Q lors des oscillations, on obtient l'expression pour le déplacement transversal d'un élément quelconque de la barre, de longueur dz et de poids qdz, se trouvant à une distance z de l'appui (page 365):

$$w=f\frac{3zl^2-4z^3}{l^3}. \tag{19.122}$$

L'énergie cinétique de la poutre est

$$T_p=2\frac{q}{2g}\int_0^{l/2}\left(\frac{df}{dt}\cdot\frac{3zl^2-4z^3}{l^3}\right)^2dz=\frac{17}{35}\cdot\frac{ql}{2g}\left(\frac{df}{dt}\right)^2.$$

L'énergie cinétique de la charge

$$T_c = \frac{Q}{2g}\left(\frac{df}{dt}\right)^2.$$

L'énergie cinétique totale du système sera

$$T = T_c + T_p = \frac{Q + \frac{17}{35}ql}{2g}\left(\frac{df}{dt}\right)^2. \tag{19.123}$$

Nous servant de l'expression connue pour l'énergie potentielle de déformation en flexion

$$U = \int_0^l \frac{M^2 dz}{2EJ},$$

et compte tenu de ce que

$$M = EJ\frac{d^2w}{dz^2},$$

où, pour le cas considéré, conformément à (19.122),

$$\frac{d^2w}{dz^2} = -\frac{24}{l^3}fz,$$

nous aurons:

$$U = 2\int_0^{l/2} \frac{EJ}{2}\left(\frac{24}{l^3}fz\right)^2 dz = \frac{24EJ}{l^3}f^2.$$

La condition de conservation de l'énergie pour des oscillations prendra alors la forme suivante

$$T + U = \frac{Q + \frac{17}{35}ql}{2g}\left(\frac{df}{dt}\right)^2 + \frac{24EJ}{l^3}f^2 = \text{const.}$$

Dérivant cette dernière équation par rapport au temps t, nous obtiendrons après simplifications

$$\frac{d^2f}{dt^2} + \frac{48EJ}{l^3}\cdot\frac{g}{Q + \frac{17}{35}ql}f = 0, \tag{19.124}$$

ou, en introduisant la notion de flèche réduite $\delta_{réd}$,

$$\delta_{réd} = \frac{Q + \frac{17}{35}\gamma F l}{48EJ} l^3, \qquad (19.125)$$

on peut mettre l'équation différentielle des oscillations d'une charge située sur une poutre, prenant en considération la masse de cette dernière (19.124), dans sa forme définitive suivante

$$\frac{d^2 f}{dt^2} + \frac{g}{\delta_{réd}} f = 0.$$

De là et conformément à (19.120) on obtient la fréquence angulaire des oscillations de la charge

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\delta_{réd}}}. \qquad (19.126)$$

De (19.125), il découle que pour tenir compte de la masse d'une poutre lors de la détermination de la fréquence des oscillations propres d'une charge située au milieu de cette poutre, il suffit d'ajouter au poids de cette charge $\frac{17}{35} = 0{,}483$ du poids de la poutre. La grandeur $\frac{17}{35} q \frac{l}{g}$ est dite *masse réduite de la poutre.*

Utilisons la méthode de Rayleigh pour déterminer la fréquence des oscillations transversales d'une barre aux masses ponctuelles (fig. 328). On suppose que dans ce cas l'énergie cinétique du système n'est déterminée que par le mouvement de translation des masses, tandis que l'énergie potentielle ne dépend que de la flexion de la barre. En admettant que toutes les masses oscillent avec une même fréquence et que leurs phases coïncident, nous pouvons décrire le déplacement dans le temps de la section d'une poutre ayant pour abscisse z à l'aide d'une loi sinusoïdale

$$\varphi(z, t) = w(z) \sin(\omega t + \alpha),$$

où $w(z)$ est une fonction décrivant la forme des oscillations.

La vitesse de déplacement de l'axe de la poutre sera

$$v(z, t) = \frac{\partial \varphi(z, t)}{\partial t} = \omega w(z) \cos(\omega t + \alpha), \; v_{max} = \omega w(z).$$

La valeur maximale de l'énergie cinétique de n masses est égale à

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{i=n} m_i \omega^2 w_i^2, \qquad (19.127)$$

où w_i est la valeur amplitudinale de la flèche en l'endroit où se trouve une masse ponctuelle i.

L'énergie potentielle maximale de déformation de la poutre est

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l EJ \left(\frac{d^2 w(z)}{dz^2} \right)^2 dz. \tag{19.128}$$

Egalant les seconds membres des équations (19.127) et (19.128) et résolvant l'équation obtenue par rapport à ω^2, nous aurons

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EJ \left(\frac{d^2 w}{dz^2} \right)^2 dz}{\sum_{i=1}^{i=n} m_i w_i^2} \cdot \tag{19.129}$$

Dans le cas d'une masse distribuée de façon ininterrompue, la formule de Rayleigh pour une détermination approximative du carré de la fréquence angulaire (19.129) prend la forme suivante

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l EJ \left(\frac{d^2 w}{dz^2} \right)^2 dz}{\int_0^l m w^2 dz,} , \tag{19.130}$$

avec

$$m = \frac{F\gamma}{g} \cdot$$

Si la forme réelle des oscillations $w(z)$ est connue, la formule (19.129) donne la valeur précise de la fréquence. Généralement, la fonction de la flèche $w(z)$ n'est pas connue en avance et, conformément à la méthode de Rayleigh, il faut la fixer.

Procédé de Ritz. Il représente un développement ultérieur du procédé de Rayleigh. Dans l'équation de la déformée d'un système en oscillations on introduit certains paramètres dont les valeurs se choisissent de façon

à rendre minimale la fréquence du ton fondamental. Ainsi, pour des oscillations transversales d'une barre la fonction de la flèche se met à la forme d'une série

$$w(z) = a_1 w_1(z) + a_2 w_2(z) + \ldots, \qquad (19.131)$$

dont chaque terme doit satisfaire aux conditions limites tandis que les coefficients $a_1, a_2, a_3, \ldots$ de la série doivent être choisis de la condition de minimisation de la fréquence

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \cdot \frac{\int_0^l EJ\left(\frac{d^2w}{dz^2}\right)^2 dz}{\int_0^l mw^2 dz} = 0. \qquad (19.132)$$

Dérivant cette équation et après avoir divisé le résultat par $\int_0^l mw^2 dz$, nous obtiendrons, compte tenu de (19.130),

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \int_0^l \left[EJ\left(\frac{d^2w}{dz^2}\right)^2 - \omega^2 mw^2 \right] dz = 0. \qquad (19.133)$$

On aura autant d'équations qu'il y a de termes dans la série (19.131). Le système des équations ainsi obtenu sera homogène par rapport aux coefficients $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$.

Annulant le déterminant de ce système, nous obtiendrons l'équation de fréquence. Cette méthode permet de trouver non seulement la fréquence inférieure des oscillations propres, mais aussi les valeurs des fréquences supérieures bien qu'avec une moindre précision.

Procédé de Boubnov-Galerkine. Utilisons cette méthode pour résoudre, par exemple, le problème des oscillations transversales d'une barre de section variable. Ces oscillations sont décrites par l'équation différentielle

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[EJ(z)\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right] - m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \qquad (19.134)$$

La solution de cette équation s'obtient à l'aide de la substitution

$$w = Z(z) \cdot T(t)$$

qui permet d'obtenir l'équation différentielle pour la détermination de la fonction de la flèche $Z(z)$:

$$\frac{d^2}{dz^2}\left[EJ(z)\frac{d^2Z}{dz^2}\right] - m\omega^2 Z = 0. \tag{19.135}$$

Conformément au procédé de Boubnov-Galerkine, la courbe réelle de la flèche, exprimée par la fonction $Z(z)$, est remplacée par une certaine fonction approximative $\psi(z)$ qui satisfait aux conditions limites du problème. La fonction $\psi(z)$ doit être orthogonale par rapport à l'opérateur différentiel initial. Dans ce but, formons l'intégrale

$$\int_0^l \left\{\frac{d^2}{dz^2}\left[EJ(z)\frac{d^2\psi(z)}{dz^2}\right] - m\omega^2\psi(z)\right\}\psi(z)\,dz = 0. \tag{19.136}$$

D'où l'on peut obtenir notamment la formule de Rayleigh

$$\omega^2 = \frac{\int_0^l [EJ(z)\psi''(z)]''\psi(z)dz}{\int_0^l m\psi^2(z)\,dz.}. \tag{19.137}$$

Si l'on met $\psi(z)$ sous la forme d'une série

$$\psi(z) = a_1\psi_1(z) + a_2\psi_2(z) + \ldots \tag{19.138}$$

et que l'on considère chaque terme $\psi_i(z)$ comme un déplacement virtuel, on aura, au lieu de (19.136), une relation traduisant l'égalité à zéro du travail virtuel:

$$\int_0^l \{[EJ(z)\psi''(z)]'' - m\omega^2\psi(z)\}\psi_i(z)\,dz = 0. \tag{19.139}$$

On obtient donc autant d'égalités qu'il y a de termes dans l'expression (19.138) adoptée pour $\psi(z)$.

Chacune des équations (19.139) est homogène et contient les coefficients inconnus $a_1, a_2, a_3, \ldots$ à la première puissance. Annulant le déterminant du système des équations (19.139), nous obtiendrons l'équation de fréquence qui offre la fréquence angulaire des oscillations propres.

Fréquences propres des oscillations des systèmes à un et à deux degrés de liberté

m — masse de la charge; c — rigidité d'un élément élastique; l — longueur de la barre; G — module d'élasticité en cisaillement; EF — rigidité en traction de la section transversale de la barre; GJ_p — rigidité en torsion de la section transversale de la barre; EJ — rigidité en flexion de la section transversale de la barre

Schéma du système oscillatoire	Nombre de degrés de liberté	Fréquence propre f, Hz
c, m	1	$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c}{m}}$
D, n, d, m	1	$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{Gd^4}{8nmD^3}}$ n — nombre de spires du ressort
l, EF, m	1	$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{EF}{ml}}$

Schéma du système oscillatoire	Nombre de degrés de liberté	Fréquence propre f, Hz
	1	$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c_1 c_2}{m(c_1 + c_2)}}$$
	1	$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c_1 + c_2}{m}}$$
	1	$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c(m_1 + m_2)}{m_1 \cdot m_2}}$$
	1	$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{GJ_p}{lJ}}$$ J — moment d'inertie de la masse du disque par rapport à l'axe de la barre

Schéma du système oscillatoire	Nombre de degrés de liberté	Fréquence propre f, Hz
J_1, GJ_p, J_2, l	1	$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{GJ_p(J_1 + J_2)}{lJ_1 \cdot J_2}}$ J_1, J_2 — moments d'inertie des masses des disques
EJ, m, a, b	1	$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3EJ}{ml^3}}$
EJ_1, m, EJ_2, a, b, l	1	$f = \frac{l}{2\pi ab}\sqrt{\frac{3EJ_1J_2}{m(aJ_2 + bJ_1)}}$ pour $J_1 = J_2 = J$ $f = \frac{1}{2\pi ab}\sqrt{\frac{3EJl}{m}}$ pour $J_1 = J_2 = J$ et $a = b = \frac{l}{2}$ $f = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{3EJ}{ml^3}}$
EJ, m, a, b, l	1	$f = \frac{l}{\pi ab}\sqrt{\frac{3EJl}{ma(3a + 4b)}}$ pour $a = b = \frac{l}{2}$ $f = \frac{8}{\pi}\sqrt{\frac{3EJ}{7ml^3}}$

Schéma du système oscillatoire	Nombre de degrés de liberté	Fréquence propre f, Hz
	1	$f = \frac{l}{2\pi ab}\sqrt{\frac{3EJl}{mab}}$ pour $a = b = \frac{l}{2}$ $f = \frac{4}{\pi}\sqrt{\frac{3EJ}{ml^3}}$
		$f = \frac{1}{\pi b}\sqrt{\frac{3EJ}{m(3a+4b)}}$
	1	$f = \frac{1}{2\pi b}\sqrt{\frac{3EJ_1 J_2}{m(aJ_2 + bJ_1)}}$ pour $J_1 = J_2 = J$ $f = \frac{1}{2\pi b}\sqrt{\frac{3EJ}{m(a+b)}}$
	2	$f_{1,2} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{c_2}{m_2} + \frac{c_1+c_2}{m_1}\right) \mp \sqrt{\left(\frac{c_2}{m_2} + \frac{c_1+c_2}{m_1}\right)^2 - 4\frac{c_1c_2}{m_1m_2}}\right]} =$ $= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{c_1+c_2}{m_1} + \frac{c_2}{m_2}\right) \mp \sqrt{\left(\frac{c_1+c_2}{m_1} - \frac{c_2}{m_2}\right)^2 + 4\frac{c_2^2}{m_1m_2}}\right]}$ pour $c_1 = c_2 = c$ et $m_1 = m_2 = m$ $f_{1,2} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3\mp\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{c}{m}}$

Schéma du système oscillatoire	Nombre de degrés de liberté	Fréquence propre f, Hz
c_1 m_1 c_3 m_2 c_2	2	$f_{1,2} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{c_1+c_3}{m_1}+\frac{c_2+c_3}{m_2}\right)\mp\sqrt{\left(\frac{c_1+c_3}{m_1}+\frac{c_2+c_3}{m_2}\right)^2-4\frac{c_1c_2+c_1c_3+c_2c_3}{m_1m_2}}\right]} =$ $= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{c_1+c_3}{m_1}+\frac{c_2+c_3}{m_2}\right)\mp\pm\sqrt{\left(\frac{c_1+c_3}{m_1}-\frac{c_2+c_3}{m_2}\right)^2+4\frac{c_3^2}{m_1m_2}}\right]}$ pour $c_1 = c_2 = c$ et $m_1 = m_2 = m$ $f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c}{m}}$; $f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c+2c_3}{m}}$
m_1 c_1 m_2 c_2 m_3	2	$f_{1,2} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}\left\{\left[\left(\frac{c_1}{m_1}+\frac{c_1}{m_2}\right)+\left(\frac{c_2}{m_2}+\frac{c_2}{m_3}\right)\right]\mp\sqrt{\left[\left(\frac{c_1}{m_1}+\frac{c_1}{m_2}\right)-\left(\frac{c_2}{m_2}+\frac{c_2}{m_3}\right)\right]^2+4\frac{c_1c_2}{m_2^2}}\right\}} =$ $= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{c_1}{m_1}+\frac{c_2}{m_3}+\frac{c_1+c_2}{m_2}\right)\mp\sqrt{\left(\frac{c_1}{m_1}+\frac{c_2}{m_3}+\frac{c_1+c_2}{m_2}\right)^2-4c_1c_2\frac{m_1+m_2+m_3}{m_1\cdot m_2\cdot m_3}}\right]}$ pour $c_1 = c_2 = c$ et $m_1 = m_2 = m_3 = m$ $f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c}{m}}$; $f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3c}{m}}$

Schéma du système oscillatoire	Nombre de degrés de liberté	Fréquence propre f, Hz
	2	$f_{1,2} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{c_2}{J_2} + \frac{c_1+c_2}{J_1}\right) \mp \sqrt{\left(\frac{c_2}{J_2} + \frac{c_1+c_2}{J_1}\right) - 4\frac{c_1c_2}{J_1J_2}}\right]} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{c_1+c_2}{J_1} + \frac{c_2}{J_2}\right) \mp \sqrt{\left(\frac{c_1+c_2}{J_1} - \frac{c_2}{J_2}\right)^2 + 4\frac{c_2^2}{J_1J_2}}\right]}$ J_1, J_2 — moments d'inertie des masses des disques par rapport à l'axe de la tige pour $c_1 = c_2 = c$ et $J_1 = J_2 = J$ $f_{1,2} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3 \mp \sqrt{5}}{2} \cdot \frac{c}{J}}$
	2	$f_{1,2} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{c_1+c_3}{J_1} + \frac{c_2+c_3}{J_2}\right) \mp \sqrt{\left(\frac{c_1+c_3}{J_1} + \frac{c_2+c_3}{J_2}\right)^1 - 4\frac{c_1c_2+c_1c_3+c_2c_3}{J_1J_2}}\Bigg]} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{c_1+c_3}{J_1} + \frac{c_2+c_3}{J_2}\right) \mp \sqrt{\left(\frac{c_1+c_3}{J_1} - \frac{c_2+c_3}{J_2}\right) + 4\frac{c_3^2}{J_1J_2}}\right]}$ J_1, J_2 — moments d'inertie des masses des disques par rapport à l'axe de la tige pour $c_1 = c_2 = c$ et $J_1 = J_2 = J$ $f_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c}{J}}$; $f_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{c + 2c_3}{J}}$

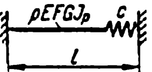
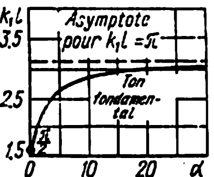
Schéma du système oscillatoire	Nombre de degrés de liberté	Fréquence propre f, Hz
	2	$$f_{1,2}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}\left[\left(\frac{c_1}{J_1}+\frac{c_2}{J_3}+\frac{c_1+c_2}{J_2}\right)\mp\sqrt{\left(\frac{c_1}{J_1}+\frac{c_2}{J_3}+\frac{c_1+c_2}{J_2}\right)^2-4c_1c_2\frac{J_1+J_2+J_3}{J_1J_2J_3}}\right]}=$$ $$=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2}\left\{\left[\left(\frac{c_1}{J_1}+\frac{c_1}{J_2}\right)+\left(\frac{c_2}{J_2}+\frac{c_2}{J_3}\right)\right]\mp\sqrt{\left[\left(\frac{c_1}{J_1}+\frac{c_1}{J_2}\right)-\left(\frac{c_2}{J_2}+\frac{c_2}{J_3}\right)\right]^2+4\frac{c_1c_2}{J_2^2}}\right\}}$$ J_1, J_2, J_3 — moments d'inertie des masses des disques par rapport à l'axe de la tige pour $c_1=c_2=c$ et $J_1=J_2=J_3=J$ $$f_{1,2}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2c\mp c}{J}}$$
	2	$$f_{1,2}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{2(\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}^2)m_2}\left[\delta_{11}+\delta_{22}\frac{m_2}{m_1}\mp\sqrt{\left(\delta_{11}+\delta_{22}\frac{m_2}{m_1}\right)^2-4\left(\delta_{11}\delta_{22}-\delta_{12}^2\right)\frac{m_2}{m_1}}\right]}$$ δ_{ik} — flèche de l'axe de la poutre dans une section i due à l'action d'une force unitaire appliquée dans la section k $$\delta_{ik}=\delta_{ki}$$

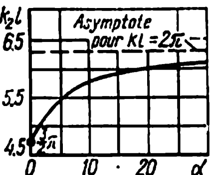
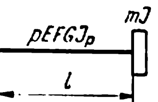
Schéma du système oscillatoire	Nombre de degrés de liberté	Fréquence propre f, Hz
m EJ l	2	$f_{1,2} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{6EJ}{ml^3}\left(1+\frac{l^2}{3i_0^2} \mp \sqrt{1+\frac{l^2}{3i_0^2}+\frac{l^2}{9i_0^4}}\right)}$ i_0 – rayon de giration de la charge par rapport à son centre de gravité; pour $l \gg i_0$ $f_1 \simeq \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3EJ}{ml^3}\left(1-\frac{3i_0^2}{l^2}\right)}$ $f_2 \simeq \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3EJ}{ml^3}\left(3+\frac{4l^2}{3i_0^2}\right)}$

Tableau 43

Equations de fréquence et formes propres des oscillations ongitudinales et de torsion des barres de section constante

Schéma de fixation de la barre	Equation de fréquence	Racines de l'équation de fréquence *	Forme propre des oscillations
ρEG, l	$\sin kl = 0$	$k_i l = i\pi$ $i = 1, 2, 3, \ldots$	$\varphi(z) = C \cos kz$
ρEG, l	$\cos kl = 0$	$k_i l = \frac{\pi}{2}(2i - 1)$ $i = 1, 2, 3, \ldots$	$\varphi(z) = C \sin kz$
ρEG, l	$\sin kl = 0$	$k_i l = i\pi$ $i = 1, 2, 3, \ldots$	$\varphi(z) = C \sin kz$

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>$\operatorname{tg} kl = -\dfrac{kl}{\alpha}$
Pour des oscillations longitudinales $\alpha = \dfrac{cl}{EF}$; pour des oscillations de torsion $\alpha = \dfrac{cl}{GJ_p}$,
où F et J_p — aire et moment d'inertie polaire de la section transversale de la barre; c — rigidité de l'appui par rapport aux déplacements longitudinaux ou rotatoires</td>
<td>


</td>
<td>$\varphi(z) = C \sin kz$</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>$\operatorname{tg} kl = \alpha \cdot kl$
Pour des oscillations longitudinales $\alpha = \dfrac{\rho Fl}{m}$;
pour des oscillations de torsion $\alpha = \dfrac{\rho J_p l}{J}$, où m — masse de la charge, J — moment d'inertie de la masse de la charge par rapport à l'axe de la barre, F — aire de la section, J_p — moment d'inertie polaire de la section de la barre</td>
<td><table>
<tr><td>α</td><td>0</td><td>0,5</td><td>1,0</td><td>10</td><td>∞</td></tr>
<tr><td>k_1l</td><td>π</td><td>4,26</td><td>4,50</td><td>4,69</td><td>$\frac{3}{2}\pi$</td></tr>
</table></td>
<td>$\varphi(z) = C \cos kz$</td>
</tr>
</table>

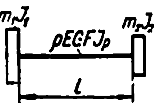
Suite

Schéma de fixation de la barre	Equation de fréquence	Racines de l'équation de fréquence *	Forme propre des oscillations
$\rho EGFJ_p$, mJ, l	$kl \cdot \operatorname{tg} kl = \alpha$ Pour des oscillations longitudinales $\alpha = \frac{\rho Fl}{m}$; pour des oscillations de torsion $\alpha = \frac{\rho J_p l}{J}$, où m — masse de la charge, J — moment d'inertie de la masse de la charge par rapport à l'axe de la barre, F — aire de la section, J_p — moment d'inertie polaire de la section de la barre	see tables below	$\varphi(z) = C \sin kz$

α	0,01	0,05	0,20	0,30	0,50	0,70
$k_1 l$	0,10	0,21	0,42	0,52	0,65	0,75

α	0,90	1,00	1,50	2,00	3,00	4,00
$k_1 l$	0,82	0,86	0,98	1,08	1,20	1,27

α	5,00	10,0	20,0	100,0	∞
$k_1 l$	1,32	1,42	1,52	1,568	/2

	Oscillations longitudinales $\left[m_1 m_2 \left(\frac{k}{\rho F}\right)^2 - 1\right] \operatorname{tg} kl -$ $- (m_1 + m_2) \frac{k}{\rho F} = 0;$ Oscillations de torsion $\left[J_1 J_2 \left(\frac{k}{\rho J_p}\right)^2 - 1\right] \operatorname{tg} kl -$ $- (J_1 + J_2) \frac{k}{\rho J_p} = 0,$ m_1, m_2 — masses des charges; J_1, J_2 — moments d'inertie de la masse des charges par rapport à l'axe de la barre; F — aire de la section; J_p — moment d'inertie polaire d'une section de la barre	—	$\varphi(z) = C\Big(\cos kz -$ $- \frac{m_1}{\rho F} k \sin kz\Big)$ $\varphi(z) = C\Big(\cos kz -$ $- \frac{J_1}{\rho J_p} k \sin kz\Big)$

*) Les fréquences propres se déterminent de la formule $f_i = \frac{k_i}{2\pi} a$, où $a = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$ pour des oscillations longitudinales et $a = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$ pour des oscillations de torsion.

Tableau 44

Equations de fréquence et formes propres des oscillations transversales des barres de section constante

Schéma de fixation de la barre	Equation de fréquence	Racines de l'équation de fréquence *) i	$k_i l$	Forme propre des oscillations
ρFEJ, l	$\cos kl . \text{ch}\, kl = 1$	1 2 3 4 5 $i > 3$	0 4,730 7,853 10,996 14,137 $\frac{\pi}{2}(2i-1)$	$\varphi(z) = (\text{ch}\, kl - \cos kl) \times (\text{sh}\, kz + \sin kz) - (\text{sh}\, kl - \sin kl) \times (\text{ch}\, kz + \cos kz)$
ρFEJ, l	$\sin kl = 0$	1 2 3 4 i	3,142 6,283 9,425 12,566 $i\pi$	$\varphi(z) = \sin kz$
ρFEJ, l	$\cos kl . \text{ch}\, kl = 1$	1 2 3 4 $i > 2$	4,730 7,853 10,996 14,137 $\frac{\pi}{2}(2i+1)$	$\varphi(z) = (\text{sh} kl - \sin kl) \times (\text{ch}\, kz - \cos kz) - (\text{ch}\, kl - \cos kl) \times (\text{sh}\, kz - \sin kz)$
ρFEJ, l	$\cos kl \cdot \text{ch} kl = -1$	1 2 3 4 $i > 3$	1,875 4,694 7,855 10,996 $\frac{\pi}{2}(2i-1)$	$\varphi(z) = (\text{sh} kl + \sin kl) \times (\text{ch}\, kz - \cos kz) - (\text{ch}\, kl + \cos kl) \times (\text{sh}\, kz - \sin kz)$
ρFEJ, l	$\text{tg}\, kl = \text{th}\, kl$	1 2 3 4 i	3,927 7,069 10,210 13,352 $\frac{\pi}{4}(4i+1)$	$\varphi(z) = (\text{sh}\, kl + \sin kl) \cdot (\text{ch}\, kz - \cos kz) - (\text{ch}\, kl + \cos kl) \cdot (\text{sh}\, kz - \sin kz)$

Schéma de fixation de la barre	Equation de fréquence	Racines de l'équation de fréquence*)		Forme propre des oscillations
		i	$k_i l$	
$\rho F E J$, l	$\operatorname{tg} kl = \operatorname{th} kl$	1	0	$\varphi(z) = (\operatorname{ch} kl + \cos kl) \times (\operatorname{sh} kz + \sin kz) - (\operatorname{sh} kl + \sin kl) \times (\operatorname{ch} kz + \cos kz)$
		2	3,927	
		3	7,069	
		4	10,210	
		5	13,352	
		$i > 1$	$\frac{4i-3}{4}\pi$	

*) Les fréquences propres se déterminent de la formule $f_i = \frac{(k_i l)^2}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{EJ}{\rho F}} = \frac{k_i^2}{2\pi}\sqrt{\frac{EJ}{m}}$, où $m = \rho F$.

Racines des équations de fréquence des oscillations transversales des barres de section constante et aux appuis élastiques *

Schéma de fixation de la barre	Courbe pour la détermination des coefficients kl
ρFEJ; c; l	k_1l: 1; 1.875; 3; 5 — Asymptote pour $kl = 3.9265$ — $\frac{cl^3}{FJ}$: 0; 100; 200
	k_2l: 4; 4.634; 6; 8 — Asymptote pour $kl = 7.0685$ — $\frac{cl^3}{EJ}$: 0; 500; 1000
ρFEJ; c; l	k_1l: 0; 2; 4 — Asymptote pour $kl = \pi$ — $\frac{cl^3}{EJ}$: 50; 100
	k_2l: 3; 3.9266; 5; 7 — Asymptote pour $kl = 2\pi$ — $\frac{cl^3}{EJ}$: 0; 250; 500

*) Les fréquences propres se déterminent de la formule $f = \frac{(kl)^2}{2\pi l^2} \cdot \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}} = \frac{k^2}{2\pi} \sqrt{\frac{FJ}{m}}$, où $m = \rho F$

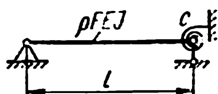
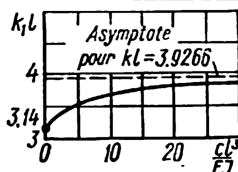
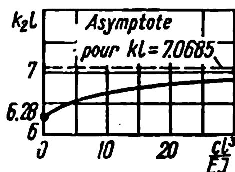
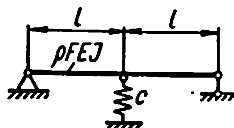
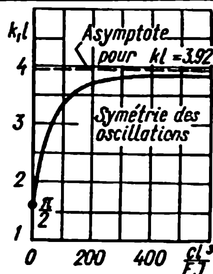
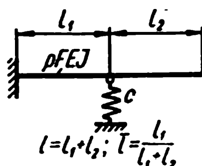
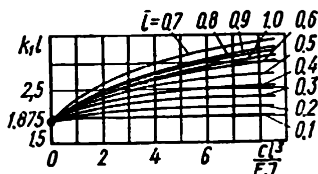
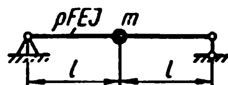
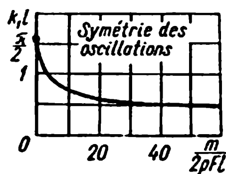
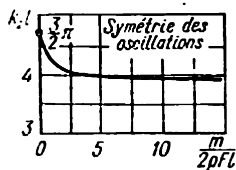
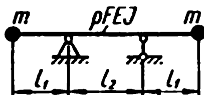
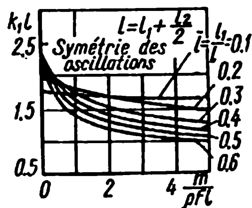
<table>
<tr><th>Schéma de fixation de la barre</th><th>Courbe pour la détermination des coefficients kl</th></tr>
<tr><td></td><td>
</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

Tableau 46

Racines des équations de fréquence des oscillations transversales des barres de section constante et aux masses ponctuelles m *

Schéma de la barre	Courbe pour la détermination des coefficients kl

*) Les fréquences propres se déterminent de la formule $f = \frac{(kl)^2}{2\pi l^2}\sqrt{\frac{EJ}{\rho F}}$.

Schéma de la barre	Courbe pour la détermination des coefficients kl
	
	

Valeurs de certaines intégrales pour les calculs des oscillations transversales des barres (φ_i, i = forme propre des oscillations)

Schéma de fixation de la barre	i	$\frac{1}{l}\int_0^l \varphi_i\,dx$	$\frac{1}{l}\int_0^l \varphi_i^2\,dx$	$l\int_0^l (\varphi_i')^2\,dx$	$l^3\int_0^l (\varphi_i'')^2\,dx$
	1	0,6366	0,5	4,9343	48,705
	2	0	0,5	19,739	779,28
	3	0,2122	0,5	44,413	3945,1
	4	0	0,5	78,955	12468
	5	0,1273	0,5	123,37	30440
	1	0,8445	1,0359	12,775	518,52
	2	0	0,9984	45,977	3797,1
	3	0,3637	1,0000	98,920	14619
	4	0	1,0000	171,58	39940
	5	0,2314	1,0000	264,01	89138
	1	0,6147	0,4996	5,5724	118,80
	2	−0,0586	0,5010	21,451	1250,40
	3	0,2364	0,5000	47,017	5433,0
	4	−0,0310	0,5000	82,462	15892
	5	0,1464	0,5000	127,79	36998
	1	1,0667	1,8556	8,6299	22,933
	2	0,4252	0,9639	20,176	467,97
	3	0,2549	1,0014	77,763	3808,5
	4	0,1819	1,0000	152,83	14619
	5	0,1415	1,0000	205,52	39940

Fréquences propres des oscillations transversales des barres de section constante sollicitées par des forces longitudinales

Schéma de la barre	Fréquence propre des oscillations
ρFEJ, N, l	$$f_1 = \frac{0{,}562}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{\rho F}\left(1 + \frac{5Nl^2}{14EJ}\right)}$$
ρFEJ, q, l	$$f_1 = \frac{0{,}562}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{\rho F}\left(1 + \frac{ql^3}{8EJ}\right)}$$
ρFEJ, N, l	$$f_1 \quad \frac{\pi}{2}\,\frac{i^2}{l^2}\sqrt{\frac{EJ}{\rho F}\left(1 + \frac{Nl^2}{l^2\pi^2EJ}\right)}$$

CHAPITRE 20

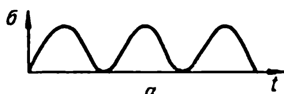
Résistance des matériaux à l'action des contraintes alternantes

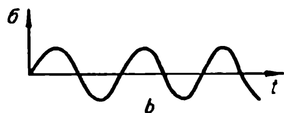
§ 112. Phénomène de la fatigue des matériaux

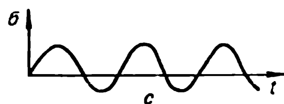
On appelle *fatigue des matériaux* (en particulier des métaux) le phénomène de destruction qui se manifeste sous l'effet d'application multiple de la charge. La capacité du matériau de résister à la destruction sous l'action de contraintes alternées et variables est appelée *endurance*.

La cassure par fatigue apparaît lorsque l'application de la charge se caractérise par une des particularités suivantes:

1) application multiple d'une sollicitation de même signe, par exemple, d'une sollicitation variant périodiquement de zéro à sa valeur maximale (fig. 335, *a*);







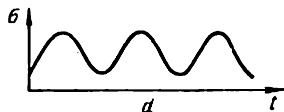


FIG. 335

2) application multiple d'une sollicitation dont la valeur et le signe varient périodiquement (sollicitation alternée), lorsque le caractère de répétition et la variabilité de sollicitation exercent leur influence sur l'endurance du matériau. On distingue dans ce cas une application symétrique (fig. 336, *b*) et une application asymétrique de la charge (fig. 335, *c*, *d*).

Pour que la cassure par fatigue puisse se produire, la variabilité des contraintes à elle seule n'est pas suffisante. Il faut aussi que ces contraintes atteignent une valeur bien déterminée. *La contrainte maximale à laquelle le matériau est capable de résister sans se détruire, quelque soit le nombre de cycles d'application de la charge, est dite limite d'endurance ou limite de fatigue.*

La cassure par fatigue d'un métal a un aspect particulier (fig. 336). D'une façon générale on peut y distinguer deux zones: une, lisse (A) et enrodée, qui se forme lors du développement progressif d'une fissure; l'autre (B), rugueuse et à gros grains, qui se forme lors de la rupture définitive de la pièce déjà affaiblie par la présence d'une crique de fatigue. La zone B a une structure à gros cristaux dans le cas des matières fragiles et un aspect fibreux dans celui des matières ductiles.

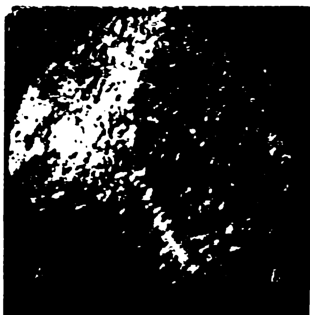


FIG. 336

Le mécanisme de formation des fissures sous l'action d'une charge alternée et variable est très délicat et loin d'être étudié d'une façon définitive. Néanmoins, la théorie de la fatigue s'appuie sur certains faits bien établis dont voici quelques-uns.

1. Les phénomènes qui se déroulent dans le matériau sous l'action d'une application alternée et variable de la charge portent un caractère local bien prononcé.

2. Avant la formation de la première fissure, ce sont les contraintes tangentielles qui, tout en provoquant des glissements plastiques et la destruction par cisaillement, exercent une influence décisive sur le phénomène de fatigue. Le développement des fissures, aussi bien dans les matériaux plastiques que dans les matières fragiles (fonte), se trouve accéléré en présence des contraintes de traction. L'apparition des fissures d'arrachement augmente nettement la sensibilité de ces matériaux aux contraintes de traction.

La limite d'endurance se détermine expérimentalement à l'aide de machines d'essais appropriées; le nombre d'échantillons à soumettre à l'épreuve ne doit pas être inférieur à 6-12 pour un matériau donné. La limite d'endurance dépend de toute une série de facteurs dont notamment: la forme et les dimensions de l'échantillon ou de la pièce, le mode d'usinage, l'état de surface, le type de l'état de contrainte (traction-compression, torsion, flexion), le mode de variation de la charge dans le temps au cours de l'essai, la température, etc.

Dans la plupart des cas les contraintes variables provoquant la cassure par fatigue sont une fonction du temps $\sigma = f(t)$ ayant pour période T. L'ensemble de toutes les valeurs qu'adoptent les contraintes au cours d'une période est appelé *cycle des contraintes* (fig. 337, *a*). Ce sont les contraintes

minimales (p_{min}) et maximales (p_{max}) du cycle qui exercent une influence sur la valeur de la limite d'endurance. La caractéristique principale d'un cycle est son *coefficient d'asymétrie*

$$r = \frac{p_{min}}{p_{max}}. \tag{20.1}$$

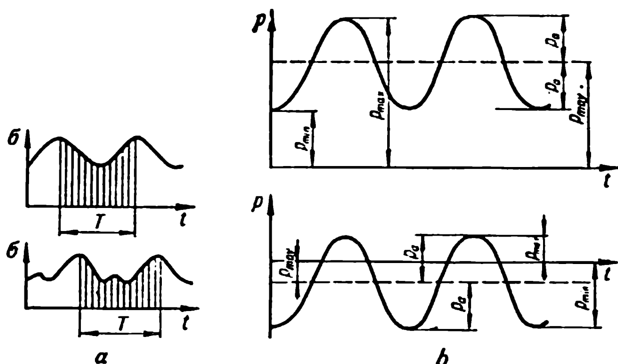


FIG. 337

On distingue aussi la *contrainte moyenne du cycle* (fig. 337, *b*)

$$p_{moy} = \frac{p_{max} + p_{min}}{2} \tag{20.2}$$

et *l'amplitude du cycle*

$$p_a = \frac{p_{max} - p_{min}}{2}. \tag{20.3}$$

La contrainte moyenne du cycle peut être aussi bien positive que négative; l'amplitude du cycle est déterminée par sa valeur absolue (sans tenir compte du signe).

D'après (20.2) et (20.3) il est évident que

$$p_{max} = p_{moy} + p_a; \quad p_{min} = p_{moy} - p_a.$$

C'est le *cycle* dit *symétrique* qui est le plus dangereux ($p_{max} = - p_{min}$ et $p_{moy} = 0$). Il est caractérisé par la relation

$$r = \frac{p_{min}}{p_{max}} = -1.$$

La limite d'endurance pour un cycle symétrique est conventionnellement désignée par p_{-1}.

Pour un *cycle pulsatoire* ($p_{min} = 0$), on a

$$r = \frac{0}{p_{max}} = 0,$$

la limite d'endurance étant désignée par p_0. Pour une charge constante ($p_{max} = p_{min} = p$), on a

$$r = \frac{p}{p} = 1.$$

Dans le cas le plus général caractérisé par un coefficient d'asymétrie r, la limite d'endurance est désignée par p_r. Dans des cas concrets, lorsque, par exemple, $r = -0,5$, on désigne la limite d'endurance par $p_{-0,5}$. Les cycles ayant les caractéristiques r, identiques, sont appelés *analogues*. La caractéristique du cycle ou le coefficient d'asymétrie peut varier de $-\infty$ à $+\infty$ (cf. tabl. 49).

Il faut avoir en vue que dans le cas où il s'agit de la fatigue en traction (compression) ou en flexion, on utilise au lieu de p_a, p_{moy}, p_0, p_{max}, p_{min}, etc., respectivement σ_a, σ_{moy}, σ_0, σ_{max}, σ_{min}, etc. Pour le cas des contraintes tangentielles cycliques (torsion cyclique) on utilisera les désignations τ_a, τ_{moy}, τ_0, τ_{max}, τ_{min}, etc.

§ 113. Méthodes de détermination de la limite d'endurance. Diagrammes de la fatigue

Pour l'essai d'un matériau à la fatigue on utilise le plus souvent des éprouvettes cylindriques lisses de 7 à 10 mm de diamètre.

Les valeurs de la limite d'endurance varient selon le type des contraintes alternées qui agissent sur l'échantillon (traction-compression, flexion alternée, torsion alternée). Par conséquent, si l'on veut déterminer la limite d'endurance d'un matériau, il convient d'indiquer au préalable le type de déformation (flexion, torsion, etc.) ainsi que le mode de variation des contraintes au cours d'un cycle, en d'autres mots, on doit fixer la valeur de r pour laquelle on détermine cette limite.

Suivant le type du problème posé on choisit la machine appropriée pour les essais. Pour les épreuves de fatigue en flexion, on utilise les machines (fig. 338) qui provoquent des contraintes symétriques cycliques par la rotation de l'échantillon sollicité par une charge fixée à son extrémité au moyen d'un roulement à billes. La vitesse de rotation de telles machines est d'habitude de l'ordre de 3000 tr/mn (50 Hz). Les machines modernes

pour essais à la fatigue, en particulier les machines à vibrateur magnétostrictif pour essais à la traction-compression permettent d'obtenir les fréquences de l'ordre de 10000 à 20000 Hz.

Lorsqu'on détermine la limite d'endurance d'un lot d'échantillons, il faut veiller à ce que différents groupes d'échantillons soient soumis à

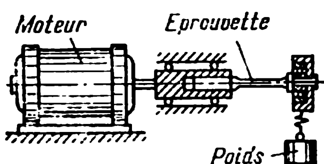


FIG. 338

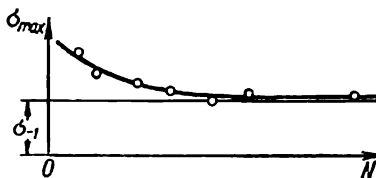


FIG. 339

des contraintes différentes, afin de révéler le caractère de variation du nombre de cycles avant la destruction en fonction des contraintes.

A partir des données expérimentales obtenues on trace les *courbes de fatigue* appelées aussi *courbes de Weller* (fig. 339).

On trace la courbe de fatigue par points en coordonnées: contrainte maximale du cycle $p_{max}(\sigma_{max}$ ou $\tau_{max})$ — nombre de cycles N avant la destruction. A chaque point de cette courbe correspond un échantillon détruit après avoir subi N cycles pour un p_{max} imposé.

Au fur et à mesure que les contraintes diminuent, les échantillons supportent sans détruire un nombre de cycles toujours plus grand, alors que la courbe de fatigue $p_{max} = f(N)$ se rapproche en quelque sorte d'une asymptote parallèle à l'axe des abscisses N. Le nombre de cycles correspondant au point à partir duquel la courbe se confond avec cette asymptote peut être adopté pour *base d'essais* à la fatigue, c'est-à-dire le nombre de cycles au-delà duquel on ne risque pratiquement pas la destruction de l'échantillon avec les contraintes utilisées. Par conséquent, on appelle ***base d'un essai à l'endurance le nombre maximum de cycles d'une charge alternée et variable dont le dépassement, même bien notable, ne risque pas de provoquer, pour la contrainte utilisée, les destructions de fatigue dans l'échantillon considéré.***

Pour les métaux ferreux (acier, fonte, etc.) on adopte, comme base d'essais pratique, 10 millions de cycles. Pour les métaux non-ferreux (cuivre, aluminium, etc.) la base d'essais est de 5 à 10 fois plus importante que celle des métaux ferreux.

Parfois, surtout lorsqu'il s'agit des métaux non-ferreux, la courbe de fatigue en coordonnées N, p se rapproche de l'asymptote d'une façon lente, d'où la nécessité de choisir une base d'essais beaucoup plus importante. Dans ce cas, il est même difficile de parler de la véritable limite d'endurance, dite limite physique, car celle-ci n'existe pratiquement pas. On parle donc d'une limite de fatigue conventionnelle, entendant par là

la contrainte maximale que supporte un échantillon sans se détruire pour un nombre de cycle imposé d'avance qui sert de base d'essais.

Outre les diagrammes primaires de fatigue en coordonnées N, σ_{max} pour la compression-traction et pour la flexion, ou en coordonnées N, τ_{max} pour la torsion, on trace ces diagrammes en coordonnées semi-logarithmiques lg N, σ_{max} (fig. 340) ou bien lg N, τ_{max}. Dans ce cas la limite de fatigue est représentée par l'ordonnée du tronçon horizontal de la courbe de fatigue.

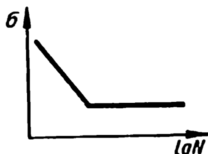


FIG. 340

Comme le montrent de nombreux essais à la fatigue, pour certains matériaux on peut révéler les relations suivantes entre les limites d'endurance en cycle symétrique, obtenues pour les cas de flexion σ^f_{-1}, de torsion τ_{-1} et de compression-traction σ^0_{-1} des éprouvettes. Pour l'acier $\sigma^0_{-1} = 0{,}7\,\sigma^f_{-1}$; pour la fonte $\sigma^0_{-1} = 0{,}65\,\sigma^f_{-1}$, $\tau_{-1} = 0{,}8\sigma^f_{-1}$; pour les aciers et les alliages légers $\tau_{-1} = 0{,}55\sigma^f_{-1}$. On a également remarqué que pour l'acier se vérifient les relations suivantes entre les limites d'endurance ci-dessus et la résistance temporaire à la traction: $\sigma^0_{-1} = 0{,}28\sigma_{end}$; $\sigma^f_{-1} = 0{,}4\sigma_{end}$; $\tau_{-1} = 0{,}22\sigma_{end}$. Pour les métaux non-ferreux $\sigma^f_{-1} = (0{,}24\text{-}0{,}5)\,\sigma_{end}$.

Diagramme des contraintes limites. Pour caractériser la résistibilité d'un matériau à des contraintes alternées et variables pour diverses asymétries du cycle on trace le diagramme dit *diagramme des contraintes limites* (fig. 341) en coordonnées σ_{max}, $\sigma_{min} - \sigma_{moy}$ (dit *diagramme de Smith*).

Les ordonnées de la courbe CAB du diagramme correspondent aux valeurs des limites d'endurance (valeurs maximales des contraintes) pour diverses asymétries du cycle; ces valeurs sont tirées des diagrammes primaires de fatigue.

La tangente de l'angle de pente du rayon tracé à partir de l'origine des coordonnées jusqu'à la courbe limite CAB et formant un angle β avec l'axe des abscisses σ_{moy} sera

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{moy}} = \frac{2\sigma_{max}}{\sigma_{max} + \sigma_{min}} = \frac{2}{1 + r}. \qquad (20.4)$$

Généralement, les courbes des contraintes limites ne dépassent pas la limite de résistance ou la limite d'écoulement du matériau. A titre d'exemple on a reproduit sur la fig. 342 l'allure approximative du diagramme des contraintes limites ne dépassant pas la limite d'écoulement $\tau_{éc}$ pour le cas d'une torsion cyclique.

On peut construire les diagrammes des contraintes limites en coordonnées $\sigma_a - \sigma_{moy}$ *(diagramme de Hey)*. Dans ce cas (fig. 343) la tangente

de l'angle β formé par le rayon tracé de l'origine des coordonnées et la courbe limite s'exprimera par

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sigma_a}{\sigma_{moy}} = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{\sigma_{max} + \sigma_{min}} = \frac{1 - r}{1 + r}. \tag{20.5}$$

Pour apprécier la résistance d'un matériau aux sollicitations alternées et variables en état de contrainte complexe, par exemple, en flexion cyclique

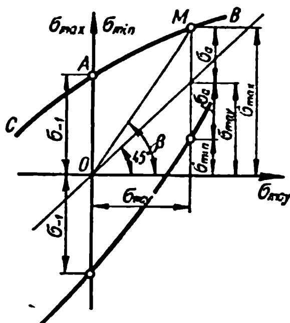


FIG. 341

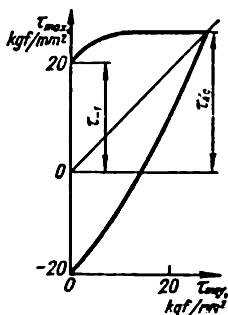


FIG. 342

et torsion, on utilise les machines spéciales pour essais à la fatigue qui permettent d'obtenir l'état de contrainte qui nous intéresse.

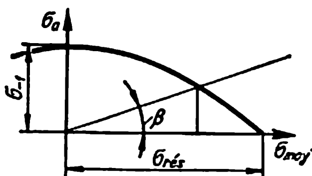


FIG. 343

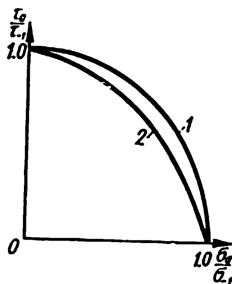


FIG. 344

La fig. 344 reproduit les résultats des essais faits sur des éprouvettes lisses pour diverses combinaisons de contraintes variables normales (σ) et tangentielles (τ) et un cycle symétrique. Par σ_{-1} et τ_{-1} on a désigné les limites d'endurance respectivement en flexion et en torsion pures et

par σ_a et τ_a, les amplitudes limites pour une action conjuguée de la flexion et de la torsion. Les données expérimentales tendent à se concentrer au voisinage de la courbe qui peut être approximée avec un degré de précision suffisant pour le cas des aciers de construction, par un arc de cercle (fig. 344, courbe *1*) décrit par l'équation

$$\left(\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_a}{\tau_{-1}}\right)^2 = 1. \tag{20.6}$$

Pour les aciers très résistants et les fontes les données expérimentales tendent à s'aligner sur des arcs elliptiques (fig. 344, courbe *2*).

Dans le cas d'un cycle symétrique, synchrone et de coïncidence des phases des contraintes, la condition de résistance dans les amplitudes des contraintes principales s'écrira, en vertu de la troisième théorie de la résistance, comme suit:

$$(\sigma_1)_a - (\sigma_3)_a = \sigma_{-1}, \tag{20.7}$$

et d'après la quatrième théorie de la résistance elle aura la forme

$$[(\sigma_1)_a - (\sigma_2)_a]^2 + [(\sigma_2)_a - (\sigma_3)_a]^2 + \\ + [(\sigma_3)_a - (\sigma_1)_a]^2 = 2\sigma_{-1}^2. \tag{20.8}$$

Dans le cas d'un état de contrainte complexe caractérisé par l'action simultanée d'une flexion cyclique et d'une torsion la condition de résistance (20.8) s'écrit compte tenu de la relation $\sigma_{-1} \approx \sqrt{3}\tau_{-1}$

$$\sqrt{\sigma_a^2 + \left(\frac{\sigma_{-1}}{\tau_{-1}}\right)^2 \tau_a^2} = \sigma_{-1}. \tag{20.9}$$

Cette condition coïncide avec l'expression (20.6) établie à partir de données expérimentales.

§ 114. Influence des facteurs technologiques et de construction sur la limite d'endurance des matériaux

Influence de la concentration des contraintes. La concentration des contraintes dont l'intensité est caractérisée par l'indice théorique de concentration α (cf. § 27) exerce la plus grande influence sur la limite d'endurance. Comme en témoignent les résultats des expériences, la limite de fatigue des échantillons à concentrateurs des contraintes p_{-1c} dépasse celle calculée à l'aide de l'indice théorique de concentration α, c'est-à-dire

$$p_{-1c} \geqslant \frac{p_{-1}}{\alpha}.$$

Aussi, outre l'indice théorique de concentration a-t-on introduit la notion d'*indice effectif ou réel de concentration* k. Ces indices se désignent comme suit: pour les contraintes normales

$$k_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1k}},$$

pour les contraintes tangentielles:

$$k_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1k}},$$

où σ_{-1} et τ_{-1} sont les limites d'endurance qui s'obtiennent en soumettant les éprouvettes lisses à l'action des contraintes cycliques normales et tangentielles; σ_{-1k} et τ_{-1k}, limites d'endurance des échantillons avec des concentrateurs de contraintes.

Il s'est avéré en pratique plus commode de déterminer l'indice effectif de concentration en se référant au coefficient dit *facteur de sensibilité* du matériau à une concentration de contraintes

$$q = \frac{k-1}{\alpha - 1}, \qquad (20.10)$$

ce facteur dépend du matériau ainsi que des coefficients q_σ; k_σ; α_σ — pour les contraintes normales ou q_τ; k_τ; α_τ — pour les contraintes tangentielles.

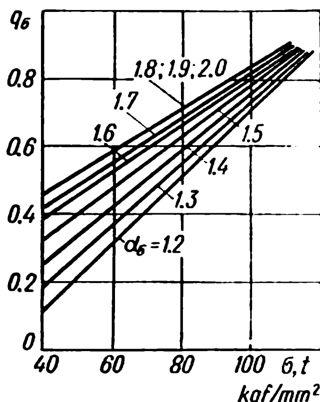


FIG. 345

Pour déterminer le facteur de sensibilité q on se sert des diagrammes qu'on trouve dans différentes publications (fig. 345). Connaissant q ainsi que l'indice théorique de concentration des contraintes α, on peut déterminer d'après la formule (20.10) le coefficient effectif de concentration k à l'aide de la formule

$$k = 1 + q(\alpha - 1). \qquad (20.11)$$

Pour les matériaux sensibles à la concentration des contraintes lorsque $q \to 1$, on a $k \to \alpha$. Pour les matériaux non sensibles à la concentration des contraintes $k \to 1$ lorsque $q \to 0$.

Pour déterminer l'influence qu'exerce la concentration des con-

traintes en état de contrainte complexe on fait appel aux essais sur des échantillons ayant des concentrateurs; au terme de ces essais on établit les diagrammes correspondants (fig. 346) qui, tout comme les diagrammes reproduits plus haut pour les éprouvettes lisses, sont décrits par une courbe elliptique

$$\left(\frac{\sigma_{ak}}{\sigma_{-1k}}\right)^2 + \left(\frac{\tau_{ak}}{\tau_{-1k}}\right)^2 = 1, \tag{20.12}$$

avec σ_{-1k}, τ_{-1k} sont les limites de fatigue en cycle symétrique des échantillons ayant des concentrateurs en flexion et torsion pures respectivement; σ_{ak}, τ_{ak}, valeurs amplitudinales des contraintes lors d'une variation simultanée des phases identique et synchrone des contraintes en état de contrainte complexe et pour diverses combinaisons des contraintes normales et tangentielles variables.

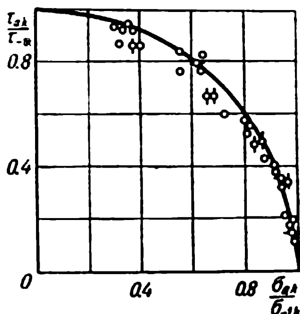


FIG. 346

Influence des dimensions (effet de l'échelle). L'expérience montre qu'avec l'augmentation des dimensions de l'échantillon la limite d'endurance baisse. Cette diminution est généralement prise en considération par l'introduction d'un coefficient qu'on désigne, par exemple, pour les contraintes normales par

$$\varepsilon_\sigma = \frac{(\sigma_{-1})_d}{(\sigma_{-1})_{d_0}}, \tag{12.13}$$

où $(\sigma_{-1})_{d_0}$ est la limite d'endurance d'une éprouvette lisse de laboratoire de diamètre $d_0 = 7$ à 10 mm; $(\sigma_{-1})_d$, limite d'endurance de la pièce considérée ayant pour diamètre $d > d_0$. Puisque $(\sigma_{-1})_d < (\sigma_{-1})_{d_0}$, le *coefficient de l'influence des dimensions absolues* $\varepsilon_\sigma < 1$.

En présence d'un concentrateur, l'effet de l'échelle est pris en considération, tout comme dans le cas des éprouvettes lisses, par l'intermédiaire du coefficient $\varepsilon_{\sigma k}$:

$$\varepsilon_{\sigma k} = \frac{(\sigma_{-1k})_d}{(\sigma_{-1k})_{d_0}}, \tag{20.14}$$

où $(\sigma_{-1k})_d$ et $(\sigma_{-1k})_{d_0}$ sont la limite d'endurance de la pièce et celle de l'éprouvette de laboratoire respectivement. Sur la fig. 347 on montre les courbes représentatives de la fonction $\varepsilon = f(d)$. La courbe *1* correspond à une pièce en acier au carbone sans concentrateur; la courbe *2*, à une pièce en acier allié ($\sigma_{\text{écr}} = 100$ à 120 kgf/mm²) sans concentrateur et

en acier au carbone avec un concentrateur; la courbe *3* est celle d'une pièce en acier allié avec un concentrateur; la courbe *4*, d'une pièce faite en acier quelconque avec une forte concentration des contraintes (par exemple, lorsque le concentrateur épouse la forme d'une entaille profonde).

La diminution de la limite d'endurance avec la croissance des dimensions est très prononcée pour les matériaux hétérogènes. Ainsi, lorsqu'on porte les dimensions d'un échantillon en fonte grise de 5-10 mm à 50 mm la diminution de $\sigma_{\acute{e}cr}$ et σ_{-1} peut atteindre 60 à 70%. Pour l'acier au carbone, l'augmentation du diamètre de l'échantillon de 7 à 150 mm entraîne une diminution de la limite d'endurance de 45%.

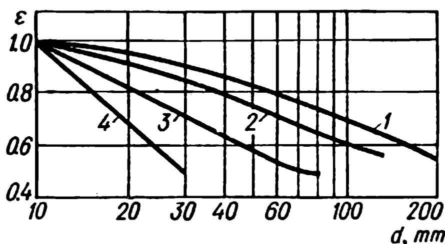


FIG. 347

Outre l'indice effectif de concentration $(k_\sigma)_d$ on a également recours à la notion d'*indice effectif de concentration des contraintes d'une pièce* $(k_\sigma)_P$ qui tient compte à la fois des dimensions et de la concentration

$$(k_\sigma)_P = \frac{(\sigma_{-1})_{d_0}}{(\sigma_{-1k})_d}. \qquad (20.15)$$

Si $(k_\sigma)_d$ est déterminé pour les échantillons ayant un diamètre assez grand (lorsque une augmentation ultérieure du diamètre n'exerce qu'une influence peu marquée sur $(k_\sigma)_d$), on a

$$(k_\sigma)_P = \frac{(\sigma_{-1})_d}{(\varepsilon_\sigma)_d(\sigma_{-1k})_d} = \frac{(k_\sigma)_d}{(\varepsilon_\sigma)_d}. \qquad (20.16)$$

L'influence des concentrateurs des contraintes dépend largement du type de l'état de contrainte. En torsion cyclique, par exemple, le coefficient de concentration s'avère plus bas qu'en flexion pour une même forme du concentrateur; on le remarque notamment sur les fig. 348 et 349 qui donnent les valeurs des indices effectifs de concentration pour des arbres à

gradins et à congé de raccordement respectivement en flexion et en torsion. La relation entre k_τ et k_σ peut être exprimée par la formule

$$k_\tau = 1 + 0{,}6(k_\sigma - 1).$$

Les courbes de la fig. 350 caractérisent les indices effectifs de concentration en traction-compression. Les courbes des fig. 348 et 350 montrent

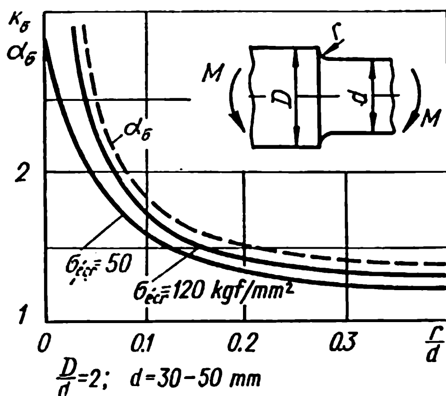


FIG. 348

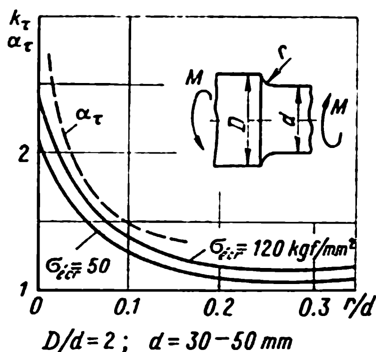


FIG. 349

que les valeurs des coefficients effectifs en traction-compression sont un peu plus élevées que leurs homologues en flexion. Pour plus de détails sur les données concernant les indices de concentration des contraintes voir l'*Appendice 2*.

Influence de l'état de surface. La limite d'endurance est notablement influencée par l'état de surface de la pièce ou de l'échantillon. Cela s'explique par le fait que la surface présente presque toujours des défauts provenant de l'usinage ou dus à la corrosion sous l'influence du milieu ambiant.

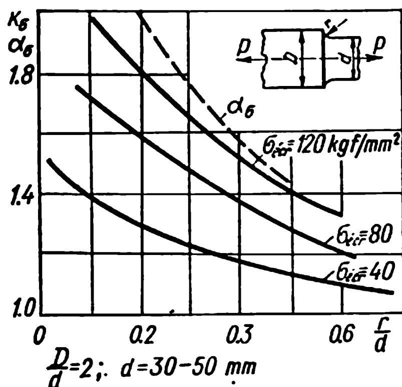


FIG. 350

C'est pour cette raison que les fissures de fatigue apparaissent en règle générale sur la surface d'abord et qu'un mauvais état de cette dernière entraîne une diminution de la limite d'endurance.

L'influence du soin apporté à l'usinage de la surface sur l'endurance peut être rendue par un coefficient $\beta \leqslant 1$ égal au rapport de la limite d'endurance d'un échantillon, ayant un état de surface bien déterminé, à la limite d'endurance d'un autre échantillon avec une surface soigneusement polie. La fig. 351 montre la dépendance du coefficient β de la limite d'endurance pour divers modes d'usinage des échantillons en acier. La courbe *1* correspond aux échantillons polis; la courbe *2*, aux échantillons dégrossis; la courbe *3*, aux échantillons soigneusement usinés au tour; la courbe *4*, aux échantillons à usinage grossier; la courbe *5*, aux échantillons dont la surface présente des traces de calamine. Ce diagramme montre que la limite d'endurance baisse de 40% pour une surface grossièrement usinée et de 70% lorsque la surface présente les traces de calamine.

L'influence de la corrosion au cours des essais à l'endurance en flexion rotatoire est représentée sous forme de graphique de la fig. 352 où la valeur du coefficient

$$\beta_k = \frac{\sigma^k_{-1}}{\sigma_{-1}},$$

exprimant le rapport de la limite d'endurance d'un échantillon attaqué par la corrosion σ^k_{-1} sur la limite d'endurance d'un échantillon poli σ_{-1}

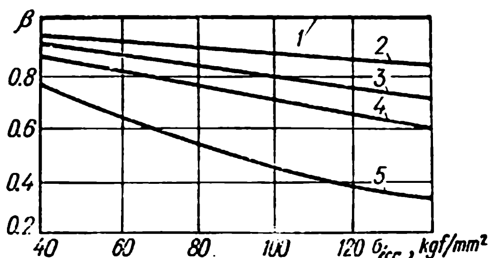


FIG. 351

est portée sur l'axe des ordonnées tandis que la limite d'écrouissage temporaire du matériau des échantillons soumis à l'épreuve, sur l'axe des abscisses. La courbe *1* caractérise l'influence de la corrosion provoquée par l'eau

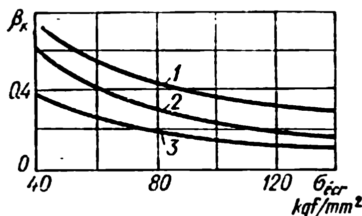


FIG. 352

douce sur une pièce avec des concentrateurs des contraintes; la courbe *2*, par l'eau douce sur une pièce en l'absence de concentrateurs; la courbe *3*, par l'eau de mer sur une pièce sans concentrateurs.

Influence des pauses. Les pauses (interruptions dans l'application des charges) exercent une influence sur la limite d'endurance. Parfois, l'influence de ces interruptions consiste à augmenter le nombre de cycles

provoquant la destruction, de 15 à 20 %. L'augmentation du nombre de cycles est d'autant plus importante que sont plus fréquentes et plus prolongées les pauses (ce dernier aspect exerce une influence plus faible).

Influence des surcharges (charges dépassant la limite d'endurance) sur la limite d'endurance dépend du caractère des surcharges. Lorsque les surcharges sont peu importantes, la résistance à la fatigue augmente jusqu'à ce qu'on ait atteint un certain nombre de cycles; lorsque les surcharges sont grandes, elle commence à baisser, après avoir atteint un certain nombre de cycles.

Influence de l'entraînement. Si l'on soumet un échantillon à des contraintes légèrement inférieures à la limite d'endurance pour les augmenter ensuite d'une façon graduelle on peut améliorer nettement la résistance du matériau à la fatigue. Ce procédé, appelé entraînement du matériau, est largement utilisé dans la pratique. Si les charges sont augmentées d'une façon graduelle, on obtient des résultats particulièrement encourageants. Dans ce cas, on peut obtenir une augmentation notable de la résistance avec un entraînement relativement court (de l'ordre de 50 000 cycles) mais pour des surcharges très importantes.

Influence de la température. Pour ce qui est des matériaux de construction courants la hausse de température entraîne une diminution de la limite d'endurance, alors qu'une baisse de température en provoque l'augmentation, et cela aussi bien pour les éprouvettes lisses que pour les échantillons à concentrateurs.

Au-dessus de 300 °C la limite d'endurance de l'acier tombe, pour tous les 100 °C de montée en température, de 15 à 20 %. Cependant, la montée de température de 20 à 300 °C provoque, pour certaines nuances de l'acier, une certaine amélioration de la limite d'endurance, due probablement à des phénomènes physico-chimiques se déroulant dans le matériau sous un effet simultané de température et de contraintes cycliques. Généralement, l'influence de la concentration des contraintes sur l'endurance s'affaiblit avec la montée de la température.

Lorsque la température baisse de 20 à − 190 °C, la limite d'endurance tout en doublant pour certaines nuances de l'acier, fait que la résilience baisse considérablement.

§ 115. Calcul à la résistance aux charges alternées

Pour les déformations simples, la marge de résistance d'une pièce travaillant en cycle symétrique, par exemple, en cycle compression-traction ou flexion et, de ce fait, éprouvant une contrainte à alternance de signe σ_a, peut s'évaluer de la formule

$$n_\sigma = \frac{(\sigma_{-1k})_d}{\sigma_a},$$

où $(\sigma_{-1k})_d$ est la limite de résistance de la pièce en traction-compression ou en flexion qu'on peut déterminer d'après la limite d'endurance des échantillons de laboratoire polis $(\sigma_{-1})_{d_0}$ compte tenu de l'indice effectif de concentration $(k_\sigma)_d$, du facteur de l'échelle ε_σ, de l'état de surface et du milieu ambiant, caractérisés respectivement par les coefficients β et β_k, de la formule:

$$(\sigma_{-1k})_d = \frac{(\sigma_{-1})_d}{(k_\sigma)_d \varepsilon_\sigma \beta \beta_k}.$$

Dans le cas d'un état de contrainte complexe, en vertu de (20.9),

$$(\sigma_{-1k})_d = \sqrt{\sigma_a^2 + \left[\frac{(\sigma_{-1k})_d}{(\tau_{-1k})_{d_0}}\right]^2 \tau_a^2},$$

ou d'après (20.6)

$$\frac{\sigma_a^2}{(\sigma_{-1k})_d^2} + \frac{\tau_a^2}{(\tau_{-1k})_d^2} = 1. \tag{20.17}$$

Vu que

$$n_\sigma = \frac{(\sigma_{-1k})_d}{\sigma_a}$$

et que

$$n_\tau = \frac{(\tau_{-1k})_d}{\tau_a},$$

on a, en vertu de (20.17),

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_\sigma^2} = \frac{1}{n_\tau^2},$$

d'où la marge de sécurité pour un état de contrainte complexe va se déterminer de la formule:

$$n = \frac{n_\sigma \cdot n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}}. \tag{20.18}$$

S'il s'agit de déterminer la marge de sécurité en cycle asymétrique et pour une charge cyclique quelconque (flexion, traction-compression, torsion) on peut se servir du diagramme schématique des contraintes

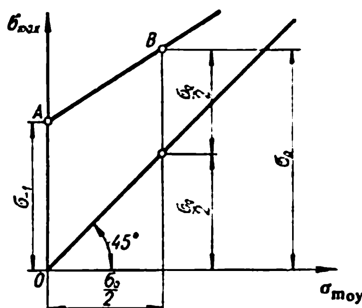


FIG. 353

limites pour les éprouvettes lisses (fig. 353) en le représentant sous forme d'une droite qui passe par les points A et B de coordonnées O, σ_{-1} et $\frac{\sigma_0}{2}$, σ_0 et dont l'équation se présente comme

$$\sigma_{max} = \sigma_{-1} + \frac{\sigma_0 - \sigma_{-1}}{\frac{\sigma_0}{2}} \sigma_{moy} = \sigma_{-1} + \left(1 - \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}\right) \sigma_{moy}$$

ou bien

$$\sigma_{max} = \sigma_{-1} + (1 - \psi_\sigma) \sigma_{moy}, \tag{20.19}$$

où ψ_σ est l'indice de sensibilité du matériau à l'asymétrie du cycle; il est égal à

$$\psi_\sigma = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}. \tag{20.20}$$

Dans le cas des contraintes tangentielles l'équation de la courbe limite des contraintes maximales s'écrira, par analogie avec (20.19),

$$\tau_{max} = \tau_{-1} + (1 - \psi_\tau) \tau_{moy}. \tag{20.21}$$

Nous donnons ci-après les valeurs des indices ψ_σ et ψ_τ pour aciers aux diverses limites d'écrouissage temporaire:

$\sigma_{\acute{e}cr}$, kgf/mm²	ψ_σ	ψ_τ
35-55	0	0
52-75	0,05	0
70-100	0,1	0,05
100-120	0,2	0,10
120-140	0,25	0,15

L'amplitude limite des contraintes pour une éprouvette lisse peut être exprimée, en vertu de (20.19), par la formule

$$\sigma_a = \sigma_{max} - \sigma_{moy} = \sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma_{moy}.$$

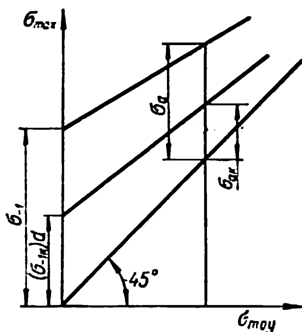


FIG. 354

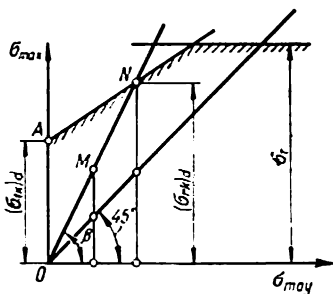


FIG. 355

L'amplitude limite des contraintes pour la pièce $(\sigma_{ak})_d$ sera

$$(\sigma_{ak})_d = \frac{\sigma_a}{(k_\sigma)_P} = \frac{\sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma_{moy}}{(k_\sigma)_P}, \tag{20.22}$$

tandis que l'équation de la courbe des contraintes limites pour la pièce (fig. 354) peut être écrite sous la forme

$$(\sigma_{max})_d = (\sigma_{ak})_d + \sigma_{moy} = \frac{\sigma_{-1}}{(k_\sigma)_P} + \left[1 - \frac{\psi_\sigma}{(k_\sigma)_P}\right] \sigma_{moy}. \tag{20.23}$$

Pour déterminer la marge de sécurité de la pièce dont la contrainte est représentée sur le diagramme des contraintes limites (fig. 355) par un point M de coordonnées σ_a, σ_{moy}, il convient de trouver les coordonnées

du point N situé sur l'intersection du rayon tracé à partir de l'origine des coordonnées avec la courbe des contraintes limites pour la pièce en question. Les coordonnées du point N se déterminent en considérant parallèlement les équations de la ligne (courbe) AN des contraintes limites pour la pièce

$$(\sigma'_{max,k})_d = \frac{\sigma_{-1}}{(k_\sigma)_P} + \left[1 - \frac{\psi_\sigma}{(k_\sigma)_P}\right]\sigma'_{moy} \tag{20.24}$$

et l'équation du rayon

$$\sigma'_{max} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{moy}}\ \sigma'_{moy} = \operatorname{tg}\beta\cdot\sigma'_{moy}, \tag{20.25}$$

où les coordonnées courantes sont marquées par des traits.

L'ordonnée du point N situé sur l'intersection des droites AN et ON est la même, c'est-à-dire

$$(\sigma'_{max,\,k})_d = \sigma'_{max},$$

ou

$$\frac{\sigma_{-1}}{(k_\sigma)_P} + \left[1 - \frac{\psi_\sigma}{(k_\sigma)_P}\right]\sigma'_{moy} = \frac{\sigma_{max}}{\sigma_{moy}}\ \sigma'_{moy},$$

d'où l'on tire l'abscisse du point N:

$$\sigma'_{moy} = \frac{\sigma_{-1}}{(k_\sigma)_P\left[\dfrac{\sigma_{max}}{\sigma_{moy}} - 1 + \dfrac{\psi_\sigma}{(k_\sigma)_P}\right]} =$$

$$= \frac{\sigma_{-1}\sigma_{moy}}{(k_\sigma)_P\sigma_{max} - \sigma_{moy}(k_\sigma)_P + \psi_\sigma\sigma_{moy}}.$$

Compte tenu de ce que $\sigma_a = \sigma_{max} - \sigma_{moy}$, il vient

$$\sigma'_{moy} = \frac{\sigma_{-1}\cdot\sigma_{moy}}{(k_\sigma)_P\sigma_a + \psi_\sigma\sigma_{moy}}. \tag{20.26}$$

Mettant cette valeur de σ'_{moy} dans (20.25) et désignant cette ordonnée (σ'_{max}) par $(\sigma_{rk})_d$, il vient

$$(\sigma_{rk})_d = \frac{\sigma_{-1}\sigma_{max}}{(k_\sigma)_P\sigma_a + \psi_\sigma\sigma_{moy}}.$$

Ainsi, l'expression définitive de la marge de sécurité s'écrit comme suit

$$n_\sigma = \frac{(\sigma_{rk})_d}{\sigma_{max}} = \frac{\sigma_{-1}}{(k_\sigma)_p\sigma_a + \psi_\sigma\sigma_{moy}} \cdot \qquad (20.27)$$

Par analogie on a pour la torsion

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{(k_\tau)_p\tau_a + \psi_\tau\tau_{moy}} \cdot \qquad (20.28)$$

Pour le cas d'une résistance complexe et d'un cycle asymétrique la marge de sécurité se détermine de la formule

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}},$$

où n_σ et n_τ s'obtiennent, respectivement, des formules (20.27) et (20.28).

Le choix de la marge de sécurité pour des calculs aux contraintes alternées et variables dépend de la précision de détermination des efforts et des contraintes, de l'homogénéité du matériau, du soin apporté à l'usinage de la pièce ainsi que d'autres facteurs. Dans le cas où la précision de détermination des contraintes est très élevée, (lorsqu'on se sert d'un extensomètre, par exemple), le matériau est homogène et l'usinage bien soigné, on adopte $n = 1,3$ à $1,4$.

Pour une précision de détermination des efforts ordinaires et l'homogénéité moyenne, on adopte $n = 1,4$ à $1,7$. Pour une faible précision et une homogénéité médiocre, on pose $n = 1,7$ à $3,0$.

Examinons maintenant l'ordre à suivre dans le *calcul de conception* d'une pièce à l'endurance, par exemple, d'une tige faisant partie d'une machine à piston lorsque sont connus: les charges agissant sur la pièce (P_{max} et P_{min}); le matériau, c'est-à-dire $\sigma_{écr}$, $\sigma_{éc}$, σ_{-1}, ψ_σ; la technique d'usinage de la pièce; le type de concentrateur (supposons que le diamètre de l'orifice transversal dans la pièce est δ). On doit déterminer les dimensions de la pièce. Pour résoudre ce problème, on commence par révéler la section dangereuse de la pièce qui est, de toute évidence, celle au niveau du concentrateur. Etant donné que les rapports entre le diamètre de l'orifice du concentrateur et celui de la pièce ne sont pas connus, il faut fixer l'indice théorique de concentration des contraintes α_σ et, pour le matériau choisi, en partant du $\sigma_{écr}$ connu, déterminer du graphique (fig. 345), pour α_σ adopté, l'indice de sensibilité du matériau à la concentration des contraintes q_σ pour déterminer ensuite d'après la formule

$$(k_\sigma)_d = 1 + q_\sigma(\alpha_\sigma - 1)$$

la valeur de l'indice effectif de concentration. Sur le diagramme (fig. 351) on trouve la valeur du coefficient β caractérisant la qualité de l'usinage.

Ayant fixé le coefficient ε qui tient compte des dimensions, on détermine l'indice effectif de concentration pour la pièce

$$(k_\sigma)_P = \frac{(k_\sigma)_d}{\varepsilon\beta} .$$

Ensuite, après avoir choisi la marge de sécurité n_σ, on détermine à l'aide de la formule

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{(k_\sigma)_P\sigma_a + \psi_\sigma\sigma_{moy}} = \frac{\sigma_{-1}F}{(k_\sigma)_P \frac{P_{max} - P_{min}}{2} + \psi_\sigma \frac{P_{max} + P_{min}}{2}}$$

l'aire de la section transversale de la pièce

$$F = \frac{n_\sigma}{\sigma_{-1}}\left[(k_\sigma)_P \frac{P_{max} - P_{min}}{2} + \psi_\sigma \frac{P_{max} + P_{min}}{2}\right]$$

et son diamètre

$$d = \sqrt{\frac{4F}{\pi}} .$$

Les calculs faits, il faut, en se servant du graphique (fig. 347), vérifier la justesse du choix du coefficient ε d'après le diamètre d, désormais connu, de la pièce. Si la valeur obtenue de ε diffère sensiblement de celle qui avait été adoptée, il faut préciser le calcul.

Dans le cas d'un *calcul de contrôle* sont données la forme et les dimensions de la pièce (supposons qu'il s'agit d'une barre ronde à gradins soumise à l'action d'une sollicitation alternée et variable avec une asymétrie du cycle assignée); sont imposés le diamètre maximal d et le rayon de congé r en l'endroit de jonction de deux diamètres différents de l'arbre; sont connus également le matériau de la pièce ($\sigma_{écr}, \sigma_{éc}, \sigma_{-1}$) ainsi que la qualité de son usinage. On demande de déterminer l'effort admissible que peut supporter la pièce. Le problème posé doit être résolu dans l'ordre suivant:

1. Etablir l'indice théorique de concentration α_σ en se servant, par exemple, du graphique représenté sur la fig. 350.

2. A l'aide du graphique (fig. 345), trouver l'indice de sensibilité aux concentrations des contraintes q_σ.

3. Déterminer l'indice effectif de concentration

$$(k_\sigma)_d = 1 + q_\sigma(\alpha_\sigma - 1).$$

4. En se servant du graphique (fig. 347), trouver le facteur d'influence des dimensions absolues ε.

5. En partant du graphique (fig. 351), déterminer le coefficient β qui rend compte de la qualité de l'usinage de la surface.

6. Trouver l'indice effectif de concentration des contraintes pour la pièce

$$(k_\sigma)_P = \frac{(k_\sigma)_d}{\varepsilon\beta} .$$

7. Fixer la marge de sécurité n_σ.

8. Déterminer l'amplitude des contraintes à partir de la formule

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{(k_\sigma)_P\sigma_a + \psi_\sigma\sigma_{moy}} ;$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{-1}}{n_\sigma} \cdot \frac{1}{(k_\sigma)_P + \psi_\sigma \cdot \frac{\sigma_{moy}}{\sigma_a}} .$$

D'habitude, pour les aciers ordinaires, $\psi_\sigma = 0$, alors

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{-1}}{n_\sigma(k_\sigma)_P} .$$

9. Déterminer l'effort amplitudinal admissible

$$P_a = F_{min}\sigma_a = \frac{\pi d^2}{4} \frac{\sigma_{-1}}{n_\sigma(k_\sigma)_P} .$$

10. Trouver l'effort moyen

$$P_{moy} = P_a \frac{1 + r}{1 - r} .$$

11. Déterminer les efforts maximal et minimal du cycle

$$P_{max} = P_a + P_{moy};$$

$$P_{min} = P_{max} \cdot r.$$

Examinons, enfin, *l'ordre de détermination de la marge de sécurité* pour un arbre tubulaire rond animé d'un mouvement rotatif et doté d'un orifice transversal δ servant au graissage. Cet arbre est soumis simultanément à une flexion variable pour un cycle symétrique avec $M_{max} = M_a$ donné et à une torsion variable avec un $M_{t\,max}$ donné pour un cycle asymétrique connu r. Les diamètres extérieur D et intérieur d de l'arbre, son

matériau ($\sigma_{écr}, \sigma_{éc}, \sigma_{-1}, \tau_{-1}$) sont connus de même que la qualité de l'usinage de la surface de l'arbre.

Le problème se résout dans l'ordre suivant:

1. Déterminer les contraintes nominales provoquées dans l'arbre par la flexion et la torsion (§ 46, 50):

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W};$$

$$\sigma_a = \sigma_{max}, \quad \sigma_{moy} = 0;$$

$$\tau_{max} = \frac{M_{t\,max}}{W_p};$$

$$\tau_{min} = r\tau_{max};$$

$$\tau_a = \frac{\tau_{max} - \tau_{min}}{2};$$

$$\tau_{moy} = \frac{\tau_{max} + \tau_{min}}{2}.$$

2. Pour $\frac{\delta}{D}$ connu (fig. 173), déterminer l'indice de concentration en flexion.

3. Déterminer d'après le graphique (fig. 345), pour α_σ trouvé et $\sigma_{écr}$ connu, l'indice de sensibilité aux concentrations des contraintes q_σ et trouver l'indice effectif de concentration en flexion

$$k_\sigma = 1 + q_\sigma(\alpha_\sigma - 1).$$

4. Après avoir choisi ε sur le graphique (fig. 347) et β sur la fig. 351, déterminer l'indice effectif de concentration pour la pièce

$$(k_\sigma)_p = \frac{k_\sigma}{\varepsilon\beta}.$$

5. Déterminer la marge de sécurité en flexion d'après la formule

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{(k_\sigma)_p\sigma_a + \psi_\sigma\sigma_{moy}} = \frac{\sigma - 1}{(k_\sigma)_p\sigma_a}$$

(car, pour le cas étudié $\sigma_{moy} = 0$).

6. Etablir l'indice de concentration en torsion α_τ, puis, en postan $q_\tau \approx q_\sigma$, déterminer l'indice effectif de concentration en torsion

$$k_\tau = 1 + q_\tau(\alpha_\tau - 1).$$

Adoptant les mêmes valeurs de ε et β que pour le cas de la flexion, trouver pour la pièce l'indice effectif de concentration en torsion

$$(k_\tau)_\text{P} = \frac{k_\tau}{\varepsilon\beta} \cdot$$

7. Déterminer la marge de sécurité en torsion

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{(k_\tau)_\text{P}\tau_\text{a} + \psi_\tau\tau_\text{moy}} \cdot$$

8. Calculer le facteur de sécurité général

$$n = \frac{n_\sigma n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} \cdot$$

Dans l'*Appendice 1* sont réunies les données relatives à la limite d'endurance pour les principaux matériaux utilisés dans la construction.

Caractéristiques des cycles du chargement alterné et variable

Cycle	p_{max}; p_{min}	$p_{moy} = \frac{p_{max}+p_{min}}{2}$ $p_a = \frac{p_{max}-p_{min}}{2}$	$r = \frac{p_{min}}{p_{max}}$
Constant, positif	$p_{max} = p_{min} > 0$	$p_{moy} = p_{max} = p_{min} > 0$; $p_a = 0$	$r = +1$
Asymétrique, positif	$p_{max} > 0$ $p_{min} > 0$	$p_{moy} > 0$; $p_a \neq 0$	$0 < r < +1$
Pulsatoire, positif	$p_{max} > 0$ $p_{min} = 0$	$p_{moy} = \frac{1}{2} p_{max}$ $p_a = \frac{1}{2} p_{max}$	$r = 0$
Asymétrique	$p_{max} > 0$ $p_{min} < 0$	$p_{moy} > 0$ $p_a \neq 0$	$-1 < r < 0$

Cycle	p_{max}; p_{min}	$p_{moy} = \frac{p_{max} + p_{min}}{2}$ $p_a = \frac{p_{max} - p_{min}}{2}$	$r = \frac{p_{min}}{p_{max}}$
Symétrique	$p_{max} =$ $= - p_{min}$ $p_{min} < 0$	$p_{moy} = 0$; $p_a = p_{max}$	$r = -1$
Asymétrique	$p_{max} > 0$, $p_{min} < 0$ $p_{max} <$ $< p_{min}$	$p_{moy} < 0$; $p_a \neq 0$	$-\infty < r <$ < -1
Pulsatoire, négatif	$p_{max} = 0$ $p_{min} < 0$	$p_{moy} = \frac{1}{2} p_{min}$ $p_a = \frac{1}{2} p_{min}$	$r = -\infty$
Asymétrique négatif	$p_{max} < 0$ $p_{min} < 0$	$p_{moy} < 0$, $p_a \neq 0$	$+1 < r <$ $< +\infty$
Constant, négatif	$p_{max} =$ $= p_{min} < 0$	$p_{max} = p_{min} =$ $= p_{moy} < 0$; $p_a = 0$	$r = +1$

Calcul de la charge de choc

§ 116. Calcul au choc pour le cas d'une charge axiale

L'effet du choc sur les déformations ou les contraintes s'évalue à l'aide du *coefficient de dynamicité*

$$k_d = \frac{\delta_d}{\delta_{st}}, \qquad (21.1)$$

où δ_{st} est la déformation d'un élément élastique (fig. 356, *a*) pour un charge statique Q (lorsque la charge augmente de zéro à sa valeur finale); δ_d, déformation (fig. 356, *b*) due à la charge agissant sous forme de choc (par exemple, lorsqu'une charge Q tombe en chute libre de la hauteur H).

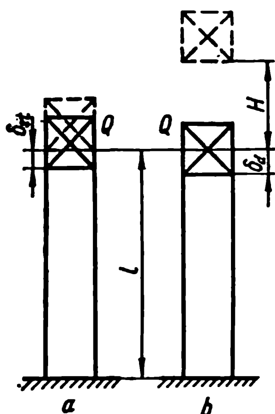


FIG. 356

La déformation dynamique peut être exprimée par une formule de la statique

$$\delta_d = k_d \delta_{st} .$$

Par analogie, établissons le rapport entre les contraintes dynamique et statique

$$\sigma_d = k_d \sigma_{st} = k_d \frac{Q}{F} . \qquad (21.2)$$

Pour recourir à la formule (21.2) il faut savoir le coefficient de dynamicité k_d.

Pour déterminer le coefficient de dynamicité on part de l'hypothèse selon laquelle le *rapport entre les efforts et les déformations reste le même tant pour*

une charge statique P_{st} *que pour une charge dynamique* P_d, c'est-à-dire

$$\delta_{st} = \frac{P_{st}}{c};$$

$$\delta_d = \frac{P_d}{c},$$

où $c = \frac{EF}{l}$ est la rigidité de la barre.

L'établissement des formules servant à évaluer le coefficient de dynamicité se base sur la loi de la conservation de l'énergie. La variation de l'énergie potentielle de position T d'une charge en chute libre tombant d'une hauteur H et ayant parcouru une distance égale à $H + \delta_d$ est

$$T = Q(H + \delta_d). \tag{21.3}$$

L'énergie potentielle de déformation accumulée par une barre lor du choc peut être exprimée par la formule

$$U_d = \frac{1}{2} P_d \delta_d = \frac{c\delta_d^2}{2}. \tag{21.4}$$

En vertu de la loi de la conservation de l'énergie on peut écrire

$$T = U_d$$

ou bien

$$\frac{c\delta_d^2}{2} = Q(H + \delta_d). \tag{21.5}$$

Vu que $\delta_{st} = \frac{Q}{c}$ nous pouvons mettre l'équation (21.5) sous la forme

$$\delta_d^2 - 2\delta_{st} \cdot \delta_d - 2\delta_{st} \cdot H = 0.$$

D'où l'on détermine la déformation dynamique inconnue

$$\delta_d = \delta_{st} \pm \sqrt{\delta_{st}^2 + 2\delta_{st} H}.$$

Conservant en accord avec le sens physique du problème le signe «plus» on peut mettre la dernière formule sous la forme

$$\delta_d = \delta_{st} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{st}}}\right). \tag{21.6}$$

Ainsi, d'après (21.2) on trouve l'expression pour le coefficient de dynamicité

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{st}}}. \qquad (21.7)$$

Si l'on considère que $H = \frac{v^2}{2g}$ (v est la vitesse de la charge en chute libre au début du choc), on obtient

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\delta_{st}}}. \qquad (21.8)$$

Etant donné que $\frac{2H}{\delta_{st}} = \frac{T_0}{U_{st}}$, où $T_0 = QH = \frac{Qv^2}{2g}$ est l'énergie cinétique de la charge en chute libre au moment du choc; $U_{st} = \frac{1}{2} Q\delta_{st}$, énergie potentielle de déformation qu'une barre accumule lorsque la charge Q agit statiquement, on peut représenter le coefficient de dynamicité par la formule

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{T_0}{U_{st}}}. \qquad (21.9)$$

Pour $H = 0$, $k_d = 2$. Etant donné qu'en général $H \gg \delta_{st}$, on peut dans le second membre de l'expression pour k_d négliger 1. Il vient alors

$$k_d \simeq 1 + \sqrt{\frac{2H}{\delta_{st}}} = 1 + \sqrt{\frac{v^2}{\delta_{st}}} = 1 + \sqrt{\frac{T_0}{U_{st}}}. \qquad (21.10)$$

La contrainte dynamique lors du choc, en vertu de (21.2),

$$\sigma_d = k_d\sigma_{st} = \sigma_{st}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{st}}}\right) \approx \frac{Q}{F} + \sqrt{\frac{2QHE}{lF}}. \qquad (21.11)$$

La charge dynamique au moment du choc

$$P_d = \sigma_d F = k_d\sigma_{st}F = Q\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{st}}}\right). \qquad (21.12)$$

Un examen de la formule (21.11) permet de constater que *lorsque les contraintes sont uniformément réparties sur la longueur de la barre,*

c'est-à-dire lorsque la barre a une section constante, la valeur des contraintes dynamiques dépend non seulement de l'aire F de la section transversale de la barre, comme c'est le cas pour une sollicitation statique agissant dans les systèmes isostatiques, *mais aussi de la longueur l et du module d'élasticité du matériau E.* Avec cela, *plus le volume du matériau de la barre élastique subissant le choc est important, plus faibles sont les contraintes dynamiques qui y apparaissent.*

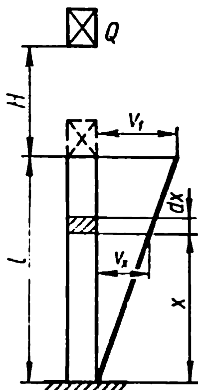


FIG. 357

D'autre part, on peut réduire les contraintes de choc dans une barre à rainure si l'on diminue le volume de l'élément élastique en réduisant l'aire de la partie épaisse de la barre, ce qui revient à augmenter la déformabilité de cette dernière. On peut le faire également en choisissant un matériau dont le module d'élasticité est plus faible; en égalant les aires de la section transversale sur la longueur de la barre; en augmentant la longueur de la barre, ou, enfin, en mettant en jeu les ressorts d'amortissement.

La masse d'une barre soumise au choc peut être évaluée en supposant qu'après la compression et la diminution de la vitesse de la charge de v à v_1 (au cours de la première phase), cette dernière vitesse étant celle du mouvement de la section supérieure de la barre au début de la seconde phase du choc, la vitesse des sections situées plus bas diminue selon une loi linéaire pour tomber à zéro dans la section inférieure (fig. 357); autrement dit, la vitesse dans une section quelconque se trouvant à une distance x du bout inférieur de la barre est

$$v(x) = v_1 \frac{x}{l} .$$

L'énergie cinétique d'un élément de la barre de longueur dx dans la section considérée est

$$dT_c = \frac{\gamma F\,dx}{2g} \left(v_1 \frac{x}{l}\right)^2 ,$$

et l'énergie cinétique totale de la barre soumise au choc peut être exprimée par la formule

$$T_c = \frac{\gamma F}{2g} \cdot \frac{v_1^2}{l^2} \int_0^l x^2 dx = \frac{\gamma F l}{3} \frac{v_1^2}{2g} ,$$

ou bien

$$T_c = \frac{Q_c}{3} \cdot \frac{v_1^2}{2g},$$

où $Q_c = \gamma Fl$ est le poids propre de la barre soumise au choc.

Exprimons la perte d'énergie due à la compression du matériau en l'endroit de la collision de la charge et de la barre au cours de la première phase du choc (lorsque la vitesse passe de $v = \sqrt{2gH}$ à v_1) par la formule

$$\Delta T = \frac{Qv^2}{2g} - \left(\frac{Qv_1^2}{2g} + \frac{Q_c v_1^2}{3 \cdot 2g}\right) = \frac{Q}{2g}\left[v^2 - v_1^2\left(1 + \frac{Q_c}{3Q}\right)\right]. \quad (21.13)$$

Cette même perte d'énergie peut être exprimée ainsi

$$\Delta T = \frac{Q}{2g}(v - v_1)^2 + \frac{1}{3}\frac{Q_c}{2g}(0 - v_1)^2 =$$

$$= \frac{Q}{2g}\left[v^2 - 2vv_1 + v_1^2\left(1 + \frac{Q_c}{3Q}\right)\right]. \quad (21.14)$$

Egalant les seconds membres des formules (21.13) et (21.14) et résolvant l'équation ainsi obtenue par rapport à v_1, on trouve

$$v_1 = \frac{v}{1 + \frac{1}{3}\frac{Q_c}{Q}}. \quad (21.15)$$

Ainsi, l'énergie cinétique qui se transforme lors du choc en énergie de déformation de la barre est

$$T = \frac{Qv_1^2}{2g} + \frac{1}{3} \cdot \frac{Q_c v_1^2}{2g} = \frac{Qv^2}{2g\left(1 + \frac{1}{3}\frac{Q_c}{Q}\right)}. \quad (21.16)$$

Substituant dans (21.9) T à T_0, exprimons le coefficient de dynamicité par la formule

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{T}{U_{st}}},$$

ou bien

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{Qv^2}{2g\left(1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{Q_c}{Q}\right)U_{st}}}. \tag{21.17}$$

Tenant compte de ce que $\frac{v^2}{2g} = H$; $HQ = T_0$ et désignant $\frac{Q_c}{Q} = \beta$ mettons la formule (21.17) sous la forme

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{T_0}{U_{st}\left(1 + \frac{1}{3}\beta\right)}}. \tag{21.18}$$

La contrainte de choc maximale est donnée par la formule

$$\sigma_d = k_d\sigma_{st} = \sigma_{st}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{T_0}{U_{st}\left(1 + \frac{1}{3}\cdot\beta\right)}}\right),$$

ou bien

$$\sigma_d = \sigma_{st}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{2EFH}{Ql\left(1 + \frac{1}{3}\,\frac{Fl\gamma}{Q}\right)}}\right].$$

Les valeurs du coefficient rendant compte de la masse d'un élément soumis au choc sont données, pour certains cas particuliers, dans le tableau 50.

§ 117. Contraintes dues au choc de rotation

Dans le cas d'un choc de rotation, réalisé d'après le schéma de la fig. 358, par exemple, les contraintes dynamiques maximales agissant dans l'arbre τ_d s'évaluent à l'aide de la formule

$$\tau_{d_{max}} = k_d\, \tau_{st_{max}}, \tag{21.19}$$

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{st}}}\,; \tag{21.20}$$

$$\delta_{st} = \varphi R = \frac{M_t l}{GJ_p} R = \frac{QR^2 l}{GJ_p}\,;$$

$$\tau_{st_{max}} = \frac{M_t}{W_p} = \frac{QR}{W_p}\,.$$

Ici H est la hauteur de la chute libre de la charge; Q, poids de la charge en chute libre; R, rayon du vilebrequin; l, longueur de l'axe; J_p, W_p, moment polaire d'inertie et moment résistant polaire d'une section de l'arbre.

Les contraintes dynamiques engendrées dans l'arbre par suite d'un freinage sec du volant animé d'un mouvement rotatoire très rapide (fig. 359) et ayant emmagasiné de l'énergie cinétique T_0, peuvent également être déterminées à partir de la loi de la conservation de l'énergie

$$T_0 = U_d, \tag{21.21}$$

où U_d est l'énergie potentielle de déformation de l'arbre lors du choc de rotation.

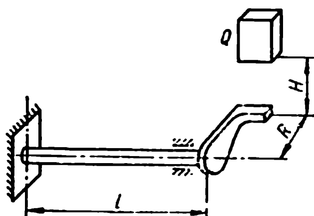


FIG. 358

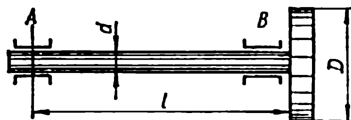


FIG. 359

Tenant compte de ce que

$$U_d = \frac{1}{2} M_{t.d}\varphi_d = \frac{M_{t.d}^2 l}{2GJ_p}, \tag{21.22}$$

et considérant que

$$\tau_{d_{max}} = \frac{M_{t.d}}{W_p}$$

ou

$$M_{t.d} = \tau_{d_{max}} \cdot W_p = \frac{\pi d^3}{16}\, \tau_{d_{max}},$$

on peut écrire

$$U_d = \frac{\tau^2_{d_{max}} \pi^2 d^6 l}{16^2 GJ_p \cdot 2} = \frac{\tau^2_{d_{max}} lF}{4G}\,. \qquad (21.23)$$

Mettant (21.23) dans (21.21) et résolvant l'équation ainsi obtenue par rapport à la contrainte dynamique maximale recherchée, il vient

$$\tau_{d_{max}} = 2\sqrt{\frac{T_0 G}{lF}}, \qquad (21.24)$$

où l'énergie cinétique d'un volant de poids Q tournant à une vitesse angulaire ω s'obtient de la formule

$$T_0 = \frac{J}{2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = \frac{J}{2}\,\omega^2; \qquad J = \frac{QD^2}{8g}$$

(D, diamètre du volant).

§ 118. Calcul au choc en flexion

Les contraintes maximales dynamiques dues à un choc accompagné de flexion peuvent se déterminer de la formule

$$\sigma_{d_{max}} = k_d \sigma_{st_{max}},$$

où

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{f_{st}}}$$

(f_{st} est la flexion statique en l'endroit de la collision dépendant du mode d'application de la charge ainsi que des conditions d'appui).

Dans le cas d'un choc se produisant au milieu d'une poutre dont la section a une rigidité en flexion EJ (fig. 360), on a

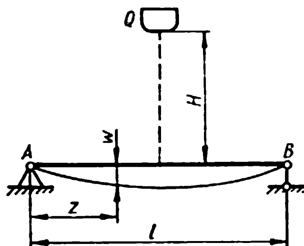


FIG. 360

$$f_{st} = \frac{Ql^3}{48EJ}, \quad \sigma_{st_{max}} = \frac{M}{W} = \frac{Ql}{4W},$$

les contraintes dynamiques maximales sont dans ce cas

$$\sigma_{d_{max}} = k_d \sigma_{st_{max}} = \frac{Ql}{4W}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{96HEJ}{Ql^3}}\right].$$

Introduisant la notation $QH = T_0$, on aura

$$\sigma_{d_{max}} = \frac{Ql}{4W}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{96T_0EJ}{Q^2l^3}}\right]. \qquad (21.25)$$

La condition de résistance dans ce cas s'écrit

$$\sigma_{d_{max}} = \frac{Q}{4W}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{96T_0EJ}{Q^2l^3}}\right) \leqslant [\sigma_d], \qquad (21.26)$$

où

$$[\sigma_d] = \frac{\sigma_{éc}}{n_d}$$

(n_d est la marge de résistance dans le cas où la charge dynamique est prise en considération, $\sigma_{éc}$, limite d'écoulement du matériau de la poutre).

Pour tenir compte de la masse d'une poutre soumise au choc on peut utiliser le même procédé qu'on a exposé plus haut pour un choc axial. Supposons qu'à la fin de la première phase du choc la vitesse de la poutre là où elle entre en contact avec la charge est v_1. L'énergie cinétique de la charge est évidemment égale à $\frac{Qv_1^2}{2g}$. Supposons aussi que lors du choc et pour une charge appliquée statiquement (dans le cas examiné au milieu de la travée) l'axe incurvé de la poutre peut être décrit par une même équation

$$w = \frac{f}{l^3}(3l^2z - 4z^3),$$

où $f = \frac{Ql^3}{48EJ}$ est la flèche de la poutre.

Désignant la valeur de la flèche maximale au milieu de la poutre par w_{max}, la valeur de la flèche dans une section située à une distance z du bout gauche de la poutre peut s'évaluer de la formule

$$w = \frac{w_{max}}{l^3}(3l^2z - 4z^3).$$

tandis que la vitesse de mouvement de cette section, de l'expression

$$v = \frac{dw}{dt} = \frac{dw_{max}}{dt} \cdot \frac{1}{l^3} (3l^2z - 4z^3).$$

L'énergie cinétique d'un élément quelconque de la poutre dz, distant de z du bout gauche de la poutre, est

$$dT_p = \frac{v^2 \gamma F\, dz}{2g} = \frac{\gamma F}{2g} \left[\frac{dw_{max}}{dt} \cdot \frac{1}{l^3} (3l^2z - 4z^3)\right]^2 dz,$$

et l'énergie cinétique totale de la poutre entière est donnée par

$$T_p = 2 \int_0^{l/2} \frac{\gamma F}{2g} \left(\frac{dw_{max}}{dt}\right)^2 \frac{1}{l^6} (3l^2z - 4z^3)^2\, dz =$$

$$= \frac{17}{35} \cdot \frac{\gamma Fl}{2g} \left(\frac{dw_{max}}{dt}\right)^2 .$$

Vu qu'à la fin de la première phase du choc la vitesse au milieu de la poutre est égale à v_1, c'est-à-dire

$$\frac{dw_{max}}{dt} = v_1,$$

l'énergie cinétique de la poutre au début de la seconde phase du choc sera

$$T_p = \frac{17}{35} \cdot \frac{\gamma Fl}{2g} v_1^2. \tag{21.27}$$

Exprimant la perte d'énergie due à la compression en l'endroit de la collision au cours de la première phase par

$$\Delta T = \frac{Qv^2}{2g} - \left(\frac{Qv_1^2}{2g} + \frac{17}{35} \cdot \frac{\gamma Fl}{2g} v_1^2\right) =$$

$$= \frac{Q}{2g} \left[v^2 - v_1^2 \left(1 + \frac{17}{35} \cdot \frac{\gamma Fl}{Q}\right)\right], \tag{21.28}$$

ou bien

$$\Delta T = \frac{Q}{2g}(v - v_1)^2 + \frac{17}{35} \cdot \frac{\gamma F l}{2g}(0 - v_1)^2 =$$

$$= \frac{Q}{2g}\left[v - 2vv_1 + v_1^2\left(1 + \frac{17}{35} \cdot \frac{\gamma F l}{Q}\right)\right], \qquad (21.29)$$

égalant ensuite les seconds membres des équations (21.28) et (21.29) et résolvant l'équation obtenue par rapport à v_1 on obtient

$$v_1 = \frac{v}{1 + \frac{17}{35} \cdot \frac{\gamma F l}{Q}}. \qquad (21.30)$$

L'énergie cinétique du système (poutre-charge) qui doit se transformer en énergie de déformation de la poutre au moment de la collision, est déterminée par la formule

$$T = \frac{Qv_1^2}{2g} + \frac{17}{35} \cdot \frac{\gamma F l}{2g} v_1^2 = \frac{Qv^2}{2g} \cdot \frac{1}{1 + \frac{17}{35} \cdot \frac{\gamma F l}{Q}}. \qquad (21.31)$$

Introduisant la notation

$$T_0 = QH = \frac{Qv^2}{2g},$$

on peut présenter la formule (21.31) sous la forme

$$T = \frac{T_0}{1 + \frac{17}{35} \cdot \frac{\gamma F l}{Q}}. \qquad (21.32)$$

La contrainte dynamique maximale, d'après la formule (21.25), se détermine après la substitution de T à T_0 par

$$\sigma_{d_{max}} = \frac{Ql}{4W}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{96TEJ}{Q^2 l^3}}\right),$$

ou, si l'on tient compte de (21.32),

$$\sigma_{d_{max}} = k_d \sigma_{st_{max}} = \frac{Ql}{4W}\left[1 + \sqrt{1 + \frac{96 T_0 EJ}{Q^2 l^3 \left(1 + \frac{17}{35}\cdot\frac{\gamma F l}{Q}\right)}}\right], \quad (21.33)$$

où

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{96 T_0 EJ}{Q^2 l^3 \left(1 + \frac{17}{35}\cdot\frac{\gamma F l}{Q}\right)}}. \quad (21.34)$$

Valeurs du coefficient α tenant compte de la masse de l'élément soumis au choc dans la formule du coefficient de dynamicité

$$k_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_{st}(1 + \alpha \cdot \beta)}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{g\delta_{st}(1 + \alpha \cdot \beta)}}$$

H — hauteur de la chute libre du corps; v — vitesse du corps en chute libre au début de la collision; δ_{st} — déformation de l'élément élastique qui subit le choc dans le cas où la charge est appliquée statiquement et égale au poids de l'élément en chute libre; $\beta = \frac{Q_{él}}{Q}$, où $Q_{él}$ — poids de l'élément tombant, Q — poids de l'élément en chute, g — accélération de la force de pesanteur

Schéma de l'élément élastique et mode d'application de la charge	α
	1/3
	$\frac{F_1}{F_1 + F_2 + \sqrt{F_1 F_2}}$

Schéma de l'élément élastique et mode d'application de la charge	α
2a, 2F, F, 3a, Q, H	$\frac{67}{336}$
ηl, Q, H, l	$\frac{2 + 4\eta - \eta^2 - 6\eta^3 + 3\eta^4}{105\eta^2 (1 - \eta)^2}$
Q, H, l, ηl	$\frac{8 + \eta^3 (140 + 231\eta + 99\eta^2)}{420 (1 + \eta)^3 \eta^2}$
ηl, Q, H, l	$\frac{105 - 105\eta + 35\eta^2 - 2\eta^3}{140\eta^2}$
ηl, Q, H, l	$\frac{24 - 24\eta - 4\eta^2 + 8\eta^3 - \eta^4}{35\eta^3 (5\eta - 4 - \eta^2)^2}$

Schéma de l'élément élastique et mode d'application de la charge	α
	$\dfrac{3+\eta-\eta^2}{140\,\eta^2(1-\eta)^2}$
	$\dfrac{1}{15}$
	$\dfrac{11}{15}$

CHAPITRE 22

Contraintes de contact

§ 119. Notions générales et formules pour la détermination des contraintes et des déformations de contact

Les contraintes et les déformations engendrées lors d'une pression mutuelle de deux corps en contact sont dites *de contact*. Sans pouvoir se déformer librement en l'endroit de contact le matériau se trouve dans un état de contrainte volumique (fig. 361). Les contraintes de contact portent un caractère purement local et diminuent sensiblement dès qu'on s'éloigne de l'endroit de contact. Elles acquièrent une importance toute particulière lors des calculs à la résistance des pièces telles que roulements à billes ou à rouleaux, engrenages, roues du matériel roulant des chemins de fer, rails, etc.

H. Hertz fut le premier à résoudre en 1881-1882 les principaux problèmes relatifs aux contraintes et aux déformations de contact à l'aide des méthodes de la théorie de l'élasticité.

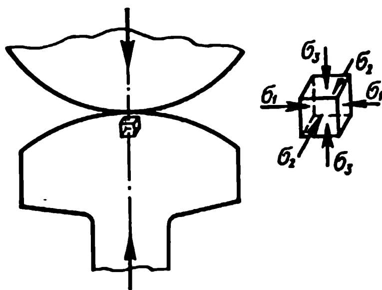


FIG. 361

Nous donnons ci-bas quelques formules permettant de déterminer les contraintes de contact, établies en partant des hypothèses suivantes:

1) les contraintes dans la zone de contact ne dépassent pas la limite d'élasticité;

2) les aires de contact sont insignifiantes par rapport aux surfaces des corps en contact;

3) les forces de compression réparties sur la surface de contact sont normales à cette dernière.

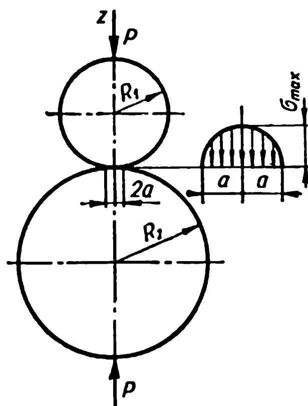


FIG. 362

Compression des billes. Le rayon de l'aire circulaire a (fig. 362) qui se forme en l'endroit du contact sous l'effet de la compression mutuelle (par une force P) de deux corps sphériques de rayons R_1 et R_2 et dont les modules d'élasticité sont respectivement E_1 et E_2 s'obtient de la formule

$$a = 0{,}88 \sqrt[3]{P \frac{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}}. \qquad (22.1)$$

Les contraintes normales (de compression) sur l'aire de contact sont réparties selon une hémisphère. La contrainte maximale, coïncidant avec le centre de l'aire de contact, peut être déterminée par la formule

$$\sigma_3 = -|\sigma_{max}| = -1{,}5\frac{P}{\pi a^2} = -0{,}388\sqrt[3]{4P\frac{E_1^2 E_2^2}{(E_1+E_2)^2}\frac{(R_1+R_2)^2}{R_1^2 R_2^2}}. \qquad (22.2)$$

Les deux autres contraintes principales au centre de l'aire de contact sont

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -0{,}8\,|\sigma_{max}|.$$

Grâce à l'état de contrainte volumique du matériau au centre de l'aire, où toutes les trois contraintes de compression sont pratiquement identiques, le matériau y peut supporter, sans apparition de déformations résiduelles, de pressions fort importantes atteignant, par exemple, selon la quatrième théorie de résistance, $\sigma_{max} = 5\sigma_{éc}$. Ainsi, pour l'acier dont $\sigma_{pr} = 10\,000$ kgf/cm², σ_{max} atteint 50 000 kgf/cm².

Le point le plus dangereux dans la zone de contact se trouve sur l'axe z, à une profondeur approximativement égale à la mi-longueur

du rayon de l'aire de contact. Les contraintes principales en ce point sont

$$\sigma_1 = \sigma_2 = -0{,}18\sigma_{max}; \quad \sigma_3 = -0{,}8\sigma_{max}, \qquad (22.3)$$

où σ_{max} s'obtient à partir de (22.2).

Contrainte maximale au point le plus dangereux

$$\tau_{max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = 0{,}31\sigma_{max}. \qquad (22.4)$$

Les contraintes maximales qui apparaissent dans l'aire de contact sous pression de la bille sur une surface concave de rayon R_2 (fig. 363) s'obtiennent à l'aide de la formule (22.2), en affectant R_2 d'un signe inverse

$$\sigma_{max} = 0{,}388 \sqrt[3]{4P \frac{E_1^2 E_2^2}{(E_1+E_2)^2} \cdot \frac{(R_2-R_1)^2}{R_1^2 R_2^2}}. \qquad (22.5)$$

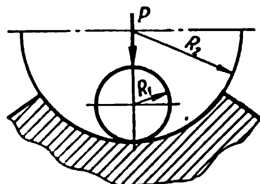


FIG. 363

Lorsqu'un corps sphérique de rayon $R_1 = R$ se trouve en contact avec une surface plane (fig. 364) les contraintes se déterminent à l'aide de la formule (22.5), en y posant $R_2 = \infty$:

$$\sigma_{max} = 0{,}388 \sqrt[3]{4P \frac{E_1^2 E_2^2}{(E_1 + E_2)^2} \cdot \frac{1}{R^2}}. \qquad (22.6)$$

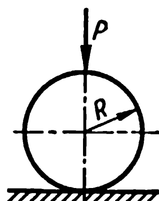


FIG. 364

Compression des cylindres. Lorsque deux cylindres sont comprimés par une force uniformément répartie q de façon que le contact se réalise d'après les génératrices parallèles (fig. 365), la largeur de l'aire de contact rectangulaire s'obtient de la formule

$$b = 2{,}15 \sqrt{q \frac{\frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}}. \qquad (22.7)$$

La contrainte maximale agissant dans les points appartenant à l'axe de l'aire de contact se détermine à l'aide de la formule

$$\sigma_{max} = 1{,}27 \frac{q}{b} = 0{,}418 \sqrt{2q \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \cdot \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}}. \qquad (22.8)$$

Le point le plus dangereux dans la zone de contact se trouve sur l'axe z à une profondeur égale à $0{,}4b$. Les contraintes principales en ce point sont:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1 &= -\,0{,}180\sigma_{max};\\ \sigma_2 &= -\,0{,}288\sigma_{max};\\ \sigma_3 &= -\,0{,}780\sigma_{max}. \end{aligned}\right\} \qquad (22.9)$$

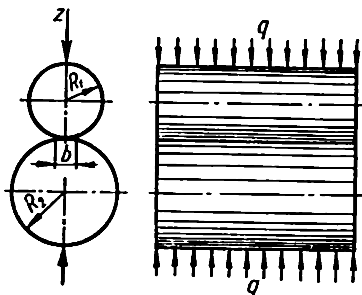


FIG. 365

La contrainte tangentielle maximale au point le plus dangereux est

$$\tau_{max} = 0{,}3\sigma_{max}. \qquad (22.10)$$

Remplaçant dans la formule (22.8) le signe de R_2 par son contraire, nous obtiendrons la contrainte pour le cas de la pression d'un cylindre sur une surface cylindrique concave

$$\sigma_{max} = 0{,}418\sqrt{2q\,\frac{E_1E_2}{E_1+E_2}\,\frac{R_2-R_1}{R_1\cdot R_2.}}\,. \qquad (22.11)$$

Lorsqu'un cylindre de rayons $R_1 = R$ et une surface plane sont en contact, on trouve, en posant dans (22.8) $R_2 = \infty$,

$$\sigma_{max} = 0{,}418\sqrt{\frac{2q}{R}\cdot\frac{E_1E_2}{E_1+E_2}}\,. \qquad (22.12)$$

Bien que les formules ci-dessus soient établies pour un coefficient de Poisson $\mu = 0{,}3$, on peut les utiliser dans les calculs pratiques pour d'autres valeurs de μ.

Dans le cas général de contact de deux corps faits en un même matériau qui sont sollicités par une force P agissant dans la direction de l'axe z (fig. 366) et qui se touchent suivant le plan AB lorsque les rayons de courbure sont ρ_1 et ρ_1' pour le premier corps et ρ_2 et ρ_2' pour le second (on suppose que $\rho_1 < \rho_1'$, $\rho_2 < \rho_2'$), les demi-axes de la surface de contact elliptique ainsi formée sont donnés par les formules

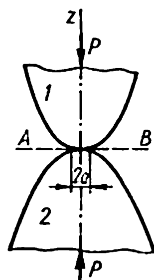


FIG. 366

$$a = \alpha \sqrt[3]{\frac{3P(1-\mu^2)}{E\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_1'}+\frac{1}{\rho_2}+\frac{1}{\rho_2'}\right)}}; \quad (22.13)$$

$$b = \beta \sqrt[3]{\frac{3P(1-\mu^2)}{E\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_1'}+\frac{1}{\rho_2}+\frac{1}{\rho_2'}\right)}}, \quad (22.14)$$

où μ est le coefficient de Poisson.

Nous donnons ci-bas certaines valeurs des coefficients α et β en fonction d'un angle auxiliaire ψ calculé à l'aide de la formule

$$\cos\psi = \frac{\pm\sqrt{\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_1'}\right)^2+\left(\frac{1}{\rho_2}-\frac{1}{\rho_2'}\right)^2+2\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_1'}\right)\left(\frac{1}{\rho_2}-\frac{1}{\rho_2'}\right)\cos 2\varphi}}{\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_1'}+\frac{1}{\rho_2}+\frac{1}{\rho_2'}} \quad (22.15)$$

où φ est l'angle entre les surfaces de courbure principales des corps qui renferment les rayons ρ_1 et ρ_2. Les signes dans la formule (22.15) sont choisis de façon à ce que la valeur de $\cos\psi$ soit positive.

$\psi°$	α	β	$\psi°$	α	β
20	3,778	0,408	60	1,486	0,717
30	2,731	0,493	65	1,378	0,759
35	2,397	0,530	70	1,284	0,802
40	2,136	0,567	75	1,202	0,846
45	1,926	0,604	80	1,128	0,893
50	1,754	0,641	85	1,061	0,944
55	1,611	0,678	90	1,000	1,000

La contrainte maximale au centre de l'aire de contact est

$$\sigma_{max} = 1,5 \frac{P}{\pi ab} \cdot \tag{22.16}$$

Le point le plus dangereux se trouve sur l'axe z à une profondeur qui dépend du rapport $\frac{b}{a} \cdot$

La contrainte tangentielle maximale ne dépend pas de ce rapport et est égale à

$$\tau_{max} \cong 0,32\sigma_{max}. \tag{22.17}$$

Comme il résulte des formules examinées plus haut, les contraintes de contact dépendent des propriétés élastiques du matériau et ne sont pas une fonction linéaire de la charge, de sorte que leur augmentation soit plus lente que celle de la charge comprimante. Ceci s'explique par le fait que lorsque la charge augmente, les dimensions de l'aire de contact. le font aussi. Dans le tableau 51 on donne les formules pour la détermination des paramètres du contact de deux corps (coefficients A et B de l'équation de l'ellipse de contact, dimensions de l'aire de contact, contrainte de contact maximale σ_{max} et rapprochement mutuel Δ). Pour faciliter les calculs à l'aide des formules du tableau 51, on trouvera dans le tableau 52 les valeurs des coefficients qui rentrent dans ces formules, notamment n_a, n_b, n_p, n_Δ en fonction du rapport de A et B.

§ 120. Contrôle de la résistance aux contraintes de contact

Pour contrôler la résistance aux contraintes de contact on fait appel à la troisième ou quatrième théorie de la résistance:

$$\sigma_{éq\,III} = \sigma_1 - \sigma_3 \leqslant [\sigma];$$

$$\sigma_{éq\,IV} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leqslant [\sigma].$$

Mettant dans ces formules $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ exprimés par σ_{max} au centre de l'aire de contact, écrivons la condition de la résistance sous la forme

$$\sigma_{éq} = m\sigma_{max} \leqslant [\sigma], \tag{22.18}$$

d'où l'on tire

$$\sigma_{max} \leqslant \frac{1}{m} [\sigma] = [\sigma]_{cont},$$

où $[\sigma]_{cont} = \frac{[\sigma]}{m}$ est la valeur admissible de la contrainte maximale à l'endroit du contact. Les valeurs du coefficient m en fonction du rapport des demi-axes de la surface elliptique $\frac{b}{a}$ sont données ci-après:

$\frac{b}{a}$	$m = \frac{\sigma_{éq\ III}}{\sigma_{max}}$	$m = \frac{\sigma_{éq\ IV}}{\sigma_{max}}$
1 (cercle)	0,620	0,620
0,75	0,625	0,617
0,50	0,649	0,611
0,25	0,646	0,587
0 (bande)	0,600	0,557

Pour calculer la résistance des éléments de structure à l'endroit du contact il est à recommander de procéder comme suit:

1. Déterminer les rayons de courbure principaux des corps en contact $\rho_1, \rho_1', \rho_2, \rho_2'$, ainsi que l'angle ψ entre les surfaces de courbure principales.

2. En recourant aux formules (22.13) et (22.14) et en tenant compte de (22.15), calculer les dimensions des demi-axes de la surface de contact elliptique.

3. A l'aide de la formule (22.16) calculer σ_{max}; dans le cas d'une surface circulaire ou rectangulaire on le fait respectivement à l'aide de (22.2) ou (22.8) sans calculer l'aire de contact.

4. Les calculs de résistance se font également à l'aide de la formule (22.18) tout en déterminant la valeur de m à l'aide du tableau ci-dessus. Dans le cas présent il est à faire appel à la quatrième théorie de la résistance.

5. Pour les roulements à billes ou à rouleaux $[\sigma]_{cont} = 35\,000$ à 50 000 kgf/cm^2, pour l'acier à rail, 8000 à 10 000 kgf/cm^2.

Dans le tableau 53 sont données les pressions maximales admissibles pour les aires de contact dans le cas où le contact initial se fait suivant une ligne ($m = 0{,}557$) et le chargement porte un caractère statique. Si le contact initial n'a lieu qu'en un point, la valeur de $[\sigma]_{cont}$ doit être augmentée de 1,3 à 1,4 fois.

Formules de calcul pour la détermination des paramètres de contact de deux corps

Schéma du contact	Coefficients de l'équation de l'ellipse de contact		Dimensions de l'aire de contact
	A	B	
Deux corps sphériques	$\frac{R_1+R_2}{2R_1R_2}$	$\frac{R_1+R_2}{2R_1R_2}$	$a=b=0{,}9086\times$ $\times\sqrt[3]{P\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1}+\frac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)}$ si $E_1=E_2=E$ $a=b=1{,}109\sqrt[3]{\frac{P}{E}\cdot\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}}$
Bille et surface sphérique concave $R_2>R_1$	$\frac{R_2-R_1}{2R_1R_2}$	$\frac{R_2-R_1}{2R_1R_2}$	$a=b=0{,}9086\times$ $\times\sqrt[3]{P\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}\left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1}+\frac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)}$ si $E_1=E_2=E$ $a=b=1{,}109\sqrt[3]{\frac{P}{E}\cdot\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}}$

Tableau 51

Contrainte maximale, σ_{max}	Rapprochement mutuel des corps en contact, Δ
$0{,}5784\sqrt[3]{P\dfrac{\left(\dfrac{R_1+R_2}{R_1R_2}\right)^2}{\left(\dfrac{1-\mu_1^2}{E_1}+\dfrac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)^2}}$ et $\mu_1=\mu_2=0{,}3$, alors $0{,}388\sqrt[3]{PE^2\left(\dfrac{R_1+R_2}{R_1R_2}\right)^2}$; $\max\tau=\dfrac{1}{3}\sigma_{max}$, $\max\sigma_1=0{,}133\ \sigma_{max}$	$0{,}8255\times$ $\times\sqrt[3]{P^2\dfrac{R_1+R_2}{R_1R_2}\left(\dfrac{1-\mu_1^2}{E_1}+\dfrac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)^2}$ $1{,}231\sqrt[3]{\left(\dfrac{P}{E}\right)^2\dfrac{R_1+R_2}{R_1R_2}}$
$0{,}5784\times$ $\times\sqrt[3]{P\dfrac{\left(\dfrac{R_2-R_1}{R_1R_2}\right)^2}{\left(\dfrac{1-\mu_1^2}{E_1}+\dfrac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)^2}}$ et $\mu_1=\mu_2=0{,}3$, alors $0{,}388\sqrt[3]{PE^2\left(\dfrac{R_2-R_1}{R_1R_2}\right)^2}$ $\max\tau=\dfrac{1}{3}\sigma_{max}$; $\max\sigma_1=0{,}133\ \sigma_{max}$	$0{,}8255\times$ $\times\sqrt[3]{P^2\dfrac{R_2-R_1}{R_1R_2}\left(\dfrac{1-\mu_1^2}{E_1}+\dfrac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)^2}$ $1{,}231\sqrt[3]{\left(\dfrac{P}{E}\right)^2\dfrac{R_2-R_1}{R_1R_2}}$

Schéma du contact	Coefficients de l'équation de l'ellipse de contact		Dimensions de l'aire de contact
	A	B	
Corps sphérique et surface plane	$\frac{1}{2R}$	$\frac{1}{2R}$	$a = b = 0{,}9086 \times$ $\times \sqrt[3]{PR\left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)}$ si $E_1 = E_2 = E$ $a = b = 1{,}109 \sqrt[3]{\frac{P}{E}R}$
Corps sphérique et cylindre $R_2 > R_1$	$\frac{1}{2R_1}$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$	$a = 1{,}145\, n_a \times$ $\times \sqrt[3]{P\frac{R_1R_2}{2R_2+R_1}\left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)}$ $b = 1{,}145 n_b \times$ $\times \sqrt[3]{P\frac{R_1R_2}{2R_2+R_1}\left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)}$ si $E_1 = E_2 = E$ et $a = 1{,}397\, n_a \sqrt[3]{\frac{P}{E}\frac{R_1R_2}{2R_2+R_1}}$ $b = 1{,}397\, n_b \sqrt[3]{\frac{P}{E}\frac{R_1R_2}{2R_2+R_1}}$

Contrainte maximale, σ_{max}	Rapprochement mutuel des corps en contact, Δ
$0{,}5784 \sqrt[3]{\dfrac{P}{R^2\left(\dfrac{1-\mu_1^2}{E_1}+\dfrac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)^2}}$ et $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}3$, alors $0{,}388 \sqrt[3]{PE^2\dfrac{1}{R^2}}$ $\max \tau = \dfrac{1}{3}\sigma_{max}$; $\max \sigma_1 = 0{,}133\ \sigma_{max}$	$0{,}8255 \times$ $\times \sqrt[3]{\dfrac{P^2}{R}\left(\dfrac{1-\mu_1^2}{E_1}+\dfrac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)^2}$ $1{,}231 \sqrt[3]{\left(\dfrac{P}{E}\right)^2\dfrac{1}{R}}$
$0{,}365 n_p \times$ $\times \sqrt[3]{P\dfrac{\left(\dfrac{2R_2+R_1}{R_1R_2}\right)^2}{\left(\dfrac{1-\mu_1^2}{E_1}+\dfrac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)^2}}$ $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}3$, alors $0{,}245\ n_p \times$ $\times \sqrt[3]{PE^2\left(\dfrac{2R_2+R_1}{R_1R_2}\right)^2}$	$0{,}655\ n_\Delta \times$ $\times \sqrt[3]{P^2\dfrac{2R_2+R_1}{R_1R_2}\left(\dfrac{1-\mu_1^2}{E_1}+\dfrac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)^2}$ $0{,}977\ n_\Delta \sqrt[3]{\left(\dfrac{P}{E}\right)^2\dfrac{2R_2+R_1}{R_1R_2}}$

Schéma du contact	Coefficients de l'équation de l'ellipse de contact		Dimensions de l'aire de contact
	A	B	
Corps sphérique et surface cylindrique concave $R_2 > R_1$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$	$\frac{1}{2R_1}$	$a = 1{,}145\, n_a \times \sqrt[3]{P \frac{R_1 R_2}{2R_2 - R_1}\left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)}$ $b = 1{,}145\, n_b \times \sqrt[3]{P \frac{R_1 R_2}{2R_2 - R_1}\left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)}$ si $E_1 = E_2 = E$ et $a = 1{,}397 n_a \sqrt[3]{\frac{P}{E} \frac{R_1 R_2}{2R_2 - R_1}}$ $b = 1{,}397\, n_b \sqrt[3]{\frac{P}{E} \frac{R_1 R_2}{2R_2 - R_1}}$
Corps sphérique et couloir circulaire (palier à billes) $R_2 > R_1$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right)$	$a = 1{,}145\, n_a \times \sqrt[3]{\frac{P\left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)}{\frac{2}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}}$ $b = 1{,}145\, n_b \times \sqrt[3]{P \frac{\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}}{\frac{2}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}}$

Contrainte maximale, σ_{max}	Rapprochement mutuel des corps en contact, Δ
$0{,}365\, n_P \times$ $\times \sqrt[3]{P \dfrac{\left(\dfrac{2R_2 - R_1}{R_1R_2}\right)^2}{\left(\dfrac{1-\mu_1^2}{E_1} + \dfrac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)^2}}$ $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}3$, alors $0{,}245\, n_P \sqrt[3]{PE^2\left(\dfrac{2R_2 - R_1}{R_1R_2}\right)^2}$	$0{,}655\, n_\Delta \times$ $\times \sqrt[3]{P^2 \dfrac{2R_2 - R_1}{R_1R_2}\left(\dfrac{1-\mu_1^2}{E_1} + \dfrac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)^2}$ $0{,}977\, n_\Delta \sqrt[3]{\left(\dfrac{P}{E}\right)^2 \dfrac{2R_2 - R_1}{R_1R_2}}$
$0{,}365\, n_P \times$ $\times \sqrt[3]{P \dfrac{\left(\dfrac{2}{R_1} - \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}\right)^2}{\left(\dfrac{1-\mu_1^2}{E_1} + \dfrac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)^2}}$	$0{,}655\, n_\Delta \times$ $\times \sqrt[3]{P^2\left(\dfrac{2}{R_1} - \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}\right) \times \left(\dfrac{1-\mu_1^2}{E_1} + \dfrac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)^2}$

Schéma du contact	Coefficients de l'équation de l'ellipse de contact		Dimensions de l'aire de contact
	A	*B*	
			si $E_1 = E_2 = E$ $a = 1{,}397\, n_a \sqrt[3]{\dfrac{\dfrac{P}{E}}{\dfrac{2}{R_1} - \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}}}$ $b = 1{,}397\, n_b \sqrt[3]{\dfrac{\dfrac{P}{E}}{\dfrac{2}{R_1} - \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3}}}$
Roulement à rouleaux	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_4}\right)$	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3}\right)$	$a = 1{,}145\, n_a \times$ $\times \sqrt[3]{P \dfrac{\dfrac{1-\mu_1^2}{E_1} + \dfrac{1-\mu_2^2}{E_2}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} - \dfrac{1}{R_4}}}$ $b = 1{,}145\, n_b \times$ $\times \sqrt[3]{P \dfrac{\dfrac{1-\mu_1^2}{E_1} + \dfrac{1-\mu_2^2}{E_2}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} - \dfrac{1}{R_4}}}$ si $E_1 = E_2 = E$ $a = 1{,}397\, n_a \sqrt[3]{\dfrac{\dfrac{P}{E}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} - \dfrac{1}{R_4}}}$ $b = 1{,}397\, n_b \sqrt[3]{\dfrac{\dfrac{P}{E}}{\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} - \dfrac{1}{R_4}}}$

Contrainte maximale, σ_{max}	Rapprochement mutuel des corps en contact, Δ
et $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}3$, alors $0{,}245\, n_P \sqrt[3]{PE^2\left(\frac{2}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)^2}$	$0{,}977\, n_\Delta \sqrt[3]{\left(\frac{P}{E}\right)^2\left(\frac{2}{R_1} - \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}\right)}$
$0{,}365\, n_P \times \sqrt[3]{P\frac{\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4}\right)^2}{\left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)^2}}$	$0{,}655\, n_\Delta \times \sqrt[3]{P^2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4}\right) \times \left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)^2}$
et $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}3$, alors $0{,}245\, n_P \times \sqrt[3]{PE^2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4}\right)^2}$	$0{,}977\, n_\Delta \times \sqrt[3]{\left(\frac{P}{E}\right)^2\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4}\right)}$

Schéma du contact	Coefficients de l'équation de l'ellipse de contact		Dimensions de l'aire de contact
	A	B	
Cylindres à axes orthogonaux	$\frac{1}{2R_2}$	$\frac{1}{2R_1}$	$a = 1{,}145\, n_a \times$ $\times \sqrt[3]{P \frac{R_1R_2}{R_2 + R_1}\left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)}$ $b = 1{,}145\, n_b \times$ $\times \sqrt[3]{P \frac{R_1R_2}{R_2 + R_1}\left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)}$ Pour $a = b = 0{,}9086 \times$ $\times \sqrt[3]{PR\left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)}$ si $E_1 = E_2 = E$ $a = 1{,}397\, n_a \sqrt[3]{\frac{P}{E} \frac{R_1R_2}{R_2 + R_1}}$ $b = 1{,}397\, n_b \sqrt[3]{\frac{P}{E} \frac{R_1R_2}{R_2 + R_1}}$ Pour $a = b = 1{,}109 \sqrt[3]{\frac{PR}{E}}$

Contrainte maximale, σ_{max}	Rapprochement mutuel des corps en contact, Δ
$0{,}365\, n_P \times \sqrt[3]{P \dfrac{\left(\dfrac{R_2+R_1}{R_1R_2}\right)^2}{\left(\dfrac{1-\mu_1^2}{E_1}+\dfrac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)^2}}$	$0{,}655\, n_\Delta \times \sqrt[3]{P^2 \dfrac{R_2+R_1}{R_1R_2}\left(\dfrac{1-\mu_1^2}{E_1}+\dfrac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)^2}$
$R_1 = R_2 = R$ $0{,}5784 \sqrt[3]{\dfrac{P}{R^2\left(\dfrac{1-\mu_1^2}{E_1}+\dfrac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)^2}}$	$0{,}8255 \sqrt[3]{\dfrac{P^2}{R}\left(\dfrac{1-\mu_1^2}{E_1}+\dfrac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)^2}$
et $\mu_1 = \mu_2 = 0{,}3$, alors $0{,}245\, n_P \sqrt[3]{PE^2\left(\dfrac{R_2+R_1}{R_1R_2}\right)^2}$	$0{,}977\, n_\Delta \sqrt[3]{\left(\dfrac{P}{E}\right)^2 \dfrac{R_2+R_1}{R_1R_2}}$
$R_1 = R_2 = R$ $0{,}388 \sqrt[3]{P\left(\dfrac{E}{R}\right)^2}$	$1{,}231 \sqrt[3]{\left(\dfrac{P}{E}\right)^2 \dfrac{1}{R}}$

Schéma du contact	Coefficients de l'équation de l'ellipse de contact A	Coefficients de l'équation de l'ellipse de contact B	Dimensions de l'aire de contact
Cylindres à axes parallèles	—	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)$	Mi-largeur de la bande de contact $b = 1{,}128 \times \sqrt{\frac{P}{l}\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}\left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1}+\frac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)}$ Pour $b = 0{,}798 \times \sqrt{\frac{PR}{l}\left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1}+\frac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)}$ Si $E_1 = E_2 = E$ et $b = 1{,}522\sqrt{\frac{P}{lE}\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}}$ Pour $b = 1{,}076\sqrt{\frac{PR}{lE}}$
Cylindre et cavité cylindrique à axes parallèles	—	$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$	Mi-largeur de la bande de contact $b = 1{,}128 \times \sqrt{\frac{P}{l}\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}\left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1}+\frac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)}$ Si $E_1 = E_2 = E$ et $b = 1{,}522\sqrt{\frac{P}{lE}\frac{R_1R_2}{R_2-R}}$

Contrainte maximale, σ_{max}	Rapprochement mutuel des corps en contact, Δ
$0{,}5642 \times \sqrt{\frac{P}{l}\,\frac{\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}}{\frac{1-\mu_1^2}{E_1}+\frac{1-\mu_2^2}{E_2}}}$	$\frac{2P}{\pi l}\left[\frac{1-\mu_1^2}{E_1}\left(\ln\frac{2R_1}{b}+0{,}407\right)+\frac{1-\mu_2^2}{E_2}\left(\ln\frac{2R_2}{b}+0{,}407\right)\right]$
$R_1 = R_2 = R$ $0{,}798\sqrt{\frac{\frac{P}{lR}}{\frac{1-\mu_1^2}{E_1}+\frac{1-\mu_2^2}{E_2}}}$	$\frac{2P}{\pi l}\left[\left(\ln\frac{2R}{b}+0{,}407\right)\times\left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1}+\frac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)\right]$
$\mu_1 = \mu_2 = 0{,}3$, alors $0{,}418\sqrt{\frac{PE}{l}\,\frac{R_1+R_2}{R_1R_2}}$	$0{,}5796\,\frac{P}{lE}\left(\ln\frac{4R_1R_2}{b^2}+0{,}814\right)$
$R_1 = R_2 = R$ $0{,}591\sqrt{\frac{PE}{lR}}$	$0{,}5796\,\frac{P}{lE}\left(\ln\frac{4R^2}{b^2}+0{,}814\right)$
$0{,}5642\sqrt{\frac{P}{l}\,\frac{\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}}{\frac{1-\mu_1^2}{E_1}+\frac{1-\mu_2^2}{E_2}}}$	
$\mu_1 = \mu_2 = 0{,}3$, alors $0{,}418\sqrt{\frac{PE}{l}\,\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}}$	$1{,}82\,\frac{P}{lE}\,(1-\ln b)$

Schéma du contact	Coefficients de l'équation de l'ellipse de contact		Dimensions de l'aire de contact
	A	B	
Cylindre et surface plane	—	$\frac{1}{2R}$	Mi-largeur de la bande de contact $b = 1{,}131 \times \sqrt{\frac{PR}{l}\left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)}$ Si $E_1 = E_2 = E$ et $b = 1{,}526 \sqrt{\frac{PR}{lE}}$
Deux corps délimités par des surfaces courbes et contractant avant la déformation en un point			Grand demi-axe de l'ellipse $a = n_a \sqrt[3]{\frac{3}{2}\left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)\frac{P}{\Sigma k}}$ Petit demi-axe de l'ellipse $b = n_b \sqrt[3]{\frac{3}{2}\left(\frac{1-\mu_1^2}{E_1} + \frac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)\frac{P}{\Sigma k}}$ P — charge; E — module d'élasticité; μ — coefficient de Poisson; 1 et 2 — indices du premier et du second corps respectivement; Σk — somme des courbures principales des surfaces des corps en contact à l'endroit du contact initial

Contrainte maximale, σ_{max}	Rapprochement mutuel des corps en contact, Δ
$0{,}5642\sqrt{\dfrac{\dfrac{P}{lR}}{\dfrac{1-\mu_1^2}{E_1}+\dfrac{1-\mu_2^2}{E_2}}}$ $\mu_1=\mu_2=0{,}3$, alors $0{,}418\sqrt{\dfrac{PE}{lR}}$	La diminution du diamètre du cylindre entre deux faces comprimant le cylindre, compte tenu des déformations de contact et générales $\Delta D=1{,}159\,\dfrac{P}{lE}\left(0{,}41+\ln\dfrac{4R}{b}\right)$
$n_P\,\dfrac{1}{\pi}\sqrt[3]{\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{\Sigma k}{\dfrac{1-\mu_1^2}{E_1}+\dfrac{1-\mu_2^2}{E_2}}\right)^2P},$ avec $n_P=\dfrac{1}{n_a\,n_b}$	$n_\Delta\,\dfrac{1}{2}\times$ $\times\sqrt[3]{\dfrac{9}{4}\left(\dfrac{1-\mu_1^2}{E_1}+\dfrac{1-\mu_2^2}{E_2}\right)^2P^2\,\Sigma k}$

Valeurs numériques des coefficients n_a, n_b, n_P, n_Δ

$\frac{A}{B}$	n_a	n_b	n_P	n_Δ
1,0000	1,000	1,0000	1,0000	1,0000
0,9623	1,013	0,9873	0,9999	0,9999
0,9240	1,027	0,9742	0,9997	0,9997
0,8852	1,042	0,9606	0,9992	0,9992
0,8459	1,058	0,9465	0,9985	0,9985
0,8059	1,076	0,9318	0,9974	0,9974
0,7652	1,095	0,9165	0,9960	0,9960
0,7238	1,117	0,9005	0,9942	0,9942
0,6816	1,141	0,8837	0,9919	0,9919
0,6384	1,168	0,8660	0,9890	0,9889
0,5942	1,198	0,8472	0,9853	0,9852
0,5489	1,233	0,8271	0,9805	0,9804
0,5022	1,274	0,8056	0,9746	0,9744
0,4540	1,322	0,7822	0,9669	0,9667
0,4040	1,381	0,7565	0,9571	0,9566
0,3518	1,456	0,7278	0,9440	0,9432
0,3410	1,473	0,7216	0,9409	0,9400
0,3301	1,491	0,7152	0,9376	0,9366
0,3191	1,511	0,7086	0,9340	0,9329
0,3080	1,532	0,7019	0,9302	0,9290
0,2967	1,554	0,6949	0,9262	0,9248
0,2853	1,578	0,6876	0,9219	0,9203
0,2738	1,603	0,6801	0,9172	0,9155
0,2620	1,631	0,6723	0,9121	0,9102
0,2501	1,660	0,6642	0,9067	0,9045
0,2380	1,693	0,6557	0,9008	0,8983
0,2257	1,729	0,6468	0,8944	0,8916
0,2132	1,768	0,6374	0,8873	0,8841
0,2004	1,812	0,6276	0,8766	0,8759
0,1873	1,861	0,6171	0,8710	0,8668
0,1739	1,916	0,6059	0,8614	0,8566
0,1603	1,979	0,5938	0,8507	0,8451
0,1462	2,053	0,5808	0,8386	0,8320
0,1317	2,141	0,5665	0,8246	0,8168
0,1166	2,248	0,5505	0,8082	0,7990
0,1010	2,381	0,5325	0,7887	0,7775
0,09287	2,463	0,5224	0,7774	0,7650
0,08456	2,557	0,5114	0,7647	0,7509
0,07600	2,669	0,4993	0,7504	0,7349
0,06715	2,805	0,4858	0,7338	0,7163
0,05797	2,975	0,4704	0,7144	0,6943
0,04838	3,199	0,4524	0,6909	0,6675
0,04639	3,253	0,4484	0,6856	0,6613
0,04439	3,311	0,4442	0,6799	0,6549
0,04237	3,373	0,4398	0,6740	0,6481
0,04032	3,441	0,4352	0,6678	0,6409
0,03823	3,514	0,4304	0,6612	0,6333
0,03613	3,594	0,4253	0,6542	0,6251
0,03400	3,683	0,4199	0,6467	0,6164
0,03183	3,781	0,4142	0,6387	0,6071

$\frac{A}{B}$	n_a	n_b	n_P	n_Δ
0,02962	3,890	0,4080	0,6300	0,5970
0,02737	4,014	0,4014	0,6206	0,5860
0,02508	4,156	0,3942	0,6104	0,5741
0,02273	4,320	0,3864	0,5990	0,5608
0,02033	4,515	0,3777	0,5864	0,5460
0,01787	4,750	0,3680	0,5721	0,5292
0,01533	5,046	0,3568	0,5555	0,5096
0,01269	5,432	0,3436	0,5358	0,4864
0,009934	5,976	0,3273	0,5112	0,4574
0,007018	6,837	0,3058	0,4783	0,4186
0,003850	8,609	0,2722	0,4267	0,3579

Tableau 53

Pressions admissibles sur la surface de contact lorsque le contact initial se réalise suivant une ligne et pour une sollicitation statique

Nuance de l'acier	Limite d'écrouissage temporaire, kgf/mm²	Dureté d'après l'échelle de Brunell	Pression maximale admissible sur l'aire de contact $[\sigma]_{cont}$, kgf/cm²
Acier			
30	48–60	180	8500–10500
40	57–70	200	10000–13500
50	63–80	230	10500–14000
50Г	65–85	240	11000–14500
15X	62–75	240	10500–16000
20X	70–85	240	12000–14500
15XФ	160–180	240	13500–16000
ШX15	—	—	38000
Fonte			
СЧ21–40	96	180–207	8000–9000
СЧ24–44	100	187–217	9000–10000
СЧ28–48	110	170–241	10000–11000
СЧ32–52	120	170–241	11000–12000
СЧ35–56	130	197–255	12000–13000
СЧ38–60	140	197–255	13000–14000

Neuf nouvelles analogies en résistance des matériaux

Examinons neuf nouvelles analogies se basant sur l'identité des équations différentielles que l'on rencontre dans les problèmes de calcul des barres: détermination des efforts et déplacements axiaux en traction-compression; des déformations et déplacements angulaires en torsion; des déformations angulaires et déplacements linéaires de glissement en cisaillement; des efforts tranchants généralisés et des moments fléchissants, des angles de rotation et des flèches en flexion.

Analogie 1. *Les problèmes de détermination des efforts et déplacements axiaux en traction-compression d'une barre sont équivalents aux problèmes de détermination des efforts tranchants généralisés et des moments fléchissants dans une poutre en flexion correspondante.* Les conditions d'équivalence et de correspondance sont

$$\frac{n(x)}{EF(x)} \rightleftarrows -q(x), \tag{A.1}$$

$$\frac{N(x)}{EF(x)} \rightleftarrows Q^*(x), \tag{A.2}$$

$$u(x) \rightleftarrows M(x). \tag{A.3}$$

Ici $n(x)$ est l'intensité de la charge longitudinale répartie; $q(x)$, intensité de la charge transversale répartie; $N(x)$, effort axial; $EF(x)$, rigidité en traction-compression; $Q^*(x)$, effort tranchant généralisé, $Q^*(x) = Q(x) +$ $+ m(x)$; $u(x)$, déplacement longitudinal; $M(x)$, moment fléchissant; $m(x)$, intensité de la charge momentanée répartie.

Analogie 2. *Les problèmes de détermination des efforts et déplacements axiaux dans une barre en traction-compression sont équivalents aux problèmes de détermination des angles de rotation et des flèches dans une poutre en*

flexion correspondante. Les conditions d'équivalence et de correspondance sont:

$$\frac{n(x)}{EF(x)} \rightleftarrows -\frac{M(x)}{EJ(x)}; \tag{A.4}$$

$$\frac{N(x)}{EF(x)} \rightleftarrows \alpha(x); \tag{A.5}$$

$$u(x) \rightleftarrows w(x). \tag{A.6}$$

Ici $EJ(x)$ est la rigidité en flexion; $\alpha(x)$, angle de rotation, $w(x)$, flèche.

Analogie 3. *Les problèmes de détermination des déformations angulaires et des déplacements linéaires de glissement dans une barre en cisaillement isolé sont équivalents aux problèmes de détermination des efforts et déplacements axiaux dans une barre en traction-compression correspondante.* Les conditions d'équivalence et de correspondance sont:

$$\frac{q(x)\,k}{GF(x)} \rightleftarrows \frac{n(x)}{EF(x)}; \tag{A.7}$$

$$\gamma(x) \rightleftarrows \frac{N(x)}{EF(x)}; \tag{A.8}$$

$$v(x) \rightleftarrows u(x), \tag{A.9}$$

où $GF(x)$ est la rigidité en cisaillement; k, coefficient reflétant la distribution inégale des contraintes tangentielles sur la hauteur de la section; $\gamma(x)$, cisaillement relatif (déformation angulaire); $v(x)$, déplacement linéaire de glissement.

Analogie 4. *Les problèmes de détermination des déformations angulaires et des déplacements linéaires de glissement dans une barre en cisaillement isolé sont équivalents aux problèmes de détermination des déformations et des déplacements angulaires dans une barre en torsion correspondante.* Les conditions d'équivalence et de correspondance sont traduites par les formules suivantes:

$$\frac{q(x)\,k}{GF(x)} \rightleftarrows \frac{m_t(x)}{GJ_t(x)}; \tag{A.10}$$

$$\gamma(x) \rightleftarrows \theta(x); \tag{A.11}$$

$$v(x) \rightleftarrows \varphi(x), \tag{A.12}$$

où $m_t(x)$ est l'intensité de la charge de torsion répartie; $GJ_t(x)$, rigidité en torsion; $\theta(x)$, déformation angulaire (angle de torsion relatif); $\varphi(x)$, déplacement angulaire (angle de torsion).

Analogie 5. *Les problèmes de détermination des moments de torsion et des angles de torsion dans une barre en torsion sont équivalents aux problèmes de détermination des efforts tranchants généralisés et des moments fléchissants dans une poutre en flexion correspondante.* Les conditions de correspondance et d'équivalence sont:

$$\frac{m_t(x)}{GJ_t(x)} \rightleftarrows -q(x); \tag{A.13}$$

$$\frac{M_t(x)}{GJ_t(x)} \rightleftarrows Q^*(x); \tag{A.14}$$

$$\varphi(x) \leftrightarrows M(x), \tag{A.15}$$

où $M_t(x)$ est le moment de torsion.

Analogie 6. *Les problèmes de détermination des efforts et déplacements axiaux dans une barre en flexion-compression sont équivalents aux problèmes de détermination des moments de torsion et des angles de torsion dans une barre en torsion correspondante.* Les conditions de correspondance et d'équivalence sont

$$\frac{n(x)}{EF(x)} \rightleftarrows \frac{m_t(x)}{GJ_t(x)}; \tag{A.16}$$

$$\frac{N(x)}{EF(x)} \rightleftarrows \frac{M_t(x)}{GJ_t(x)}; \tag{A.17}$$

$$u(x) \rightleftarrows \varphi(x). \tag{A.18}$$

Analogie 7. *Les problèmes de détermination des déformations angulaires et des déplacements linéaires de glissement dans une barre en cisaillement isolé sont équivalents aux problèmes de détermination des efforts tranchants généralisés et des moments fléchissants dans une poutre en flexion correspondante.* Les conditions d'équivalence et de correspondance sont:

$$\frac{q(x)}{GF} k \rightleftarrows q^*(x); \tag{A.19}$$

$$v(x) \rightleftarrows M(x); \tag{A.20}$$

$$\gamma(x) \rightleftarrows Q^*(x). \tag{A.21}$$

Analogie 8. *Les problèmes de détermination des déformations angulaires et des déplacements linéaires de glissement dans une barre en cisaillement isolé sont équivalents aux problèmes de détermination des angles de rotation et des flèches dans une poutre en flexion correspondante.* Les condi-

tions de correspondance et d'équivalence sont traduites par les formules suivantes:

$$\frac{q(x)}{GF}k \rightleftarrows \frac{M(x)}{EJ}; \tag{A.22}$$

$$v(x) \rightleftarrows w(x); \tag{A.23}$$

$$\gamma(x) \rightleftarrows \alpha(x). \tag{A.24}$$

Analogie 9. *Les problèmes de détermination des moments de torsion et des angles de torsion dans une poutre en torsion sont équivalents aux problèmes de détermination des angles de rotation et des flèches dans une poutre en flexion correspondante.* Les conditions de correspondance et d'équivalence sont:

$$\frac{m_t(x)}{GJ_t(x)} \rightleftarrows \frac{M(x)}{EJ(x)}; \tag{A.25}$$

$$\frac{M_t(x)}{GJ_t(x)} \rightleftarrows \alpha(x); \tag{A.26}$$

$$\varphi(x) \rightleftarrows w(x). \tag{A.27}$$

Illustrons quelques-unes de ces analogies sur des exemples appropriés.

Exemple 1. Une barre prismatique lourde se trouve sous l'action de la pesanteur qui se présente comme une charge axiale uniformément répartie d'intensité $n(x) = \gamma F$ (fig. 367, *a*). Ici F est l'aire de la section transver-

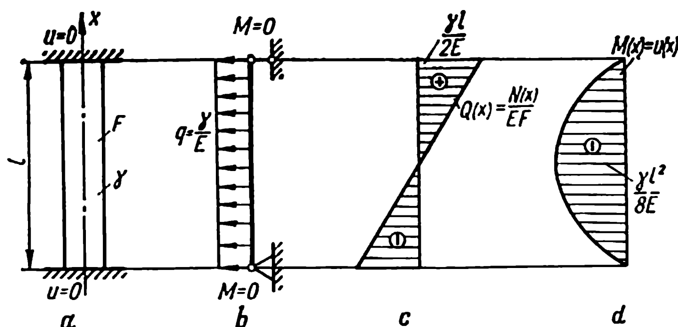


FIG. 367

sale; γ, poids volumique. Nous nous servons dans ce cas de l'analogie 1. Dans la barre examinée les conditions limites sont: pour $x = 0$, $u = 0$ et pour $x = l$, $u = 0$. Conformément à (A.3), la barre correspondante

doit être choisie de telle façon que les moments fléchissants aux extrémités s'annulent. A cette condition satisfait une poutre à deux appuis (fig. 367, *b*). En accord avec (A.1), la charge fictive pour cette poutre est $q(x) = -\frac{F\gamma}{EF} = -\frac{\gamma}{E}$, où E est le module d'élasticité. Il suffit maintenant de construire pour cette poutre correspondante (fictive) deux diagrammes dus à la charge fictive: celui des efforts tranchants (fig. 367, *c*) et celui des moments fléchissants (fig. 367, *d*). Le premier diagramme représente, conformément à (A.2), le diagramme des efforts axiaux $\frac{N(x)}{EF}$, le second, le diagramme des déplacements axiaux.

Exemple 2. Une poutre prismatique lourde encastrée à l'extrémité supérieure (fig. 368, *a*) se trouve sous l'action de son propre poids. Dans ce cas aussi on peut se servir de l'analogie 1. Les conditions limites sont: pour $x = 0$, $N = 0$; pour $x = l$, $u = 0$. Dans ce cas, la poutre correspondante doit être choisie de telle façon que l'effort tranchant à l'une des extrémités et le moment fléchissant à l'autre s'annulent. La poutre correspondante est montrée sur la fig. 368, *b*. Le diagramme de $Q(x)$ correspond (fig. 368, *c*) à celui de $\frac{N(x)}{EF}$; le diagramme de $M(x)$ (fig. 368, *d*), à celui de $u(x)$.

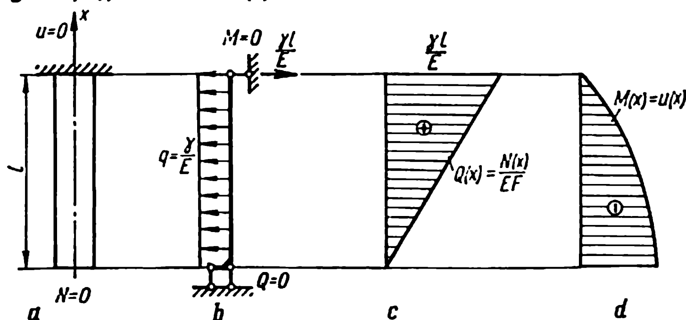


FIG. 368

Exemple 3. Pour la barre représentée sur la fig. 369, *a* on se servira de l'analogie 2. Conformément à (A.6), les conditions limites dans la poutre correspondante doivent être telles que les flèches s'annulent aux extrémités. A ces conditions répond la poutre représentée sur la fig. 369, *b*. En accord avec (A.4), $\frac{\gamma}{E} = \frac{M}{EJ}$ représente une charge momentanée

et les diagrammes de $Q(x)$ (fig. 369, *c*) et de $M(x)$ (fig. 369, *d*) dus à cette charge seront donc les diagrammes des angles d'inclinaison et des flèches qui sont à leur tour les diagrammes de $\frac{N(x)}{EF}$ et de $u(x)$.

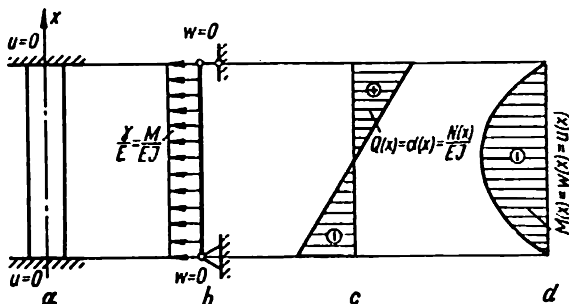


FIG. 369

Exemple 4. Un arbre rond encastré à ses deux extrémités est soumis à la torsion par des moments de torsion uniformément répartis d'intensité m_t (fig. 370, *a*). On se servira dans ce cas de l'analogie 5. Les conditions limites dans l'arbre sont: pour $x = 0$, $\varphi = 0$ et pour $x = l$, $\varphi = 0$. Conformément à (A.15), dans la barre correspondante les moments fléchissants doivent s'annuler aux extrémités. Cette barre est montrée sur la fig. 370, *b*. La charge fictive sera $q(x) = \frac{m(x)}{GJ_t}$. Conformément à (A.14) et (A.15), le diagramme de $Q(x)$ correspondra à $\frac{M_t(x)}{GJ_t}$ (fig. 370, *c*); le diagramme de $M(x)$, à celui des angles de torsion $\varphi(x)$ (fig. 370, *d*).

Exemple 5. Un arbre à gradins (fig. 371, *a*) est soumis à la torsion par deux moments concentrés. La fig. 371, *b* montre la poutre correspondante de section transversale constante. Cette poutre correspond, de par ses dimensions longitudinales et le mode de mise en charge, à l'arbre donné mais avec les valeurs des longueurs réduites, autrement dit, les tronçons réduits ont des échelles différentes (fig. 371, *b*). Ici J_p et J'_p sont les moments d'inertie polaires des sections de l'arbre, à gauche et à droite. Pour résoudre le problème il ne reste maintenant qu'à construire deux diagrammes: celui de Q et celui de M (fig. 371, *c*, *d*).

Les autres analogies ci-dessus permettent elles aussi de résoudre toute sorte de problèmes. Ces analogies rendent sensiblement plus larges et efficaces les possibilités d'usage du présent aide-mémoire. Elles font

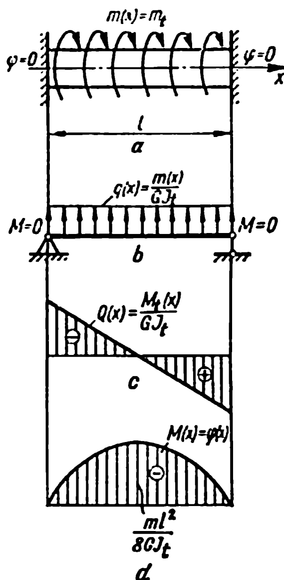


FIG. 370

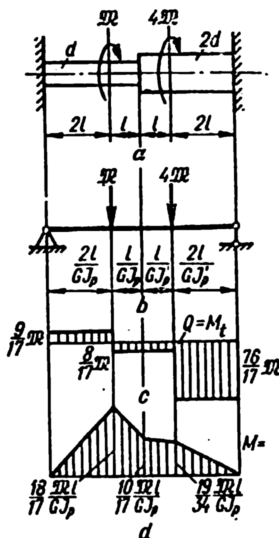


FIG. 371

également que tout un nombre de données concernant une quelconque des formes de l'état de contrainte et de déformation d'une barre peuvent servir à l'étude d'autres formes de déformations.

Propriétés physico-mécaniques des matériaux (pour des calculs approximatifs)

σ_{tr} — limite de résistance en traction (pour le bois, le long des fibres);
σ_{comp} — limite de résistance en compression (pour le bois, le long des fibres);
σ_{fl} — limite de résistance en flexion;
σ_{tor} — limite de résistance en torsion;
τ_{cis} — limite de résistance en cisaillement (pour le bois, le long des fibres);
σ_{pr} — limite de proportionnalité en traction;

Matériau	Limite de résistance, kgf/mm²	Limite d'écoulement, de proportionnalité, kgf/mm²	Limite d'endurance, kgf/mm²
			Aciers au
			ordi-
GOST 380-60			
Ст. 1	σ_{tr} = 32-40	$\sigma_{éc.tr}$ = 18	σ_{-1tr} = 12-15 σ_{-1} = 16-22 τ_{-1} = 8-12
Ст. 2	σ_{tr} = 32-40	$\sigma_{éc.tr}$ = 19-22	σ_{-1tr} = 12-16 σ_{-1} = 17-22 τ_{-1} = 8-13
Ст. 3	σ_{tr} = 38-47	$\sigma_{éc.tr}$ = 21-24	σ_{-1tr} = 12-16 σ_{-1} = 17-22 τ_{-1} = 10-13
Ст. 4	σ_{tr} = 42-52	$\sigma_{éc.tr}$ = 24-26	σ_{-1} = 19-25
Ст. 5	σ_{tr} = 50-62	$\sigma_{éc.tr}$ = 26-28	σ_{-1tr} = 17-22 σ_{-1} = 22-30 τ_{-1} = 13-18
Ст. 6	σ_{tr} = 60-72	$\sigma_{éc.tr}$ = 30-31	σ_{-1tr} = 19-25 σ_{-1} = 25-34 τ_{-1} = 15-20

$\sigma_{éc.tr}$ — limite d'écoulement en traction;
$\sigma_{0,1}$ — limite d'écoulement conventionnelle en traction (déformation 0,1 %);
$\sigma_{éc.com}$ — limite d'écoulement en compression;
$\sigma_{éc.fl}$ — limite d'écoulement en flexion;
$\sigma_{-1\,tr}$ — limite d'endurance en traction;
σ_{-1} — limite d'endurance en flexion;
τ_{-1} — limite d'endurance en torsion.

Allongement relatif (rétrécissement relatif), %	Dureté Brunell, kgf/mm²	Résilience, kgf m/cm²	Module d'élasticité $E(G)$, $\times 10^{-4}$ kgf/mm²	Coefficient de Poisson	Poids spécifique, gf/cm³	Coefficient de dilatation linéaire, $\times 10^{6}$ 1/degré
carbone						
*naires****						
28	110	—	—	—	—	—
26	116	—	—	—	—	—
21-23	131	7-10	—	—	—	—
19-21	143	6-8	—	—	—	—
15-17	170	—	—	—	—	—
—	—	—	—	—	—	—

Matériau	Limite de résistance, kgf/mm²	Limite d'écoulement, de proportionnalité, kgf/mm²	Limite d'endurance, kgf/mm²
			spé-
GOST 5520-62			
15K	$\sigma_{tr} = 38$	$\sigma_{éc.tr} = 21\text{-}23$	—
20K	$\sigma_{tr} = 41$	$\sigma_{éc.tr} = 23\text{-}25$	—
GOST 6713-53			
Cт. 3 de pont	$\sigma_{tr} = 38$	$\sigma_{éc.tr} = 24$	—
M16C	$\sigma_{tr} = 38$	$\sigma_{éc.tr} = 23$	—
GOST 1414-54		—	—
A12	$\sigma_{tr} = 42\text{-}57$	—	—
A40Г	$\sigma_{tr} = 60\text{-}75$	—	—
			aciers de
GOST 1050-60			
10	$\sigma_{tr} = 34\text{-}42$	$\sigma_{éc.tr} = 21$	$\sigma_{-1tr} = 12\text{-}15$ $\sigma_{-1} = 16\text{-}22$ $\tau_{-1} = 8\text{-}12$
20	$\sigma_{tr} = 42\text{-}50$	$\sigma_{éc.tr} = 25$	$\sigma_{-1tr} = 12\text{-}16$ $\sigma_{-1} = 17\text{-}22$ $\tau_{-1} = 10\text{-}13$
30	$\sigma_{tr} = 50\text{-}60$	$\sigma_{éc.tr} = 30$	$\sigma_{-1tr} = 17\text{-}21$ $\sigma_{-1} = 20\text{-}27$ $\tau_{-1} = 11\text{-}14$
40	$\sigma_{tr} = 58\text{-}70$	$\sigma_{éc.tr} = 34$	$\sigma_{-1tr} = 18\text{-}24$ $\sigma_{-1} = 23\text{-}32$ $\tau_{-1} = 14\text{-}19$
45	$\sigma_{tr} = 61\text{-}75$	$\sigma_{éc.tr} = 36$	$\sigma_{-1tr} = 19\text{-}25$ $\sigma_{-1} = 25\text{-}34$ $\tau_{-1} = 15\text{-}20$
50	$\sigma_{tr} = 64\text{-}80$	$\sigma_{éc.tr} = 38$	$\sigma_{-1tr} = 20\text{-}26$ $\sigma_{-1} = 27\text{-}35$ $\tau_{-1} = 16\text{-}21$
60	$\sigma_{tr} = 69\text{-}90$	$\sigma_{éc.tr} = 41$	$\sigma_{-1tr} = 22\text{-}28$ $\sigma_{-1} = 31\text{-}38$ $\tau_{-1} = 18\text{-}22$
30 Г	$\sigma_{tr} = 55\text{-}70$	$\sigma_{éc.tr} = 32$	$\sigma_{-1} = 22\text{-}32$
60 Г	$\sigma_{tr} = 71$	$\sigma_{éc.tr} = 42$	$\sigma_{-1tr} = 25\text{-}32$

Allongement relatif (rétrécissement relatif), %	Dureté Brunell kgfm/cm²	Résilience, kgfm/cm²	Module d'élasticité $E(G)$, $\times 10^{-4}$ kgf/mm²	Coefficient de Poisson	Poids spécifique, gf/cm³	Coefficient de dilatation linéaire, $\times 10^{6}$ 1/degré
ciaux						
23	—	7-8	—	—	—	—
22	—	6-7	—	—	—	—
22 (50)	—	7-10	—	—	—	—
22 (50)	—	7-10	—	—	—	—
22 (36)	160	—	2,02	—	—	11,9-14,2
14 (20)	207	—	—	—	—	—
*qualité****						
31 (55)	—	—	1,90	—	7,83	11,6-14,6
25 (55)	—	—	2,02	—	7,82	11,1-14,4
21 (50)	—	8	—	—	7,82	12,6-15,6
19 (45)	—	6	2,135	—	7,81	12,4-14,6
16 (40)	—	5	2,04	—	7,81	11,6-14,7
14 (40)	—	4	2,20	—	7,81	12,0-14,1
12 (35)	—	—	2,08	—	7,80	11,1-14,6
20 (45)	—	8	2,17	—	7,81	—
11 (35)	—	—	2,109	—	7,81	11,6-14,6

Matériau	Limite de résistance, kgf/mm²	Limite d'écoulement, de proportionnalité, kgf/mm²	Limite d'endurance kgf/mm²
			aciers
GOST 5058-65 15ХСНД	$\sigma_{tr} = 64\text{-}66$	$\sigma_{éc.tr} = 39\text{-}42$	$\sigma_{-1} = 31$ $\tau_{-1} = 16$
GOST 4543-61 20Х	$\sigma_{tr} = 72\text{-}85$	$\sigma_{éc.tr} = 40\text{-}65$	$\sigma_{-1} = 31\text{-}38$ $\tau_{-1} = 17\text{-}23$
40Х	$\sigma_{tr} = 73\text{-}105$	$\sigma_{éc.tr} = 65\text{-}90$	$\sigma_{-1tr} = 24\text{-}34$ $\sigma_{-1} = 32\text{-}48$ $\tau_{-1} = 21\text{-}26$
45Х	$\sigma_{tr} = 85\text{-}105$	$\sigma_{éc.tr} = 70\text{-}95$	$\sigma_{-1} = 40\text{-}50$
30ХМ	$\sigma_{tr} = 74\text{-}100$	$\sigma_{éc.tr} = 54\text{-}85$	$\sigma_{-1tr} = 37$ $\sigma_{-1} = 31\text{-}41$ $\tau_{-1} = 23$
40ХН	$\sigma_{tr} = 100\text{-}145$	$\sigma_{éc.tr} = 80\text{-}130$	$\sigma_{-1tr} = 31\text{-}42$ $\sigma_{-1} = 46\text{-}60$
12ХН3А	$\sigma_{tr} = 95\text{-}140$	$\sigma_{éc.tr} = 70\text{-}110$	$\sigma_{-1} = 42\text{-}64$ $\tau_{-1} = 22\text{-}30$
20ХН3А	$\sigma_{tr} = 95\text{-}145$	$\sigma_{éc.tr} = 85\text{-}110$	$\sigma_{-1} = 43\text{-}65$ $\tau_{-1} = 24\text{-}31$
40ХНМА	$\sigma_{tr} = 110\text{-}170$	$\sigma_{éc.tr} = 85\text{-}160$	$\sigma_{-1} = 50\text{-}70$ $\tau_{-1} = 27-38$
30ХГСА	$\sigma_{tr} = 110\text{-}170$	$\sigma_{éc.tr} = 85\text{-}150$	$\sigma_{-1} = 48\text{-}70$ $\tau_{-1} = 28\text{-}40$
			aciers inoxydables et
GOST 5632-61 1Х 13 (ЭЖ1)	$\sigma_{tr} = 61$	$\sigma_{éc.tr} = 41$	$\sigma_{-1} = 37$
2Х13Х(ЭЖ2)(trempe à l'air à 1000-1020°C, revenu à 720-750°C)	$\sigma_{tr} = 72$	$\sigma_{éc.tr} = 52$	$\sigma_{-1} = 37$
1Х17Н2(ЭИ268) (trempe à 1030°C, revenu à 680°C)	$\sigma_{tr} = 96$	$\sigma_{éc.tr} = 77$	$\sigma_{-1} = 49$
1Х18Н9Т(ЭЯ1Т)	$\sigma_{tr} = 58$	$\sigma_{éc.tr} = 24$	$\sigma_{-1} = 20\text{-}24$ $\tau_{-1} = 13{,}5$

Allongement relatif (rétrécissement relatif), %	Dureté Brunell, kgf/mm²	Résilience, kgfm/cm²	Module d'élasticité $E(G)$, $\times 10^{-4}$ kgf/mm²	Coefficient de Poisson	Poids spécifique, gf/cm³	Coefficient de dilatation linéaire, $\times 10^{6}$ 1/degré
alliés ***						
18-21	—	7,11	—	—	—	—
—	—	—	2,07	—	7,74	11,3
—	—	—	2,185(0,808)	—	7,85	13,4-14,8
9 (45)	187-219	5	2,109(0,8015)	—	7,82	12,8
—	—	—	2,130	—	7,82	12,3-14,4
—	—	—	2,040	—	7,82	11,8
—	—	—	—	—	—	—
—	—	—	2,040(0,815)	—	7,85	11,0-14,5
—	—	—	2,040	—	7,85	11,7
—	—	—	1,980(0,830)	—	7,85	11,0
résistant à chaud						
22 (60)	—	1	2,2	—	7,75	10,1-12,25
21 (65)	—	6-17	2,2	—	7,75	10,1
17 (59)	—	—	2,0	—	7,75	10,3
70 (80)	—	28	2,0	—	7,9	16,6-18,6

Matériau	Limite de résistance, kgf/mm²	Limite d'écoulement, de proportionnalité, kgf/mm²	Limite d'endurance, kgf/mm²
Х12Н 22ТЭМР (ЭИ696М, ЭП 33) (laminage, durcissement: 730°C, 16h + 630°C, 16h)	$\sigma_{tr} = 135$	$\sigma_{éc.tr} = 104$	—
			Alliages réfractaires et
GOST 5632-31 Х20Н77Т2ЮР (ЭИ437Б) (austénisation à 1080°C) avec refroidissement à l'air, durcissement à 750°C, 16h)	$\sigma_{tr} = 92\text{-}109$	$\sigma_{éc.tr} = 66$	—
ЖС6К (trempe à 1210-1220°C avec refroidissement à l'air, recuit à 950°C, 2h)	$\sigma_{tr} = 100\text{-}107$	$\sigma_{éc.tr} = 88\text{-}94$	—
			Métaux
Tungstène (non-allié) *****	$\sigma_{tr} = 10{,}7$	—	—
Alliages de tungstène			
W–15Mo*****	$\sigma_{tr} = 17{,}5$	—	—
W–2Nb*****	$\sigma_{tr} = 23{,}4$	—	—
W–3,6Ta*****	$\sigma_{tr} = 35$	—	—
Molybdène	$\sigma_{tr} = 78$	$\sigma_{éc.tr} = 76$	—
Alliages de molybdène			
ВМ-1 20°C	$\sigma_{tr} = 80$	$\sigma_{éc.tr} = 68$	—
ВМ-1 1800°C	$\sigma_{tr} = 10$	—	—
ВМ-2 20°C	$\sigma_{tr} = 75$	—	—
ВМ-2 1800°C	$\sigma_{tr} = 9$	—	—
ВМ-3 20°C	$\sigma_{tr} = 43\text{-}60$	—	—
ВМ-3 1800°C	$\sigma_{tr} = 12\text{-}13{,}5$	—	—

Allongement relatif (rétrécissement relatif), %	Dureté Brunell, kgf/mm²	Résilience, kgfm/cm²	Module d'élasticité $E(G)$, $\times 10^{-4}$ kgf/mm²	Coefficient de Poisson	Poids spécifique, gf/cm³	Coefficient de dilatation linéaire, $\times 10^{6}$ 1/degré
20 (46)	—	—	—	—	—	—
tenant à chaud						
11-24 (10-21)	—	3,5	2,0	—	8,2	12,7
1,5-7 (8-16)	—	—	—	—	—	—
réfractaires						
49 (76)	—	—	4,2(1,5)	0,3	19,3	4,45
27 (78)	—	—	—	—	—	—
9 (25)	—	—	—	—	—	—
15 (8)	—	—	—	—	—	—
20	—	—	3,3 (1,22)	0,31	10,2	5,6
10	—	—	3,3	—	10,3	—
45	—	—	1,85	—	—	—
10 (30)	—	0,2	3,33	—	—	—
18	—	—	1,85	—	—	—
2,8 (0,7-40)	—	—	3,25	—	—	—
40-50 (6,5)	—	—	—	—	—	—

Matériau	Limite de résistance, kgf/mm²	Limite d'écoulement, de proportionnalité, kgf/mm²	Limite d'endurance, kgf/mm²
Niobium	$\sigma_{tr} = 77$	$\sigma_{éc.tr} = 60$	—
Alliages de niobium			
ВН-2 20°C	$\sigma_{tr} = 75$	$\sigma_{éc.tr} = 70$	—
ВН-2 1500°C	$\sigma_{tr} = 8\text{-}10$	—	—
ВН-3 20°C	$\sigma_{tr} = 75\text{-}80$	—	—
ВН-3 1500°C	$\sigma_{tr} = 12{,}5$	—	—
ВН-4 20°C	$\sigma_{tr} = 81$	$\sigma_{éc.tr} = 73$	—
ВН-4 1500°C	$\sigma_{tr} = 17$	—	—
Fonte			
GOST 1412-54			
СЧ 12-28	$\sigma_{tr} = 12$ $\sigma_{comp} = 50$ $\sigma_{fl} = 28$	—	—
СЧ 15-32	$\sigma_{tr} = 15$ $\sigma_{comp} = 65$ $\sigma_{fl} = 32$ $\tau_{tor} = 24$	—	—
СЧ 18-36	$\sigma_{tr} = 18$ $\sigma_{comp} = 70$ $\sigma_{fl} = 36$	—	$\sigma_{-1tr} = 3{,}5$ $\sigma_{-1} = 9{,}0$
СЧ 21-40	$\sigma_{tr} = 21$ $\sigma_{comp} = 95$ $\sigma_{fl} = 40$ $\tau_{tor} = 28$	$\sigma_{éc.tr} = 0{,}75\sigma_{tr}$	$\sigma_{-1} = 10$ $\tau_{-1} = 8$
СЧ 24-44	$\sigma_{tr} = 24$ $\sigma_{comp} = 100$ $\sigma_{fl} = 44$ $\tau_{tor} = 30$	$\sigma_{éc.tr} = 0{,}75\sigma_{tr}$	$\sigma_{-1tr} = 6{,}5$ $\sigma_{-1} = 12$ $\tau_{-1} = 10$
СЧ 28-48	$\sigma_{tr} = 28$ $\sigma_{comp} = 110$ $\sigma_{fl} = 48$ $\tau_{tor} = 35$	$\sigma_{éc.tr} = 0{,}75\sigma_{tr}$	$\sigma_{-1tr} = 7{,}5$ $\sigma_{-1} = 15$ $\tau_{-1} = 11$
СЧ 32-52	$\sigma_{tr} = 32$ $\sigma_{comp} = 120$ $\sigma_{fl} = 52$ $\tau_{tor} = 39$	$\sigma_{éc.tr} = 0{,}85\sigma_{tr}$	$\sigma_{-1tr} = 7$ $\sigma_{-1} = 14$ $\tau_{-1} = 11{,}5$
СЧ 35-56	$\sigma_{tr} = 35$ $\sigma_{comp} = 120$ $\sigma_{fl} = 56$ $\tau_{tor} = 40$	$\sigma_{éc.tr} = 0{,}85\sigma_{tr}$	$\sigma_{-1tr} = 7{,}5$ $\sigma_{-1} = 15$ $\tau_{-1} = 11{,}5$

Suite

Allongement relatif (rétrécissement relatif), %	Dureté Brunell, kgf/cm²	Résilience, kgf m/cm²	Module d'élasticité $E(G)$, $\times 10^{-4}$ kgf/mm²	Coefficient de Poisson	Poids spécifique, gf/cm³	Coefficient de dilatation linéaire, $\times 10^{6}$ 1/degré
20-25 (25-35)	—	37	1,06(0,88)	0,39	8,57	7,1
18-28	—	27	1,06	—	8,66	6,25
—	—	—	—	—	—	—
16-20 (40-70)	—	30	—	—	—	—
40-43	—	—	—	—	—	—
16 (33)	—	5-7	—	—	—	—
24 (30)	—	—	—	—	—	—
grise						
—	143-229	—	0,8-1,5(0,45)	0,23-0,27	6,8-7,1	10-12
—	163-229	—	0,8-1,5(0,45)	0,23-0,27	6,8-7,1	10-12
—	170-229	—	0,8-1,5(0,45)	0,23-0,27	7,0-7,2	10-12
—	180-207	0,9	0,85(0,45)	0,23-0,27	7,2-7,3	10-12
—	187-217	0,9	1,1 (0,48)	0,23-0,27	7,25-7,4	10-12
1,0-1,2	170-241	1,0	1,2 (0,52)	0,23-0,27	7,3-7,4	10-12
1,0-1,2	187-255	1,0	1,3(0,56)	0,23-0,27	7,3-7,4	10-12
1,1-1,3	197-269	1,1	1,45(0,64)	0,23-0,27	7,3-7,4	10-12

Matériau	Limite de résistance, kgf/mm²,	Limite d'écoulement, de proportionnalité, kgf/mm²	Limite d'endurance, kgf/mm²
СЧ38-60	$\sigma_{tr} = 38$ $\sigma_{comp} = 140$ $\sigma_{fl} = 60$ $\tau_{tor} = 46$	$\sigma_{éc.tr} = 0{,}85\sigma_{tr}$	$\sigma_{-1} = 15$ $\tau_{-1} = 11{,}5$
Fonte blanche	$\sigma_{tr} = 10\text{-}20$ $\sigma_{comp} = 70\text{-}140$ $\sigma_{fl} = 30\text{-}50$	—	—
Fonte résistant			
GOST 2176-43			
X 28	$\sigma_{tr} = 35$ $\sigma_{fl} = 55$	—	—
X 34	$\sigma_{tr} = 40$ $\sigma_{fl} = 50$	—	—
Fonte			
GOST 1215-59			
Fonte ferritique			
КЧ30-6	$\sigma_{tr} > 30$ $\sigma_{fl} = 49$ $\tau_{tor} = 34$	$\sigma_{éc.tr} = 19$ $\sigma_{éc.comp} = 21$ $\sigma_{éc.fl} = 31$	$\sigma_{-1tr} = 7$ $\sigma_{-1} = 12$ $\tau_{-1} = 11$
КЧ33-8	$\sigma_{tr} > 33$ $\sigma_{fl} = 53$ $\tau_{tor} = 34{,}5$	$\sigma_{éc.tr} = 21$ $\sigma_{éc.comp} = 23$ $\sigma_{éc.fl} = 33$	$\sigma_{-1tr} = 8$ $\sigma_{-1} = 13$ $\tau_{-1} = 12$
КЧ35-10	$\sigma_{tr} > 35$ $\sigma_{fl} = 57$ $\tau_{tor} = 35$	$\sigma_{éc.tr} = 22$ $\sigma_{éc.comp} = 24$ $\sigma_{éc.fl} = 34$	$\sigma_{-1tr} = 8$ $\sigma_{-1} = 14$ $\tau_{-1} = 13$
КЧ37-12	$\sigma_{tr} > 37$ $\sigma_{fl} = 58$ $\tau_{tor} = 37$	$\sigma_{éc.tr} = 23$ $\sigma_{éc.comp} = 25$ $\sigma_{éc.fl} = 35$	$\sigma_{-1tr} = 8$ $\sigma_{-1} = 14$ $\tau_{-1} = 13$
Fonte perlitique			
КЧ45-6	$\sigma_{tr} > 45$	—	—
КЧ50-4	$\sigma_{tr} > 50$ $\sigma_{fl} = 72$ $\tau_{tor} = 52$	$\sigma_{éc.tr} = 27$ $\sigma_{éc.comp} = 30$ $\sigma_{éc.fl} = 42$	$\sigma_{-1tr} = 11$ $\sigma_{-1} = 18$ $\tau_{-1} = 16$
КЧ56-4	$\sigma_{tr} > 56$	—	—
КЧ60-3	$\sigma_{tr} > 60$	—	—
КЧ63-2	$\sigma_{tr} > 63$	—	—

Allongement relatif (rétrécissement relatif), %	Dureté Brunell, kgf/mm^2	Résilience, kgf/cm^2	Module d'élasticité $E(G)$, $\times 10^{-4} kgf/mm^2$	Coefficient de Poisson	Poids spécifique, gf/cm^3	Coefficient de dilatation linéaire, $\times 10^6$ 1/degré
1,2-1,4	207-269	1,0	1,6(0,7)	0,23-0,27	7,4-7,6	10-12
—	300-700	0,1-0,5	1,6-1,8	—	7,5±0,2	8±2
à chaud						
—	220-270	—	—	—	—	—
—	250-320	—	—	—	—	—
malléable						
>6 (7)	<163	1,2	1,55 (0,63)	0,23	7,2	10,5
>8 (9)	<149	1,3	1,6 (0,64)	0,25	7,21	10,3
>10 (11)	<149	1,4	1,66 (0,65)	0,27	7,22	10,2
>12(13)	<149	1,6	1,98(0,73)	0,36	7,24	10
>6	<241	—	—	—	—	—
>4 (3,5)	<241	0,8	1,74(0,68)	0,28	7,3	10
>4	<269	—	—	—	—	—
>3	<269	—	—	—	—	—
>2	<269	—	—	—	—	—

Matériau	Limite de résistance, kgf/mm²	Limite d'écoulement, de proportionnalité, kgf/mm²	Limite d'endurance, kgf/mm²
			Fonte à graphite
GOST 7293-54			
ВЧ 45-0	σ_{tr} = 45-50 σ_{comp} = 150-160 σ_{fl} = 65-75 τ_{tor} = 45-50	$\sigma_{éc.tr}$ = 35-40	σ_{-1} = 18-20
ВЧ 50-1,5	σ_{tr} = 50-60 σ_{comp} = 170-180 σ_{fl} = 90-100 τ_{tor} = 50-55	$\sigma_{éc.tr}$ = 40-50	σ_{-1} = 20-22 τ_{-1} = 17-21
ВЧ 60-2	σ_{tr} = 60-70 σ_{comp} = 200-210 σ_{fl} = 105-110 τ_{tor} = 60-75	$\sigma_{éc.tr}$ = 42-55	σ_{-1} = 17-23 τ_{-1} = 15-16
ВЧ 45-5	σ_{tr} = 45-55 σ_{comp} = 180-200 σ_{fl} = 65-75 τ_{tor} = 40-45	$\sigma_{éc.tr}$ = 32-42	σ_{-1} = 18-20
ВЧ 40-10	σ_{tr} = 40-55 σ_{comp} = 200-220 σ_{fl} = 60-70	$\sigma_{éc.tr}$ = 30-40	σ_{-1} = 25-28 τ_{-1} = 19,8
			Métaux
			Alliages d'aluminium,
GOST 4784-65			
АМцМ	σ_{tr} = 13 τ_{cis} = 8	$\sigma_{éc.tr}$ = 5	σ_{-1} = 5*
АМг2М	σ_{tr} = 19 τ_{cis} = 12,5	$\sigma_{éc.tr}$ = 8	σ_{-1} = 12*
АМг2П	σ_{tr} = 25 τ_{cis} = 15	$\sigma_{éc.tr}$ = 21	σ_{-1} = 12,5*
АМг6	σ_{tr} = 32	$\sigma_{éc.tr}$ = 17	—
АМг6М	σ_{tr} = 30	$\sigma_{éc.tr}$ = 15	—
Д1(О)	σ_{tr} = 21	$\sigma_{éc.tr}$ = 11	σ_{-1} = 7,5*
Д1П(З et ЕС)	σ_{tr} = 41 τ_{cis} = 27	$\sigma_{éc.tr}$ = 25	σ_{-1} = 12,5*
Д6 { О)	σ_{tr} = 22	$\sigma_{éc.tr}$ = 11	—
Д6 { З et ЕС)	σ_{tr} = 46	$\sigma_{éc.tr}$ = 30	—

Allongement relatif (rétrécissement relatif), %	Dureté Brunell, kgf/mm²	Résilience, kgfm/cm²	Module d'élasticité $E(G)$, $\times 10^{-4}$ kgf/mm²	Coefficient de Poisson	Poids spécifique, gf/cm³	Coefficient de dilatation linéaire, $\times 10^6$ 1/degré
globulaire						
0,4-1,4	207-269	0,5-1,5	1,3-1,6(0,7)	–	7-7,5	10,6-11,4
1.5-3,0	207-255	1,5-3	1,3(0,775)	–	7-7,5	10,6-11,4
2-3	255-285	1,5-3	1,8(0,8)	–	7-7,5	10,6-11,4
5-10	173-207	2,5-8	1,3(0,7)	–	7-7,5	10,6-11,4
10-20	156-179	5-7	1,6(0,75)	–	7-7,5	10,6-11,4
non-ferreux						
de corroyage						
23 (70)	30	–	0,71 (0,27)	0,3	2,73	24
23 (64)	45	–	0,71 (0,27)	0,3	2,67	23,8
6	60	–	0,71 (0,27)	0,3	2,67	23,8
24	–	–	0,7	–	2,64	24,7
18	–	–	0,71 (0,27)	0,3	2,64	24,7
18 (58)	45	–	0,71 (0,27)	0,31	2,8	22,9
15 (30)	115	3	0,71 (0,27)	0,31	2,8	22,9
15 (50)	50	–	0,71	0,31	2,8	22
–	105	–	0,71	0,31	2,8	22

Matériau	Limite de résistance, kgf/mm²	Limite d'écoulement, de proportionnalité, kgf/mm²	Limite d'endurance, kgf/mm²
Д16, Д16П			
tôles plaquées (3 et EC)	$\sigma_{tr} = 44$	$\sigma_{\text{éc.tr}} = 29$	—
mi-fabriqués (3 et EC)	$\sigma_{tr} = 52$ $\tau_{cis} = 21\text{-}30$	$\sigma_{\text{éc.tr}} = 38$	$\sigma_{-1} = 14^*$
mi-fabriqués (O)	$\sigma_{tr} = 22$	$\sigma_{\text{éc.tr}} = 10$	$\sigma_{-1} = 9^*$
mi-fabriqués (C3)	$\sigma_{tr} = 43$	$\sigma_{\text{éc.tr}} = 23$	—
tôles plaquées (3 et ПС)	$\sigma_{tr} = 46$	$\sigma_{\text{éc.tr}} = 41$	—
profilés (3 et ПС)	$\sigma_{tr} = 42\text{-}50$	$\sigma_{\text{éc.tr}} = 40\text{-}44$	—
АК4-1	$\sigma_{tr} = 43$	$\sigma_{\text{éc.tr}} = 28$	$\sigma_{-1} = 13^{**}$
ВД17	$\sigma_{tr} = 49$	$\sigma_{\text{éc.tr}} = 33$	$\sigma_{-1} = 16{,}5^*$

Alliages d'aluminium,

GOST 2685-63 **АЛ1**			
coulé en sable	$\sigma_{tr} = 20$ $\tau_{cis} = 17$	$\sigma_{\text{éc.tr}} = 17$	$\sigma_{-1} = 5{,}6^*$
traitement thermique T5	$\sigma_{tr} = 26$ $\tau_{cis} = 22$	$\sigma_{\text{éc.tr}} = 22$	$\sigma_{-1} = 5{,}6^*$
traitement thermique T7	$\sigma_{tr} = 22$	$\sigma_{\text{éc.tr}} = 18$	—
coulé en coquille	$\sigma_{tr} = 30$	$\sigma_{\text{éc.tr}} = 26$	$\sigma_{-1} = 6{,}5^*$
(traitement thermique T5)	$\tau_{cis} = 22$		
АЛ2			
coulé en sable	$\sigma_{tr} = 18$ $\tau_{cis} = 13$	$\sigma_{\text{éc.tr}} = 8$	$\sigma_{-1} = 5{,}5^{**}$
coulé en moule métallique	$\sigma_{tr} = 22$	$\sigma_{\text{éc.tr}} = 9$	$\sigma_{-1} = 7^{**}$
coulé sous pression	$\sigma_{tr} = 22$	$\sigma_{\text{éc.tr}} = 12$	—

Suite

Allongement relatif (rétrécissement relatif), %	Dureté Brunell, kgf/mm²	Résilience, kgfm/cm²	Module d'élasticité $E(G)$, $\times 10^{-4}$ kgf/mm²	Coefficient de Poisson	Poids spécifique, gf/cm³	Coefficient de dilatation linéaire, $\times 10^{6}$ 1/degré
18 (30)	105	—				
11 (15)	131	—				
18 (30)	42	—	0,71(0,27)	0,31	2,78	22,7
13 (15)	—	—				
6	—	—				
7	—	—				
13 (26)	120	—	0,72(0,27)	0,33	2,8	19,6-24,8
20	115	—	0,71(0,27)	0,31	2,75	23,6-26,9
de fonderie						
1,0	80	—				
0,5	100	0,3	0,72(0,27)	0,33	2,75	22,3-24,4
1,2	90	—				
0,5	120	—				
6	50	—				
5	55	0,8	0,7-0,72 (0,27)	0,33	2,65	21,1-23,3
1,8	—	—				

Matériau	Limite de résistance, kgf/mm²	Limite d'écoulement, de proportionnalité, kgf/mm²	Limite d'endurance, kgf/mm²
АЛ3			
coulé en sable	$\sigma_{tr} = 17$	$\sigma_{éc.tr} = 12$	—
traitement thermique T5	$\sigma_{tr} = 20$	$\sigma_{éc.tr} = 17$	—
coulé en moule métallique	$\sigma_{tr} = 22$	$\sigma_{éc.tr} = 12$	—
traitement thermique T5	$\sigma_{tr} = 27$	$\sigma_{éc.tr} = 22$	—
АЛ8(traitement thermique T4)	$\sigma_{tr} = 30$	$\sigma_{éc.tr} = 17$	$\sigma_{-1} = 5^*$
coulé en sable	$\tau_{cis} = 23$		
coulé en moule métallique	$\sigma_{tr} = 33$	$\sigma_{éc.tr} = 18$	—
АЛ9			
coulé en sable	$\sigma_{tr} = 20$	$\sigma_{éc.tr} = 11$	$\sigma_{-1} = 4,5^*$
(traitement thermique T4)	$\tau_{cis} = 15$		
coulé en sable	$\sigma_{tr} = 24$	$\sigma_{éc.tr} = 21$	—
(traitement thermique T6)	$\tau_{cis} = 12$		
coulé en moule métallique	$\sigma_{tr} = 23$	—	—
(traitement thermique T6)			
АЛ11			
(traitement thermique T2)	$\sigma_{tr} = 22$	$\sigma_{éc.tr} = 15$	$\sigma_{-1} = 6,5$
АЛ13			
coulé en sable	$\sigma_{tr} = 17$ $\tau_{cis} = 14$	$\sigma_{éc.tr} = 9$	$\sigma_{-1} = 4^*$
coulé en moule métallique	$\sigma_{tr} = 20$	$\sigma_{éc.tr} = 10$	—

Allongement relatif (rétrécissement relatif), %	Dureté Brunell, kgf/mm²	Résilience, kgfm/cm²	Module d'élasticité $E(G)$, $\times 10^{-4}$ kgf/mm²	Coefficient de Poisson	Poids spécifique, gf/cm³	Coefficient de dilatation linéaire, $\times 10^{6}$ 1/degré
2	70	—				
3	75	—				
4	70	0,22	0,7-0,72 (0,27)	0,33	2,7	22-24
3	80	0,45				
12	75	1	0,7-0,72 (0,27)	0,33	2,55	24,5-25,6
15	80	—				
6	55	—				
2	75	—	0,7-0,72 (0,27)	0,33	2,66	23-24,5
5	70	—				
2	80	—	—	—	2,94	24,4
3	65	0,5	0,7-0,72 (0,27)	0,33	2,6	20
5	70	—				

Matériau	Limite de résistance, kgf/mm²	Limite d'écoulement, de proportionnalité, kgf/mm²	Limite d'endurance, kgf/mm²
АЛ15В			
coulé en sable	$\sigma_{tr} = 15$	—	—
traitement thermique T5	$\sigma_{tr} = 20$	—	—
coulé en moule métallique	$\sigma_{tr} = 18$	—	—
traitement thermique T5	$\sigma_{tr} = 22$	—	—
АЛ19 (coulé en sable)			
traitement thermique T4	$\sigma_{tr} = 32$	$\sigma_{éc.tr} = 16$	$\sigma_{-1} = 7$**
traitement thermique T5	$\sigma_{tr} = 37$	$\sigma_{éc.tr} = 22$	$\sigma_{-1} = 7$*
			Titane et
ВТ1	$\sigma_{tr} = 61$	$\sigma_{éc.tr} = 47$	$\sigma_{-1} = 26$
ОТ4	$\sigma_{tr} = 70\text{-}85$	$\sigma_{éc.tr} = 55\text{-}65$	—
ВТ8	$\sigma_{tr} = 105\text{-}118$ $\tau_{cis} = 65\text{-}70$	$\sigma_{éc.tr} = 95\text{-}110$ $\sigma_{pr} = 75\text{-}85$	$\sigma_{-1} = 50$
ВТ3-1	$\sigma_{tr} = 95\text{-}120$ $\tau_{cis} > 65$	$\sigma_{éc.tr} = 85\text{-}110$ $\sigma_{pr} = 70\text{-}85$	$\sigma_{-1} = 48$
ВТ14	$\sigma_{tr} = 95\text{-}120$	$\sigma_{éc.tr} = 85\text{-}110$	—
			Alliages *Lai*
GOST 1019-47 Л68			
doux	$\sigma_{tr} = 32$ $\tau_{cis} = 20$	$\sigma_{0,1} = 9{,}1$	$\sigma_{-1} = 12$
dur	$\sigma_{tr} = 66$	$\sigma_{0,1} = 52$	$\sigma_{-1} = 15$
ЛА77-2			
doux	$\sigma_{tr} = 40$	$\sigma_{éc.tr} = 14$	—
dur	$\sigma_{tr} = 65$	—	—

Allongement relatif (rétrécissement relatif), %	Dureté Brunell, kgf/mm²	Résilience, kgfm/cm²	Module d'élasticité $E(G)$, $\times 10^{-4}$ kgf/mm²	Coefficient de Poisson	Poids spécifique, gf/cm³	Coefficient de dilatation linéaire, $\times 10^{6}$ 1/degré
—	70	—				
—	80	—	0,7-0,72 (0,27)	0,33	2,7	22-24
0,5	70	—				
0,5	85	—				
9	90	—	0,7-0,72 (0,27)	0,33	2,78	19,5-21,9
5	100	—				
ses alliages						
20-30 (>45)	150-180	>7	1,121(0,411)	0,32	4,5	8
10-40 (25-55)	229-302	3,5-6,5	1,1(0,4)-1,2	—	4,55	8-9,8
9-15 (30-55)	310-350	3-6	1,1(0,425)	0,3	4,48	8,3-9,1
10-16 (25-40)	—	3-6	1,15(0,43)	0,3	4,5	8,6
6-10 (25-35)	255-388	2,5-5	1,15	—	4,52	8-8,7
de cuivre *tons*						
55 (70)	55	17	1,1	—	8,6	19
3	150	—	1,15	—	—	—
55	60	20	1,05	—	8,6	18,3
12	170	—	—	—	—	—

Matériau	Limite de résistance, kgf/mm²	Limite d'écoulement, de proportionnalité, kgf/mm²	Limite d'endurance, kgf/mm²
ЛМц 58-2			
doux	$\sigma_{tr} = 40$	$\sigma_{éc.tr} = 15{,}6$	—
dur	$\sigma_{tr} = 70$	—	—
ЛС59-1			
doux	$\sigma_{tr} = 40$ $\tau_{cis} = 26$	$\sigma_{éc.tr} = 14$	—
dur	$\sigma_{tr} = 65$	$\sigma_{éc.tr} = 45$	$\sigma_{-1} = 16$
ЛК80-3			
doux	$\sigma_{tr} = 30$	$\sigma_{éc.tr} = 20$	—
dur	$\sigma_{tr} = 60$	—	—
			Bronzes à
Бр. О-10	$\sigma_{tr} = 25$	—	—
Бр. ОЦ8-4	$\sigma_{tr} = 20$	$\sigma_{éc.tr} = 4\text{-}5$	—
GOST 613-65 Бр. ОЦС 6-6-3			
coulée en sable	$\sigma_{tr} = 15$	$\sigma_{éc.tr} = 11$	—
coulée en coquille	$\sigma_{tr} = 18$ $\tau_{cis} = 22$	$\sigma_{éc.tr} = 8\text{-}10$ $\sigma_{pr} = 5$	—
Бр. ОФ10-1			
coulée en sable	$\sigma_{tr} = 20\text{-}30$	$\sigma_{éc.tr} = 14$ $\sigma_{pr} = 8\text{-}9$	—
coulée en coquille	$\sigma_{tr} = 25\text{-}35$ $\tau_{cis} = 34$	$\sigma_{éc.tr} = 20$ $\sigma_{pr} = 13\text{-}14$	—
			Bronzes à
GOST 493-54 Бр. А5			
coulée en coquille	$\sigma_{tr} = 28$	$\sigma_{éc.tr} = 7$	—
de corroyage, doux	$\sigma_{tr} = 38$	$\sigma_{éc.tr} = 16$	—
de corroyage, dur	$\sigma_{tr} = 80$	$\sigma_{éc.tr} = 50$ $\sigma_{pr} = 48$	$\sigma_{-1} = 13{,}4$**
Бр. АМц 9-2			
coulée en coquille	$\sigma_{tr} = 40$	$\sigma_{éc.tr} = 20$ $\sigma_{pr} = 11$	—
de corroyage, doux	$\sigma_{tr} = 40$	$\sigma_{éc.tr} = 30$	—

Suite

Allongement relatif (rétrécissement relatif), %	Dureté Brunell, kgf/mm²	Résilience, kgfm/cm²	Module d'élasticité $E(G)$, $\times 10^{-4}$ kgf/mm²	Coefficient de Poisson	Poids spécifique, gf/cm³	Coefficient de dilatation linéaire, $\times 10^{6}$ 1/degré
40	85	12	1,0	—	8,4	21,2
10	175	—	—	—	—	—
45 (44)	90	2,6-5	1,05 (0,35)	—	8,5	20,6
16	140	—	—	—	—	—
58	100	12	0,98	—	8,5	17
4	180	—	—	—	—	—
l'étain						
11	80	—	3	—	—	—
4	75	—	—	—	—	—
6	60	—	—	—	8,82	17,1-18,2
4 (6-10)	60	2-3	0,9	—	—	—
3 (3)	80-100	0,6	0,754	—	8,58	17-22
7-10(10)	90-120	0,9	1,03	—	8,76	17
l'aluminium						
55 (48)	65	16	—	—	—	—
65 (70)	60	11	1	—	8,2	15,6
4	200	—	1,1	—	—	—
20 (25-27)	90-120	7	0,92	—	—	—
25	110-130	—	1,05	—	—	—

Matériau	Limite de résistance, kgf/mm²	Limite d'écoulement, de proportionnalité, kgf/mm²	Limite d'endurance, kgf/mm²
de corroyage, dur	σ_{tr} = 60	$\sigma_{éc.tr}$ = 50	σ_{-1} = 21****
Бр.АЖМц10-3-1,5	σ_{tr} = 56	$\sigma_{éc.tr}$ = 21	—
coulée en coquille	τ_{cis} = 38	σ_{pr} = 17	
de corroyage, doux	σ_{tr} = 61	$\sigma_{éc.tr}$ = 19	—
de corroyage, dur	σ_{tr} = 60-70	—	σ_{-1} = 28****
Бр.АЖС7-1,5-1,5	σ_{tr} = 50	—	σ_{-1} = 21****
Бр. АЖ9-4			
coulée en coquille	σ_{tr} = 55	$\sigma_{éc.tr}$ = 20 σ_{pr} = 18	—
de corroyage, doux	σ_{tr} = 60	$\sigma_{éc.tr}$ = 22 σ_{pr} = 12,7	—
de corroyage, dur	σ_{tr} = 55	$\sigma_{éc.tr}$ = 35	σ_{-1} = 18,5****
			Bronze au
GOST 493-54 Бр. КМц3-1			
état doux	σ_{tr} = 35-40	$\sigma_{éc.tr}$ = 10-20	σ_{-1} = 11-16
état solide	σ_{tr} = 65-75	$\sigma_{éc.tr}$ = 10-20	—
			Alliages de corroyage à
МА1			
tôles	σ_{tr} = 21	$\sigma_{éc.tr}$ = 12	σ_{-1} = 7,5**
barres	σ_{tr} = 24 τ_{tr} = 19	$\sigma_{éc.tr}$ = 14	σ_{-1} = 7,5**
МА3	τ_{cis} = 13		
bandes	σ_{tr} = 29 τ_{cis} = 14	$\sigma_{éc.tr}$ = 17	—
barres	σ_{tr} = 28	$\sigma_{éc.tr}$ = 22	—
ВМ65-1			
barres	σ_{tr} = 35	$\sigma_{éc.tr}$ = 30 σ_{pr} = 14,5	—
barres (ПС)	σ_{tr} = 33,5 τ_{cis} = 16	$\sigma_{éc.tr}$ = 28	σ_{-1} = 15**
bandes	σ_{tr} = 34,5	$\sigma_{éc.tr}$ = 29 σ_{pr} = 13	—
profilés	σ_{tr} = 34,5	$\sigma_{éc.tr}$ = 29	—
pièces forgées	σ_{tr} = 31	$\sigma_{éc.tr}$ = 25	—
estampages	σ_{tr} = 32	$\sigma_{éc.tr}$ = 26	—

Allongement relatif (rétrécissement relatif), %	Dureté Brunell, kgf/mm²	Résilience, kgfm/cm²	Module d'élasticité $E(G)$, $\times 10^{-4}$ kgf/mm²	Coefficient de Poisson	Poids spécifique, gf/cm³	Coefficient de dilatation linéaire, $\times 10^{6}$ 1/degré
4-5(55)	160-180	—	—	—	7,6	17-20
22 (25-27)	130	6-8	1	—	—	—
32 (55)	125-140	—	1,05	—	—	—
9-12	160-200	—	—	—	7,55	16-20
18	—	—	—	—	—	—
10-20 (25-30)	120-140	6,3	1,12			
40 (33)	110	8	1,12	0,29	7,5	16,2-17,1
5	160-200	—	1,16			
silicium						
25-45	70-90	13-17	1,04	—	8,4	15,8-20
5-10	170-190					
base de magnésium						
8	45	0,5	0,4	0,34	1,76	22,3-32
4 (6)	45	0,6	0,4			
15 (23)	—	1	0,43	0,34	1,8	26,1-31,2
12	60	—	0,43			
9 (24)	60	—				
9 (24)	—	0,9				
10 (25)	—	—	0,43	0,34	1,8	20,9-22,6
10	—	—				
12	—	—				
14	55	—				

Matériau	Limite de résistance, kgf/mm²	Limite d'écoulement, de proportionnalité, kgf/mm²	Limite d'endurance, kgf/mm²
		Alliages de fonderie à base de	
МЛ6			
coulé	$\sigma_{tr} = 16$ $\tau_{cis} = 14$	$\sigma_{éc.tr} = 11$	$\sigma_{-1} = 8{,}5^{**}$
traitement thermique T4	$\sigma_{tr} = 25$ $\tau_{cis} = 15$	$\sigma_{éc.tr} = 10$	$\sigma_{-1} = 9{,}5^{**}$
traitement thermique T6	$\sigma_{tr} = 26$ $\tau_{cis} = 16$	$\sigma_{éc.tr} = 14$	$\sigma_{-1} = 8{,}5^{**}$
Plomb	$\sigma_{tr} = 1{,}5\text{-}1{,}8$	$\sigma_{éc.tr} = 0{,}5\text{-}1$	$\sigma_{-1} = 0{,}42^{***}$
GOST 3778-65	(de corroyage et O)		
Zinc GOST 3640-47	$\sigma_{tr} = 6{,}4$	$\sigma_{éc.tr} = 1{,}0$	—
Nickel	$\sigma_{tr} = 40\text{-}55$	$\sigma_{éc.tr} = 6\text{-}20$	—
GOST 849-56	(état doux) $\sigma_{tr} = 50\text{-}100$ (état solide)	(état doux) $\sigma_{éc.tr} = 28\text{-}90$ (état solide)	—
Cupronickel МНЖМц30-0,8-1 (МН 70-30)			
GOST 492-52			
état doux	$\sigma_{tr} = 35\text{-}45$	$\sigma_{éc.tr} = 14$	—
état solide	$\sigma_{tr} = 55\text{-}65$	$\sigma_{éc.tr} = 54$	—
Argentan МНЦ 15-20			
GOST 492-52			
état doux	$\sigma_{tr} = 40\text{-}45$	$\sigma_{éc.tr} = 14$	$\sigma_{-1} = 12\text{-}14$
état solide	$\sigma_{tr} = 60\text{-}72$	$\sigma_{éc.tr} = 59$	—

Allongement relatif (rétrécissement relatif), %	Dureté Brunell, kgf/mm²	Résilience, kgfm/cm²	Module d'élasticité *E*(*G*), ×10⁻⁶ kgf/mm²	Coefficient de Poisson	Poids spécifique, gf/cm³	Coefficient de dilatation linéaire, ×10⁶ 1/degré
magnésium						
1,5(2,5)	55	0,2	(0,16)	—		
5 (12)	60	0,3	0,42(0,165)	0,33	1,81	26,1-27,7
1 (3)	80	0,15	(0,165)	0,33		
35-50 (90-100) (coulé) 60-70 (de corroyage)	3,8-4 (coulé)	0,6-2,3 (O)	0,15-0,18	—	11,34	28
20 (50)	20	—	0,53	—	7,133	39,7
30-50 (état doux)	90-120 (O)	—	1,8-2,27 (0,73)	—	8,9	13,3-16,3
2-15 (état solide)	125-220 (écroui)	—	—	—		
40-50	70	—	1,54	—	8,9	16
3-5	190	—				
40-50	70	—	1,26	—	8,7	16,6
2-3	160	—				

Matériau	Limite de résistance, kgf/mm²	Limite d'écoulement, de proportionnalité, kgf/mm²	Limite d'endurance, kgf/mm²
Monel НМЖМц 28-2,5-1,5 GOST 492-52			
état doux	$\sigma_{tr} = 50\text{-}60$	$\sigma_{éc.tr} = 20$	$\sigma_{-1} = 17$
état solide	$\sigma_{tr} = 70\text{-}85$	$\sigma_{éc.tr} = 65\text{-}75$	$\sigma_{-1} = 26$

Matières

Plastiques verre-résine GOST 10087-62, GOST 10292-62, GOST 2910-67, GOST 10316-62			
à base d'étoffe	$\sigma_{tr} = 26\text{-}40$ $\sigma_{comp} = 10\text{-}30$ $\sigma_{fl} = 13\text{-}15$	$\sigma_{pr} = 12{,}2\text{-}26$	$\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{tr}} = 0{,}22\text{-}0{,}25$
à base de fils orientés dans deux directions orthogonales	$\sigma_{tr} = 30\text{-}50$ $\sigma_{comp} = 23\text{-}46$ $\sigma_{fl} = 40\text{-}42$	—	$\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{tr}} = 0{,}25\text{-}0{,}28$
Textolites (à base de tissu de coton) GOST 5-52, GOST 2910-67, GOST 5385-50	$\sigma_{tr} = 4{,}5\text{-}11$ $\sigma_{comp} = 12\text{-}25$ $\sigma_{fl} = 7{,}5\text{-}16$ $\tau_{tr} = 9\text{-}10$	$\sigma_{éc.tr} = 7\text{-}8$	$\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{tr}} = 0{,}25\text{-}0{,}3$ $\sigma_{-1tr} = 2$
Plastiques de bois GOST 8697-58	$\sigma_{tr} = 14\text{-}30$ $\sigma_{comp} = 12\text{-}18{,}5$ $\sigma_{fl} = 16{,}5\text{-}28$	—	$\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{tr}} = 0{,}25\text{-}0{,}3$
Carton bakélisé (à base de papiers en sulfate) GOST 2718-66	$\sigma_{tr} = 6\text{-}10$ $\sigma_{fl} = 4\text{-}14$	—	$\sigma_{-1tr} = 5{,}8$ $\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{tr}} = 0{,}2\text{-}0{,}3$ $\sigma_{-1} = 3{,}5\text{-}4{,}9$

Allongement relatif (rétrécissement relatif), %	Dureté Brunell, kgf/mm^2	Résilience, $kgfm/cm^2$	Module d'élasticité $E(G)$, $\times 10^{-4} kgf/mm^2$	Coefficient de Poisson	Poids spécifique, gf/cm^3	Coefficient de dilatation linéaire, $\times 10^6$ 1/degré
30-50 (65)	110-140	—	1,82	—	8,8	14-15
3-5 (50)	140-120	—				
plastiques						
—	27-38	0,5-5,25	0,18-0,22 (0,035-0,04)	0,035-0,622	1,4-1,85	0,45-8,3
—	28-52	0,5-5,25	0,24-0,35	0,035-0,622	1,7-1,9	0,45-8,3
—	30	0,35	0,04-0,1 (0,25)	—	1,3-1,45	3,3-4,1
—	18-20	0,17-0,8	0,12-0,34	—	1,2-1,4	—
—	25-30	$(8-20)\times 10^{-2}$	0,1-0,18 (0,008-0,025)	—	1,3-1,4	20

Matériau	Limite de résistance, kgf/mm²	Limite d'écoulement, de proportionnalité, kgf/mm²	Limite d'endurance, kgf/mm²
Fibre vulcanisée (à base de papiers spécialisés)	σ_{tr} = 5-7 σ_{comp} = 8-14 σ_{fl} = 6-9,5	—	$\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{tr}}$ = 0,2-0,3
GOST 6910-54			
Voloknites (matériaux de remplissage: débourrures de coton, fibre d'amiante, fibre de verre)	σ_{tr} = 3-13 σ_{comp} = 10-15 σ_{fl} = 4-13	—	$\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{tr}}$ = 0,25-0,3
Poudres à mouler thermodurcissables (matériaux de remplissage: poudre de bois, farine de quartz, mica)	σ_{tr} = 2,5-6,9 σ_{comp} = 7-30 σ_{fl} = 4,5-10	—	$\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{tr}}$ = 0,3-0,4
{GOST 5689-66, GOST 9359-66			
Verre organique (à base de polymères et de copolymères d'acide méthacrylique)	σ_{tr} = 5-10,8 σ_{comp} = 7-12 σ_{fl} = 8-17,6	—	$\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{tr}}$ = 0,1-0,16
{GOST 10667-65, GOST 9784-67			
Thermoplastes polymères linéaires à différent degré de cristallisation	σ_{tr} = 1,2-8 σ_{fl} = 1,2-10	—	$\frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{tr}}$ = 0,15-0,2
non-armés	σ_{tr} = 0,04-0,42 σ_{comp} = 0,017-0,45 σ_{fl} = 0,07-0,5	—	—
Ftorlon-4 (plastique fluoré-4)	σ_{tr} = 1,4-2,5 σ_{comp} = 1,2-2	—	—
GOST 10007-62	σ_{fl} = 1,1-1,4		
Capron A, Б В	σ_{tr} = 6 σ_{comp} = 7,5 σ_{fl} = 9	—	—

Allongement relatif (rétrécissement relatif), %	Dureté Brunell, kgf/mm²	Résilience, kgfm/cm²	Module d'élasticité $E(G)$, $\times 10^{-4}$ kgf/mm²	Coefficient de Poisson	Poids spécifique, gf/cm³	Coefficient de dilatation linéaire, $\times 10^{6}$ 1/degré
—	10	—	(0,07)	—	1,1-1,25	—
—	18-35	(15-65) $\times$ $\times 10^{-2}$	0,05-0,118	—	1,35-1,9	—
—	10-60	0,03-0,8	—	—	1,3-2,7	(0,22-7) $\times$ 10
2,5-23,2	12-25	(4-33) $\times 10^{-2}$	0,027-0,041	—	1,18-1,2	46-120
—	3-16	—	0,0015-0,007	—	0,92-2,1	—
1,5-14	—	(0,16-2,2) $\times$ $\times 10^{-2}$	0,00037-0,002 (0,00015-0,00019)	—	0,02-0,6	(3,5-7,8) $\times$ $\times$ 10
300-350	3-6	—	0,0047--0,0085	—	2,19-2,35	(8-25) $\times$ 10
150-200	10-12	1,5-1,6	0,0144 (0,0045-0,0048)	—	1,1-1,14	(6-15) $\times$ 10

Matériau	Limite de résistance, kgf/mm²	Limite d'écoulement, de proportionnalité, kgf/mm²	Limite d'endurance, kgf/mm²
Résine polyamidique 68 GOST 10589-63	σ_{tr} = 5-6 σ_{comp} = 7-8,5 σ_{fl} = 7	—	—
Viniplaste GOST 9639-61	σ_{tr} = 4-6 σ_{comp} = 8-16 σ_{fl} = 8-12	—	—
Polyéthylène à haute densité (basse pression)	σ_{tr} = 2,2-4,5 σ_{comp} = 2,8-4 σ_{fl} = 2-3,8	—	—
Polystyrène en blocs GOST 9440-60	σ_{tr} = 3,5 σ_{comp} = 10 σ_{fl} = 9,5-10	—	—
			Autres
Glace	—	—	—
Caoutchouc naturel	σ_{tr} = 1,6-3,8	—	—
Verre	σ_{tr} = 3-9	—	—
GOST 10135-62	σ_{comp} = 50-200 σ_{fl} = 5-15	—	—
Basalte	σ_{comp} = 25-30	—	—
Granite	σ_{tr} = 0,3 σ_{comp} = 12-26	—	—
Calcaire	σ_{comp} = 5,0-15	—	—
Grès	σ_{tr} = 0,2 σ_{comp} = 4-1,5	— —	— —
Marbre	σ_{comp} = 10-18		
Maçonnerie en granite, calcaire, briques	σ_{tr} =0,02-0,05 σ_{comp} = 0,25-0,9	—	—
Béton	σ_{comp} = 0,5-4,8	—	—

Suite

Allongement relatif (rétrécissement relatif), %	Dureté Brunell, kgf/mm²	Résilience, kgfm/cm²	Module d'élasticité E (G), × 10^{-4} kgf/mm²	Coefficient de Poisson	Poids spécifique, gf/cm³	Coefficient de dilatation linéaire, × 10^{6} 1/degré
100	10-15	—	0,012	—	1,11	(10-12)×10
10-100	13-16	0,5-0,8	0,03-0,04	0,354	1,3-1,4	(6-7)×10
250-290	4,5-5,8	—	0,005-0,008	—	—	0,94-0,96
0,4-0,7	14-15	0,16-0,2	0,012-0,032	—	1,05-1,1	60
matériaux						
—	—	—	0,1 (0,25-0,03)	—	—	50,7
600-700	—	—	(0,6-1)×10^{-4}	0,47	0,91	(1,8-2,8)×10^{2}
—	—	0,015-0,025	0,48-0,85 (0,022-0,032)	0,18-0,32	2,2-8	0,5-15
—	—	—	—	—	2,7-3,3	—
—	—	—	0,49	—	2,5-2,8	—
—	—	—	0,42	—	1,8-2,6	—
—	—	—	0,18	—	2,1-2,8	—
—	—	—	0,56	—	2,5-2,8	—
—	—	—	{ 0,09-0,1 0,06 0,027-0,03	— — —	— — — }	4-7
—	—	—	0,146-0,232	0,16-0,18	—	10-14

Matériau	Limite de résistance, kgf/mm²	Limite d'écoulement, de proportionnalité, kgf/mm²	Limite d'endurance, kgf/mm²
Pin ordinaire (humidité: 15%)	σ_{tr} = 9,31-11,5 σ_{comp} = 4,27-4,66 σ_{fl} = 7,36-8,77 τ_{cis} = 0,62-0,73	σ_{pr} = 6,1 σ_{pr} = 3,1	—
Sapin ordinaire (humidité: 15%)	σ_{tr} = 10,7-12,2 σ_{comp} = 3,85-4,23 σ_{fl} = 7,74-7,22 τ_{cis} = 0,52-0,67	σ_{pr} = 5,6 σ_{pr} = 2,7	—
Bouleau ordinaire (humidité: 15%)	σ_{tr} = 16,1-21 σ_{comp} = 4,37-5,33 σ_{fl} = 9,67-10,84 τ_{cis} = 0,85-1,33	σ_{pr} = 3,4	—
Peuplier (humidité: 15%)	σ_{tr} = 8,69 σ_{comp} = 3,47 σ_{fl} = 6,09 τ_{cis} = 0,54-0,71	—	—
Acacia (humidité: 15%)	σ_{tr} = 16,9 σ_{comp} = 6,65 σ_{fl} = 13,92 τ_{cis} = 1,25-1,4	—	—
Hêtre caucasien (humidité: 15%)	σ_{tr} = 12,91 σ_{comp} = 4,74 σ_{fl} = 9,53 τ_{cis} = 0,99-1,31	σ_{pr} = 7 σ_{pr} = 2,9	—
Frêne (humidité: 15%)	σ_{tr} = 14,4-16,6 σ_{comp} = 4,5-5,1 σ_{fl} = 9,8-11,5 τ_{cis} = 1,14-1,38	σ_{pr} = 7,4 σ_{pr} = 2,7	—
Chêne (humidité: 15%)	σ_{tr} = 12,88 σ_{comp} = 5,2 σ_{fl} = 9,35 τ_{cis} = 0,85-1,25	σ_{pr} = 2,9 σ_{pr} = 7,4	—
Tilleul (humidité: 15%)	σ_{tr} = 11,58 σ_{comp} = 3,98 σ_{fl} = 7,8 τ_{cis} = 0,73-0,8	σ_{pr} = 4,5 σ_{pr} = 2	—

Allongement relatif (rétrécissement relatif), %	Dureté Brunell, kgf/mm²	Résilience, kgfm/cm²	Module d'élasticité $E(G)$, $\times 10^{-4}$ kgf/mm²	Coefficient de Poisson	Poids spécifique, gf/cm³	Coefficient de dilatation linéaire, $\times 10^{6}$ 1/degré
—	1,99-2,7	0,18-0,23	0,102-0,145 (0,0055)	0,49	0,48-0,54	Le long des fibres 3,7; à travers des fibres 63,6
—	1,82-2,52	0,18-0,19	0,11(0,0055)	0,44	0,46	Le long des fibres 5,4; à travers des fibres 34,1
—	2,98-3,92	0,41-0,54	0,15-0,184 (0,0065)	0,41	0,64-0,73	Le long des fibres 2-5
—	1,73-2,5	0,19	0,13 (0,0055)	—	0,46	Le long des fibres 2-5
—	6,19-8,81	0,92	0,09-0,16 (0,0045-0,0065)	—	0,75-0,81	Le long des fibres 2-5
—	3,79-5,71	0,39	0,127(0,0065)	0,58	0,68	Le long des fibres 2-5
—	5,34-7,32	0,3-0,43	0,124-0,15 (0,0065)	0,43	0,66-0,71	Le long des fibres 2-5
—	4,63-6,53	0,46	0,073-0,151 (0,0065)	0,43	0,76	Le long des fibres 4,9; à travers des fibres 54,4
—	1,56-2,34	0,28	0,09(0,0045)	—	0,51	Le long des fibres 5,4; à travers des fibres 44,1

Matériau	Limite de résistance, kgf/mm²	Limite d'écoulement, de proportionnalité, kgf/mm²	Limite d'endurance, kgf/mm²
Aune (humidité: 15%)	σ_{tr} = 9,63 σ_{comp} = 3,87 σ_{fl} = 7,1 τ_{cis} = 0,78-0,85	—	—
Erable (humidité: 15%)	σ_{comp} = 5,2 σ_{fl} = 10,53 τ_{cis} = 1,13-1,29	—	—

---

* Limite d'endurance obtenue pour 5×10^8 cycles.
** Limite d'endurance obtenue pour 2×10^7 cycles.
*** Limite d'endurance obtenue pour 10^7 cycles.
**** Limite d'endurance obtenue pour 10^6 cycles.
***** σ_{tr}, allongement et rétrécissement relatifs pour une température de 1650°C.
Etat du matériau: O, recuit; 3 récemment trempé; EC, durci dans des con-
Traitement thermique: T2, recuit; T4, trempe; T5, trempe et durcis-
complet; T7, trempe et revenu de stabilisation.

Suite

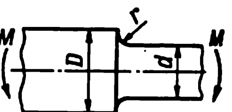
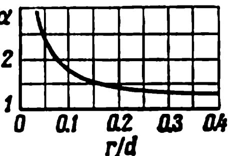
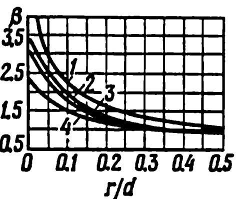
Allongement relatif (rétrécissement relatif), %	Dureté Brunell, kgf/mm²	Résilience, kgfm/cm²	Module d'élasticité $E(G)$, $\times 10^{-4}$ kgf/mm²	Coefficient de Poisson	Poids spécifique, gf/cm³	Coefficient de dilatation linéaire, $\times 10^{6}$ 1/degré
—	2,48-3,67	0,25	0,132(0,0055)	—	0,53	Le long des fibres 2-5
—	5,06-6,9	0,37	0,118(0,0055)	—	0,7	Le long des fibres 2-5

ditions naturelles; ИС, durci dans des conditions artificielles.
sement artificiel de courte durée (non complet); T6, trempe et durcissement artificiel

Indices de concentration et de sensibilité à la concentration des contraintes

Nº	Schéma de la mise en charge d'un élément de la structure ou d'une pièce	Indice théorique de concentration des contraintes α	Indice effectif de concentration des contraintes β	Indice de sensibilité à la concentration des contraintes $q = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}$
1.	Arbres, tiges à congé Traction-compression	Pour d = 30-50 mm et $\frac{D}{d} = 2$	Pour d = 30-50 mm et $\frac{D}{d} = 2$ Pour l'acier *1* — $\sigma_{бcr}$ = 120 kgf/mm² *2* — $\sigma_{бcr}$ = 80 kgf/mm² *3* — $\sigma_{бcr}$ = 40 kgf/mm²	Pour l'acier

$\sigma_{бcr}$, kgf/mm²	$\frac{r}{d}$	q
40	0,2-0,5	0,27-0,32
80	0,2-0,5	0,59-0,65
120	0,2-0,5	0,82-0,93

2.	Arbres, tiges à congé  Flexion	Pour d = 30-50mm et $\frac{D}{d} = 2$ 	Pour $\frac{D}{d} = 2$  Pour l'acier 1 — σ_{6cr} = 120 kgf/mm² 2 — σ_{6cr} = 100 kgf/mm² 3 — σ_{6cr} = 80 kgf/mm² 4 — σ_{6cr} = 40-60 kgf/mm² Pour $\frac{D}{d} < 2$ $\beta\nu = 1 + \nu(\beta - 1)$	

Suite

Nº	Schéma de la mise en charge d'un élément de la structure ou d'une pièce	Indice théorique de concentration des contraintes α	Indice effectif de concentration des contraintes β	Indice de sensibilité à la concentration des contraintes $q = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}$
2.			Diagramme pour la détermination des valeurs de ν (see chart and table below)	

Diagramme pour la détermination des valeurs de ν

Pour l'acier

$\frac{D}{d}$	$\frac{r}{d}$	$\sigma_{бcr}$, kgf/mm² <50	80	>100
1,05	0,02	1,70	1,88	2,05
	0,05	1,48	1,57	1,63
	0,10	1,28	1,33	1,36
	0,15	1,20	1,23	1,25
	0,20	1,16	1,20	1,22

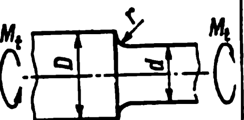
1,1	0,02	2,00	2,24	2,47
	0,05	1,64	1,70	1,75
	0,10	1,37	1,42	1,45
	0,15	1,27	1,31	1,34
	0,20	1,20	1,24	1,27
1,25	0,02	2,12	2,68	3,10
	0,05	1,81	1,97	2,10
	0,10	1,47	1,54	1,60
	0,15	1,35	1,40	1,43
	0,20	1,30	1,32	1,34
1,5	0,02	2,42	—	—
	0,05	1,91	2,06	2,20
	0,10	1,53	1,61	1,67
	0,15	1,38	1,44	1,48
	0,20	1,33	1,36	1,38

Pour la fonte

pour $d = 12$ mm, $\beta = 1,15$

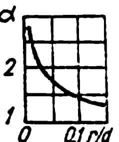
pour $d = 50$ mm, $\beta = 1,25$

3. Arbres, tiges à congé

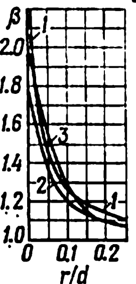


Torsion

Pour $d = 30\text{-}50$ mm et $\frac{D}{d} = 2$



Pour les aciers lorsque $\frac{D}{d} = 1,4$

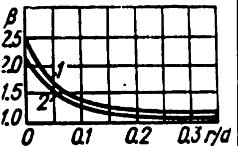


Suite

N°	Schéma de la mise en charge d'un élément de la structure ou d'une pièce	Indice théorique de concentration des contraintes α	Indice effectif de concentration des contraintes β	Indice de sensibilité à la concentration des contraintes $q = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}$
3.			$1 - \sigma_{\delta cr} = 120$ kgf/mm² $2 - \sigma_{\delta cr} = 60$ kgf/mm² $3 - \sigma_{\delta cr} = 40$ kgf/mm² Pour $\frac{D}{d} < 1{,}4$ $\beta_\nu = 1 + \nu(\beta - 1)$ Diagrammes pour la détermination des valeurs de ν ν; 0,8; 0,6; 0,4; 0,2; 0; 1,0; 1,1; 1,2; 1,3 D/d	Avec $\frac{D}{d} = 2$ pour les aciers (voir tableau ci-dessous)

$\sigma_{\delta cr}$, kgf/mm²	$\frac{r}{d}$	q
50	0,025	0,7
	0,05	0,65
	0,075	0,63
	0,1	0,6
	0,125	0,57
	0,15	0,5
120	0,025	0,82
	0,05	0,8
	0,075	0,8
	0,1	0,77
	0,125	0,77
	0,15	0,76

Pour $d = 30\text{-}50$ mm et $\frac{D}{d} = 2$



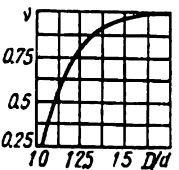
$1 - \sigma_{\acute{e}cr} = 120$ kgf/mm²

$2 - \sigma_{\acute{e}cr} = 50$ kgf/mm²

Pour $\frac{D}{d} < 2$

$$\beta_\nu = 1 + \nu(\beta - 1)$$

Diagrammes pour la détermination des valeurs de ν



Suite

Nº	Schéma de la mise en charge d'un élément de la structure ou d'une pièce	Indice théorique de concentration des contraintes α	Indice effectif de concentration des contraintes β	Indice de sensibilité à la concentration des contraintes $q = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}$
3.			Pour l'acier	

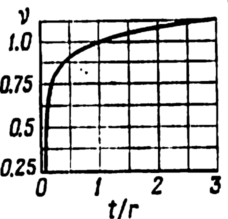
$\frac{D}{d}$	$\frac{r}{d}$	$\sigma_{écr}$, kgf/mm² ≤ 50	80	≥ 100
1,05	0,02	1,24	1,29	1,33
	0,05	1,15	1,18	1,20
	0,10	1,08	1,10	1,12
	0,15	1,06	1,08	1,09
	0,20	1,05	1,06	1,07
1,1	0,02	1,40	1,52	1,62
	0,05	1,25	1,28	1,30
	0,10	1,12	1,16	1,18
	0,15	1,09	1,12	1,14
	0,20	1,06	1,08	1,10

			1,25 | 0,02 | 1,64 | 1,73 | 1,80 0,05 | 1,40 | 1,45 | 1,48 0,10 | 1,20 | 1,27 | 1,32 0,15 | 1,15 | 1,20 | 1,24 0,20 | 1,09 | 1,13 | 1,16 1,5 | 0,02 | 1,76 | 1,97 | 2,14 0,05 | 1,48 | 1,56 | 1,62 0,10 | 1,24 | 1,32 | 1,38 0,15 | 1,19 | 1,25 | 1,29 0,20 | 1,10 | 1,18 | 1,24	
4.	Arbres, tiges à rainures Traction-compression	Schéma pour la détermination de la valeur initiale de α est indiqué en pointillé α=9 8 7 6 5 4 3 2 4 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 $\sqrt{t/r}$ $\sqrt{d/2r}$	Pour la fonte 1,1-1,4 Pour l'alliage МЛ4 $\left(\frac{r}{d} = 0{,}1\text{-}0{,}12\right)$ – – 1,4-1,8 Pour les alliages МА2, МА3, МА5 – 1,7-2 Pour les alliages АЛ5, АЛ7, АЛ8, АЛ9 – 1,3-1,8 Pour les alliages Д16, АК2, АК8 – 1,6-1,8 Pour les aciers, β se détermine du tableau reproduit pour le schéma 5	Pour l'alliage МЛ4 $\left(\frac{r}{d} = 0{,}1\text{-}0{,}12\right)$ – – 0,4-0,8 Pour les alliages МА2, МА3, МА5 – 0,7-1 Pour les alliages АЛ5, АЛ7, АЛ8, АЛ9 – 0,3-0,8 Pour les alliages Д16, АК2, АК8 – 0,6-0,8

Suite

Nº	Schéma de la mise en charge d'un élément de la structure ou d'une pièce	Indice théorique de concentration des contraintes α	Indice effectif de concentration des contraintes β	Indice de sensibilité à la concentration des contraintes $q = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}$
5.	Arbres, tiges à rainures M, D, r, t, d, M Flexion	Schéma pour la détermination de la valeur initiale de α est indiqué en pointillé $\alpha=7$, 6, 5, 4, 3, 2 3 2 1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 $\sqrt{t/r}$ $\sqrt{d/2r}$	Pour les aciers avec $d = 30\text{-}50$ mm et $\frac{t}{r} = 1$ β 2.0 1.0; 0 0.1 0.2 0.3 0.4 r/d; 1, 2 $1 - \sigma_{6cr} = 100$ kgf/mm² $2 - \sigma_{6cr} = 50$ kgf/mm² Pour $\frac{t}{r} \neq 1$ $\beta_v = 1 + v(\beta - 1)$ Diagramme pour la détermination des valeurs de v	Pour les aciers lorsque $\sigma_{6cr} < 50$ kgf/mm² $\frac{t}{r}$ = 0,5: $\frac{r}{d}$ = 0,02 — q = 0,6 $\frac{r}{d}$ = 0,05 — q = 0,69 $\frac{r}{d}$ = 0,10 — q = 0,74 $\frac{r}{d}$ = 0,15 — q = 0,75 $\frac{r}{d}$ = 0,20 — q = 0,75

5.



Quelques valeurs de β

$\frac{t}{r}$	$\frac{t}{d}$	σ_{ecr}, kgf/mm² < 50	80	> 100
0,5	0,02	1,77	2,02	2,22
	0,05	1,72	1,87	1,98
	0,10	1,59	1,69	1,77
	0,15	1,45	1,53	1,59
	0,20	1,37	1,41	1,45
1,0	0,02	1,85	2,12	2,35
	0,05	1,80	1,96	2,10
	0,10	1,65	1,76	1,85
	0,15	1,50	1,58	1,65
	0,20	1,45	1,48	1,50
2,0	0,02	1,92	2,21	2,46
	0,05	1,86	2,03	2,19
	0,10	1,70	1,82	1,92
	0,15	1,54	1,63	1,70
	0,20	1,48	1,52	1,54

$\frac{t}{r}$	$\frac{r}{d}$	q
1,0	0,02	0,5
	0,05	0,59
	0,10	0,72
	0,15	0,74
	0,20	0,75
2,0	0,02	0,45
	0,05	0,57
	0,10	0,72
	0,15	0,72
	0,20	0,74

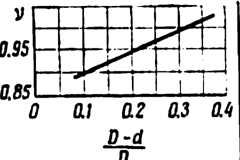
Pour les aciers lorsque σ_{ecr} = 80 kgf/mm²

$\frac{t}{r}$	$\frac{r}{d}$	q
0,5	0,02	0,78
	0,05	0,83
	0,10	0,84
	0,15	0,84
	0,20	0,85
1,0	0,02	0,66
	0,05	0,71
	0,10	0,84
	0,15	0,85
	0,20	0,86
2,0	0,02	0,59
	0,05	0,69
	0,10	0,84
	0,15	0,85
	0,20	0,87

Suite

Nº	Schéma de la mise en charge d'un élément de la structure ou d'une pièce	Indice théorique de concentration des contraintes α	Indice effectif de concentration des contraintes β	Indice de sensibilité à la concentration des contraintes $q = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}$
5.			Fonte grise, avec $\sigma_{éor} = 29$ kgf/mm² Pour $d = 8$ mm et $\frac{D-d}{D} = 0,33$ β; 1.4; 1.2; 1.0; 0; 0.1; 0.2; 0.3; 0.4; r/d Pour $\frac{D-d}{D} \neq 0,33$ $\beta_\nu = \nu\beta$ Diagramme pour la détermination des valeurs de ν	Pour les aciers lorsque $\sigma_{éor} > 100$ kgf/mm²

$\frac{t}{r}$	$\frac{r}{d}$	q
0,5	0,02	0,9
	0,05	0,93
	0,10	0,94
	0,15	0,95
	0,20	0,95
1,0	0,02	0,8
	0,05	0,82
	0,10	0,94
	0,15	0,94
	0,20	0,94
2,0	0,02	0,71
	0,05	0,8
	0,10	0,93
	0,15	0,94
	0,20	0,94



Pour les alliages $\left(d = 8\ \text{mm},\ \frac{D}{d} = 1{,}25\text{-}1{,}5\right)$

МЛ4 – 1,4-2

МА2, МА3, МА5 – 1,7-2

АЛ5, АЛ7, АЛ8, АЛ9 – 1-1,3

Д16, АК2, АК8 – 1,5-2

Pour les alliages $\left(d = 8\text{mm};\ \frac{D}{d} = 1{,}25\text{-}1{,}5\right)$

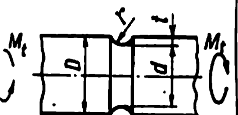
МЛ4 – 0,4-1

МА2, МА3, МА5 – 0,7-1

АЛ5, АЛ7, АЛ8, АЛ9 0-0,3

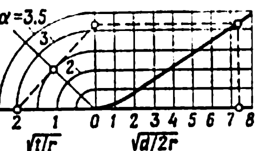
Д16, АК2, АК8 – 0,5-1

6. Arbres, tiges à rainures



Torsion

Schéma pour la détermination de la valeur initiale de α est indiqué en pointillé



Pour les aciers

$\frac{t}{r}$	$\frac{r}{d}$	σ_{dor}, kgf/mm² < 50	80	> 100
0,5	0,02	1,46	1,61	1,73
	0,05	1,43	1,52	1,60
	0,10	1,36	1,42	1,46
	0,15	1,27	1,32	1,36
	0,20	1,22	1,25	1,27
1,0	0,02	1,51	1,67	1,81
	0,05	1,48	1,58	1,66
	0,10	1,39	1,47	1,51
	0,15	1,30	1,35	1,39
	0,20	1,27	1,29	1,30

Pour les aciers avec $\sigma_{dor} \leq 50$ kgf/mm²

$\frac{t}{r}$	$\frac{r}{d}$	q
1,0	0,02	0,64
	0,05	0,74
	0,10	0,81
	0,15	0,91
	0,20	1,00
2,0	0,02	0,49
	0,05	0,72
	0,10	0,76
	0,15	0,77
	0,20	0,96

Suite

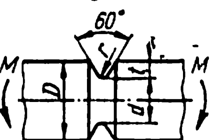
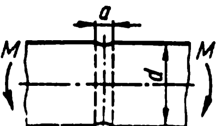
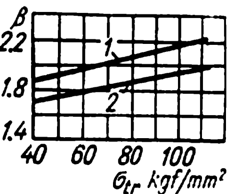
N°	Schéma de la mise en charge d'un élément de la structure ou d'une pièce	Indice théorique de concentration des contraintes α	Indice effectif de concentration des contraintes β	Indice de sensibilité à la concentration des contraintes $q = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}$
6.			(voir tableau β ci-dessous)	(voir tableau q ci-dessous)

Indice effectif de concentration des contraintes β :

$\frac{t}{r}$	$\frac{r}{d}$	$\sigma_{\acute{e}cr}$, kgf/mm² < 50	80	≥ 100
2,0	0,02	1,56	1,73	1,87
	0,05	1,51	1,62	1,71
	0,10	1,42	1,50	1,56
	0,15	1,33	1,38	1,42
	0,20	1,29	1,30	1,32

Indice de sensibilité q :

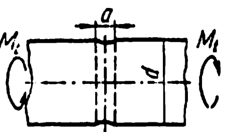
$\frac{t}{r}$	$\frac{r}{d}$	q
pour $\sigma_{\acute{e}cr}$ = 80 kgf/mm²		
1,0	0,02	0,84
	0,05	0,89
	0,10	0,98
	0,15	1,06
	0,20	1,07
2,0	0,02	0,47
	0,05	0,73
	0,10	0,91
	0,15	0,91
	0,20	1,00
pour $\sigma_{\acute{e}cr}$ ≥ 100 kgf/mm²		
1,0	0,02	1,01
	0,05	1,02
	0,10	1,06
	0,15	1,14
	0,20	1,15
2,0	0,02	0,76
	0,05	0,84
	0,10	1,00
	0,15	1,00
	0,20	1,07

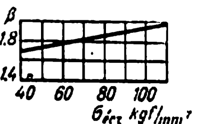
7.	Arbres, tiges à rainures  Flexion	Pour $d = 8$ mm; $\frac{D}{d} =$ $= 1{,}02\text{-}1{,}6$ $r = 0{,}05$ mm; $\frac{r}{d} = 0{,}006$; $\frac{t}{r} = 4\text{-}4{,}5$; $\alpha = 4{,}5\text{-}6$	Pour les alliages МЛ4 – 1,8-4,3 МА2, МА3, МА5 – 1,9-2,5 АЛ5, АЛ7, АЛ8, АЛ9 – 1-1,4 Д16, АК2, АК8 – 1,1-2,6	Pour les alliages МЛ4 – 0,2-0,8 МА2, МА3, МА5 – – 0,25-0,26 АЛ5, АЛ7, АЛ8, АЛ9 – 0-0,07 Д16, АК2, АК8 – – 0,03-0,27
8.	Arbres, tiges à rainure transversale ronde  Flexion	2,0 Pour $\frac{a}{d} = 0{,}1\text{-}0{,}33$	Pour les aciers  $1 - \frac{a}{d} = 0{,}05\text{-}0{,}1$ $2 - \frac{a}{d} = 0{,}15\text{-}0{,}25$ ($d = 30\text{-}50$mm) Quelques valeurs numériques de β sont données dans le tableau ci-après	Pour les aciers – 0,7-1,0

$\frac{a}{d}$	$\sigma_{écr}$, kgf/mm²			
	50	60	80	100
0,05 – 0,1	1,90	1,95	2,05	2,15
0,15 – 0,25	1,74	1,77	1,86	1,95

Suite

Nº	Schéma de la mise en charge d'un élément de la structure ou d'une pièce	Indice théorique de concentration des contraintes α	Indice effectif de concentration des contraintes β	Indice de sensibilité à la concentration des contraintes $q = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}$
8.			Pour la fonte grise lorsque $\sigma_{écr} = 20\ kgf/mm^2$ et pour $\frac{a}{d} = 0{,}1$-$0{,}15$ Pour d'autres valeurs de $\sigma_{écr}$, on doit utiliser le coefficient de correction ξ que l'on détermine sur le diagramme ci-dessous 	

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td><td>La limite supérieure correspond aux fontes à fort alliage, la limite inférieure correspond aux fontes à faible alliage</td><td></td></tr>
<tr><td>9.</td><td>Arbres, tiges à rainure transversale ronde


Torsion</td><td>—</td><td>Pour les aciers lorsque
$d = 30\text{-}50$ mm et $\frac{a}{d} = 0{,}05\text{-}0{,}25$


Quelques valeurs numériques de β correspondant au graphique sont données dans le tableau ci-après
<table><tr><th>a/d</th><th colspan="4">$\sigma_{écr}$, kgf/mm²</th></tr><tr><td></td><td>50</td><td>60</td><td>80</td><td>100</td></tr><tr><td>0,05-0,25</td><td>1,75</td><td>1,78</td><td>1,83</td><td>1,92</td></tr></table>
Pour la fonte grise lorsque $\sigma_{écr} \sim 22$ kgf/mm²</td><td></td></tr>
</table>

Suite

Nº	Schéma de la mise en charge d'un élément de la structure ou d'une pièce	Indice théorique de concentration des contraintes α	Indice effectif de concentration des contraintes β	Indice de sensibilité à la concentration des contraintes $q = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}$
			et $\frac{a}{d} = 0,1$ β: 1.0, 1.2, 1.4; d, mm: 10, 20, 30, 40, 50	
10.	Arbres, tiges à une ou deux rainures de clavetage b, d, t Flexion		Pour les calculs: pour une seule rainure de clavetage $W_f \approx \frac{\pi d^3}{32} - \frac{bt(d-t)^2}{2d}$, pour deux rainures de clavetage $W_f \approx \frac{\pi d^3}{32} - \frac{bt(d-t)^2}{d}$,	

10.	Torsion		où W'_r est le moment résistant en flexion. Pour les aciers σ_{dor}, kgf/mm² | β 50 | 1,5 60 | 1,6 70 | 1,72 80 | 1,8 90 | 1,9 100 | 2,0 Pour les calculs: pour une seule rainure de clavetage $W_t \approx \frac{\pi d^3}{16} - \frac{bt(d-t)^2}{2d}$, pour deux rainures de clavetage $W'_t \approx \frac{\pi d^3}{16} - \frac{bt(d-t)^2}{d}$, où W_t est le moment résistant en torsion Pour les aciers σ_{dor}, kgf/mm² | β 50 | 1,4 60 | 1,5 70 | 1,6 80 | 1,7 90 | 1,8 100 | 1,9	

Suite

Nº	Schéma de la mise en charge d'un élément de la structure ou d'une pièce	Indice théorique de concentration des contraintes α	Indice effectif de concentration des contraintes β	Indice de sensibilité à la concentration des contraintes $q = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}$
11.	Arbres, tiges à tronçon canulé (denté). Flexion	—	Pour les calculs de pièces en acier munies de fentes à parois droites, le moment résistant de la section se détermine de la formule $$W_r = \xi \frac{\pi d^3}{32},$$ où d est le diamètre intérieur; ξ, coefficient de correction égal à: pour la série légère 1,09-1,16; pour la série moyenne 1,14-1,27; pour la série lourde 1,14-1,39 Les valeurs plus petites de ξ correspondent aux valeurs plus grandes de d Pour les raccordements canulés en forme de développante W_r se détermine comme une section pleine ronde d'un diamètre égal à celui de la circonférence démultiplicatrice	

$\sigma_{бcr}$, kgf/mm²	β: Fentes rectangulaires (GOST 1139-53)	β: Fentes en forme de développante (GOST 6033-51)
40	1,35	1,35
50	1,45	1,45
60	1,55	1,55
70	1,60	1,60
80	1,65	1,65
90	1,70	1,70
100	1,72	1,72
120	1,75	1,75

11	Torsion	Pour les fentes à parois droites α = 2,5-3,2 Pour les fentes en forme de développante α = 1,2-1,5	(voir tableau ci-dessous)	Pour les fentes à parois droites – 0,5-1,2 Pour les fentes en forme de développante – 0,8-3,0

$\sigma_{бcr}$, kgf/mm²	β: Fentes rectangulaires (GOST 1139-53)	β: Fentes en forme de développante (GOST 6033-51)
40	2,10	1,40
50	2,25	1,43
60	2,35	1,46
70	2,45	1,49
80	2,55	1,52
90	2,65	1,55
100	2,70	1,58
120	2,80	1,60

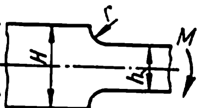
Suite

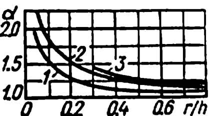
Nº	Schéma de la mise en charge d'un élément de la structure ou d'une pièce	Indice théorique de concentration des contraintes α	Indice effectif de concentration des contraintes β	Indice de sensibilité à la concentration des contraintes $q = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}$
11			Moment résistant pour une section munie de fentes à parois droites, en torsion $W_t = 2W_r$. Pour les raccordements cannulés en forme de développante, W_t se détermine comme pour une section pleine ronde dont le diamètre est égal à celui de la circonférence démultiplicatrice	
12	Roues dentées non-corrigées à profil en forme de développante à $\alpha = 20°$ lorsque la sollicitation est appliquée au sommet de la dent	Nombre de dents $z = 20$-80 α ; 2.2 ; 1.8 ; 1.4 ; 1.0 ; 1.8 ; 2.6 ; 3.4 ; s/l ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6	$\beta = 1 + q(\alpha - 1)$	Pour les aciers q ; 0.8 ; 0.4 ; 0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8 ; r_t, mm ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5

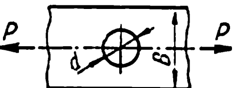
12		$1 - \frac{r_t}{m} = 0,124\text{-}0,222$ $2 - \frac{r_t}{m} = 0,124\text{-}0,17$ $3 - \frac{r_t}{m} = 0,258\text{-}0,36$ $4 - \frac{r_t}{m} = 0,305\text{-}0,317$ $5 - \frac{r_t}{m} = 0,55$ $6 - \frac{r_t}{m} = 0,495\text{-}0,6$ Ici s, épaisseur de la base de la dent dans la section dangereuse; l, bras de levier de la force fléchissante; m, module d'engrenage; r_t, rayon de l'arrondi au sommet de la dent	Pour la fonte 1,2-1,3	$1 - \frac{\sigma_{\delta a}}{\sigma_{\delta cr}} = 0,8$ $2 - \frac{\sigma_{\delta a}}{\sigma_{\delta cr}} = 0,7$ $3 - \frac{\sigma_{\delta a}}{\sigma_{\delta cr}} = 0,6$ $4 - \frac{\sigma_{\delta a}}{\sigma_{\delta cr}} = 0,55$ $5 - \frac{\sigma_{\delta a}}{\sigma_{\delta cr}} = 0,4\text{-}0,5$
13	Assemblages boulonnés en traction-compression, pour $d = 12$ mm		Pour les aciers $\sigma_{\delta cr}$, kgf/mm² — β: filet métrique — filet anglais 40 — 3,0 — 2,2 60 — 3,9 — 2,9 80 — 4,8 — 3,5 100 — 5,2 — 3,8	

Suite

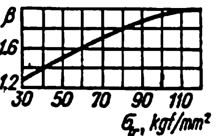
Nº	Schéma de la mise en charge d'un élément de la structure ou d'une pièce	Indice théorique de concentration des contraintes α	Indice effectif de concentration des contraintes β	Indice de sensibilité à la concentration des contraintes $q = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}$
14.	Bande rectangulaire à gradins Traction-compression	1 — $\frac{H}{h} = 1{,}1$; 2 — $\frac{H}{h} = 1{,}2$; 3 — $\frac{H}{h} = 1{,}5$ 4 — $\frac{H}{h} = 4$.	$\beta = 1 + q(\alpha - 1)$	Les valeurs de q peuvent être déterminées du graphique reproduit pour le schéma 12

<table>
<tr>
<td>15</td>
<td>Bande rectangulaire à gradins


Flexion</td>
<td>

$1 - \frac{H}{h} = 1,1$; $2 - \frac{H}{h} = 2$;
$3 - \frac{H}{h} = 4$.</td>
<td>$\beta = 1 + q(\alpha - 1)$</td>
<td>Les valeurs de q peuvent être déterminées du graphique reproduit sur le schéma 12</td>
</tr>
<tr>
<td>16</td>
<td>Plaque rectangulaire à orifice


Traction-compression</td>
<td>
<table>
<tr><th>$\frac{d}{B}$</th><th>α</th></tr>
<tr><td>0</td><td>3,0</td></tr>
<tr><td>0,1</td><td>3,03</td></tr>
<tr><td>0,2</td><td>3,14</td></tr>
<tr><td>0,3</td><td>3,36</td></tr>
<tr><td>0,4</td><td>3,74</td></tr>
<tr><td>0,5</td><td>4,32</td></tr>
</table>

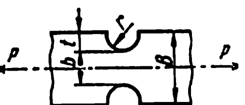
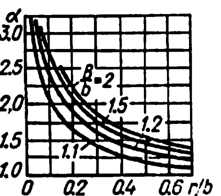
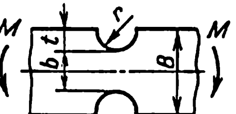
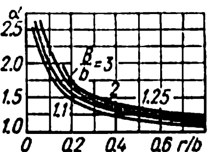
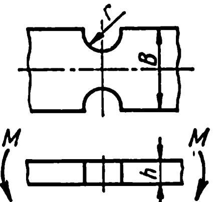
2,5-3</td>
<td>Pour les aciers


1,2-1,8</td>
<td>Pour les aciers
<table>
<tr><th rowspan="2">$\frac{d}{B}$</th><th colspan="3">σ_{6cr}, kgf/mm²</th></tr>
<tr><th>60</th><th>80</th><th>100</th></tr>
<tr><td>0</td><td>0,3</td><td>0,4</td><td>0,48</td></tr>
<tr><td>0,1</td><td>0,3</td><td>0,39</td><td>0,47</td></tr>
<tr><td>0,2</td><td>0,28</td><td>0,36</td><td>0,44</td></tr>
<tr><td>0,3</td><td>0,25</td><td>0,34</td><td>0,4</td></tr>
<tr><td>0,4</td><td>0,22</td><td>0,29</td><td>0,35</td></tr>
<tr><td>0,5</td><td>0,18</td><td>0,24</td><td>0,29</td></tr>
</table>

0,1-0,53</td>
</tr>
</table>

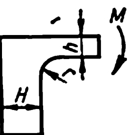
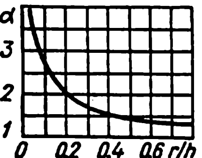
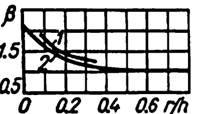
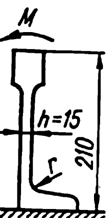
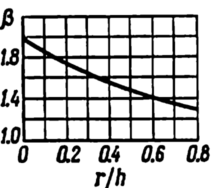
Suite

Nº	Schéma de la mise en charge d'un élément de la structure ou d'une pièce	Indice théorique de concentration des contraintes α	Indice effectif de concentration des contraintes β	Indice de sensibilité à la concentration des contraintes $q = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}$
17	Plaque rectangulaire à orifice Flexion	 Pour les alliages МА2, МА3, МА5, Д16, АК2, АК8 avec B — 40 mm; d — 1-6 mm; h — 1,5-5 mm 1,6-2,5	Pour les aciers 1,3-1,8	Quelques valeurs de q pour $B/h = 3$ et $\frac{d}{B} = 0,1\text{-}0,9$ Pour l'acier à $\sigma_{бcr}$ = 60 kgf/mm² — 0,37-1,46; $\sigma_{бcr}$ = 80 kgf/mm² — 0,5-2 $\sigma_{бcr}$ — 100 kgf/mm² — 0,63-2,5 0,2-1,3

18	Plaque rectangulaire à entailles circulaires latérales  Traction-compression		$\beta = 1 + q(\alpha - 1)$	Les valeurs de q peuvent être déterminées du graphique reproduit pour le schéma 12
19	Plaque rectangulaire à entailles circulaires latérales  Flexion		$\beta = 1 + q(\alpha - 1)$	Les valeurs de q peuvent être déterminées du graphique reproduit pour le schéma 12
20	Plaque rectangulaire à entailles circulaires latérales  Flexion	Pour les alliages МА2, МА3, МА5, Д16, АК2, АК8 avec $B = 12$ mm; $r = 16$ mm; $= 0,5$ mm 2	1,5-2	0,5-1

Suite

N°	Schéma de la mise en charge d'un élément de la structure ou d'une pièce	Indice théorique de concentration des contraintes α	Indice effectif de concentration des contraintes β	Indice de sensibilité à la concentration des contraintes $q = \frac{\beta - 1}{\alpha - 1}$
21	Bandes à entailles uni- ou bi-latérales	Pour les alliages MA2, MA3, MA5 avec $r = 0{,}02$-$0{,}05$ mm; $\frac{t}{r} = 3$-15; $\frac{h}{t} = 20$		
	Traction-compression ou flexion	4-7	1,2	0,03-0,07

22	Profilé à angle rentrant  Flexion		Pour les aciers  *1* — allié ($\sigma_{бcr}$ = 90 kgf/mm²) *2* — au carbone ($\sigma_{бcr}$ = 50-70 kgf/mm²)	Pour l'acier à $\sigma_{бcr}$ = 90 kgf/mm² $\frac{r}{h}$ | q 0,1-0,3 | 0,33-0,47 Pour l'acier à $\sigma_{бcr}$ = 50-70 kgf/mm² 0,1-0,6 | 0,2-0,35
23	Pièce à angle rentrant  Flexion		Pour la fonte lorsque $\sigma_{бcr}$ = 29kgf/mm² 	

Fonctions de Krylov S, T, U, V

$$S(kz) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} kz + \cos kz);$$

$$T(kz) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} kz + \sin kz);$$

$$U(kz) = \frac{1}{2}(\operatorname{ch} kz - \cos kz);$$

$$V(kz) = \frac{1}{2}(\operatorname{sh} kz - \sin kz),$$

avec

$$S'(kz) = kV(kz); \quad S''(kz) = k^2U(kz); \quad S'''(kz) = k^3T(kz);$$

$$T'(kz) = kS(kz); \quad T''(kz) = k^2V(kz); \quad T'''(kz) = k^3U(kz);$$

$$U'(kz) = kT(kz); \quad U''(kz) = k^2S(kz); \quad U'''(kz) = k^3V(kz);$$

$$V'(kz) = kU(kz); \quad V''(kz) = k^2T(kz); \quad V'''(kz) = k^3S(kz);$$

kz	$S(kz)$	$T(kz)$	$U(kz)$	$V(kz)$
0,00	1,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,01	1,00000	0,01000	0,00005	0,00000
0,02	1,00000	0,02000	0,00020	0,00000
0,03	1,00000	0,03000	0,00045	0,00000
0,04	1,00000	0,04000	0,00080	0,00001
0,05	1,00000	0,05000	0,00125	0,00002
0,06	1,00000	0,06000	0,00180	0,00004
0,07	1,00000	0,07000	0,00245	0,00006
0,08	1,00000	0,08000	0,00320	0,00009
0,09	1,00000	0,09000	0,00405	0,00012
0,10	1,00000	0,10000	0,00500	0,00017
0,11	1,00001	0,11000	0,00605	0,00022
0,12	1,00001	0,12000	0,00720	0,00029
0,13	1,00001	0,13000	0,00845	0,00037
0,14	1,00002	0,14000	0,00980	0,00046
0,15	1,00002	0,15000	0,01125	0,00056
0,16	1,00003	0,16000	0,01280	0,00068
0,17	1,00003	0,17000	0,01445	0,00082
0,18	1,00004	0,18000	0,01620	0,00097
0,19	1,00005	0,19000	0,01805	0,00115

kz	$S(kz)$	$T(kz)$	$U(kz)$	$V(kz)$
0,20	1,00007	0,20000	0,02000	0,00134
0,21	1,00008	0,21000	0,02205	0,00155
0,22	1,00010	0,22000	0,02420	0,00178
0,23	1,00012	0,23000	0,02645	0,00203
0,24	1,00014	0,24000	0,02880	0,00231
0,25	1,00016	0,25000	0,03125	0,00261
0,26	1,00019	0,26001	0,03380	0,00293
0,27	1,00022	0,27001	0,03645	0,00328
0,28	1,00026	0,28001	0,03920	0,00366
0,29	1,00029	0,29001	0,04205	0,00407
0,30	1,00034	0,30002	0,04500	0,00450
0,31	1,00038	0,31002	0,04805	0,00497
0,32	1,00044	0,32003	0,05120	0,00546
0,33	1,00049	0,33003	0,05445	0,00599
0,34	1,00055	0,34004	0,05780	0,00655
0,35	1,000625	0,35004	0,06125	0,00715
0,36	1,00070	0,36005	0,06480	0,00778
0,37	1,00078	0,37006	0,06845	0,00844
0,38	1,00086	0,38006	0,07220	0,00915
0,39	1,00096	0,39007	0,07605	0,00989
0,40	1,00106	0,40008	0,08000	0,01067
0,41	1,00117	0,41009	0,08405	0,01149
0,42	1,00129	0,42011	0,08820	0,01235
0,43	1,00142	0,43012	0,09245	0,01325
0,44	1,00156	0,44014	0,09681	0,01420
0,45	1,00171	0,45015	0,10126	0,01519
0,46	1,00186	0,46017	0,10581	0,01625
0,47	1,00203	0,47019	0,11047	0,01731
0,48	1,00221	0,48021	0,11522	0,01844
0,49	1,00240	0,49023	0,12007	0,01961
0,50	1,00260	0,50026	0,12502	0,02084
0,51	1,00280	0,51029	0,13007	0,02211
0,52	1,00304	0,52031	0,13522	0,02344
0,53	1,00329	0,53024	0,14048	0,02481
0,54	1,00354	0,54038	0,14583	0,02624
0,55	1,00381	0,55042	0,15129	0,02773
0,56	1,00410	0,56046	0,15684	0,02927
0,57	1,00440	0,57050	0,16250	0,03037
0,58	1,00471	0,58054	0,16825	0,03253
0,59	1,00505	0,59060	0,17411	0,03424
0,60	1,00540	0,60074	0,18006	0,03601
0,61	1,00577	0,61070	0,18612	0,03784
0,62	1,00616	0,62076	0,19228	0,03973
0,63	1,00656	0,63082	0,19853	0,04169
0,64	1,00699	0,64089	0,20489	0,04369
0,65	1,00742	0,65097	0,21136	0,04578

kz	*S(kz)*	*T(kz)*	*U(kz)*	*V(kz)*
0,66	1,00790	0,66104	0,21791	0,04793
0,67	1,00830	0,67112	0,22458	0,05013
0,68	1,00891	0,68121	0,23134	0,05248
0,69	1,00945	0,69130	0,23820	0,05477
0,70	1,01000	0,70140	0,24516	0,05718
0,71	1,01059	0,71150	0,25223	0,05967
0,72	1,01120	0,72161	0,25939	0,06223
0,73	1,01183	0,73173	0,26666	0,06486
0,74	1,01249	0,74185	0,27403	0,06756
0,75	1,01318	0,75198	0,28149	0,07034
0,76	1,01390	0,76211	0,28906	0,07319
0,77	1,01465	0,77226	0,29674	0,07612
0,78	1,01542	0,78240	0,30451	0,07913
0,79	1,01623	0,79256	0,31238	0,08228
0,80	1,01707	0,80273	0,32036	0,08538
0,81	1,01794	0,81290	0,32844	0,08862
0,82	1,01884	0,82309	0,33662	0,09194
0,83	1,01978	0,83328	0,34490	0,09535
0,84	1,02075	0,84348	0,35329	0,09885
0,85	1,02175	0,85380	0,36177	0,10242
0,86	1,02280	0,86392	0,37036	0,10608
0,87	1,02388	0,87415	0,37905	0,10983
0,88	1,02500	0,88440	0,38785	0,11366
0,89	1,02615	0,89465	0,39674	0,11758
0,90	1,02735	0,90492	0,40573	0,12159
0,91	1,02858	0,91520	0,41483	0,12570
0,92	1,02986	0,92549	0,42404	0,12990
0,93	1,03118	0,93082	0,43335	0,13418
0,94	1,03254	0,94612	0,44275	0,13856
0,95	1,03395	0,95645	0,45227	0,14303
0,96	1,03540	0,96679	0,46188	0,14761
0,97	1,03690	0,97716	0,47161	0,15297
0,98	1,03845	0,98753	0,48143	0,15704
0,99	1,04005	0,99793	0,49136	0,16190
1,00	1,04169	1,00833	0,50139	0,16687
1,01	1,04338	1,01876	0,51152	0,17193
1,02	1,04513	1,02920	0,52176	0,17710
1,03	1,04693	1,03953	0,53211	0,18237
1,04	1,04878	1,05014	0,54256	0,18774
1,05	1,05068	1,06064	0,55311	0,19322
1,06	1,05264	1,07116	0,56377	0,19880
1,07	1,05466	1,08169	0,57454	0,20449
1,08	1,05673	1,09225	0,58540	0,21029
1,09	1,05887	1,10283	0,59638	0,21620

kz	S(kz)	T(kz)	U(kz)	V(kz)
1,10	1,06106	1,11343	0,60746	0,22222
1,11	1,06333	1,12405	0,61865	0,22835
1,12	1,06562	1,13469	0,62995	0,23460
1,13	1,06800	1,14536	0,64134	0,24095
1,14	1,07044	1,15605	0,65285	0,24742
1,15	1,07295	1,16677	0,66446	0,25401
1,16	1,07552	1,17750	0,67619	0,26071
1,17	1,07816	1,18828	0,68801	0,26753
1,18	1,08087	1,19908	0,69995	0,27447
1,19	1,08365	1,20990	0,71200	0,28153
1,20	1,08651	1,22075	0,72415	0,28871
1,21	1,08934	1,23163	0,73641	0,29601
1,22	1,09243	1,24254	0,74878	0,30344
1,23	1,09550	1,25348	0,76196	0,31099
1,24	1,09865	1,26444	0,77385	0,31867
1,25	1,10187	1,27545	0,78658	0,32647
1,26	1,10518	1,28648	0,79936	0,33439
1,27	1,10856	1,29750	0,81228	0,34245
1,28	1,11203	1,30866	0,82531	0,35064
1,29	1,11557	1,31980	0,83845	0,35896
1,30	1,11920	1,33097	0,85163	0,36741
1,31	1,12292	1,34218	0,86507	0,37600
1,32	1,12673	1,35343	0,87855	0,38471
1,33	1,13062	1,36471	0,89214	0,39357
1,34	1,13460	1,37604	0,90585	0,40256
1,35	1,13867	1,38740	0,91966	0,41169
1,36	1,14283	1,39881	0,93336	0,42096
1,37	1,14709	1,41026	0,94764	0,43035
1,38	1,15144	1,42175	0,96180	0,43991
1,39	1,15588	1,43329	0,97607	0,44959
1,40	1,16043	1,44487	0,99047	0,45933
1,41	1,16507	1,45655	1,00497	0,46941
1,42	1,16982	1,46817	1,01959	0,47952
1,43	1,17466	1,47990	1,03434	0,48980
1,44	1,17961	1,49167	1,04920	0,50021
1,45	1,18467	1,50349	1,06417	0,51078
1,46	1,18984	1,51537	1,07926	0,52149
1,47	1,19510	1,52728	1,09448	0,53237
1,48	1,20048	1,53926	1,10981	0,54339
1,49	1,20597	1,55130	1,12526	0,55456
1,50	1,21157	1,56338	1,14083	0,56590
1,51	1,21729	1,57553	1,15653	0,57738
1,52	1,22312	1,58773	1,17235	0,58903
1,53	1,22907	1,59999	1,18828	0,60083
1,54	1,23514	1,61231	1,20435	0,61279

kz	*S(kz)*	*T(kz)*	*U(kz)*	*V(kz)*
1,55	1,24132	1,62469	1,22053	0,62492
1,56	1,24769	1,63714	1,23679	0,63720
1,57	1,25407	1,64965	1,25327	0,64965
1,58	1,26063	1,66222	1,26983	0,66226
1,59	1,26732	1,67486	1,28652	0,67504
1,60	1,27413	1,68757	1,30333	0,68800
1,61	1,28108	1,70034	1,32027	0,70112
1,62	1,28815	1,71319	1,33734	0,71441
1,63	1,29536	1,72608	1,35453	0,72786
1,64	1,30271	1,73910	1,37186	0,74149
1,65	1,31019	1,75216	1,38932	0,75530
1,66	1,31782	1,76530	1,40690	0,76928
1,67	1,32558	1,77852	1,42462	0,78344
1,68	1,33348	1,79181	1,44248	0,79778
1,69	1,34154	1,80519	1,46046	0,81229
1,70	1,34974	1,81864	1,47858	0,82699
1,71	1,35808	1,83219	1,49683	0,84186
1,72	1,36657	1,84581	1,53523	0,85692
1,73	1,37522	1,85952	1,53375	0,87216
1,74	1,38401	1,87331	1,55242	0,88759
1,75	1,39297	1,88820	1,57122	0,90321
1,76	1,40208	1,90117	1,59016	0,91903
1,77	1,41135	1,91524	1,60924	0,93502
1,78	1,42078	1,92940	1,62846	0,95120
1,79	1,43038	1,94366	1,64783	0,96759
1,80	1,44013	1,95801	1,66734	0,98416
1,81	1,45006	1,97246	1,68699	1,00093
1,82	1,46015	1,98697	1,70679	1,02191
1,83	1,47042	2,00166	1,72673	1,03507
1,84	1,48086	2,01642	1,74682	1,05244
1,85	1,49147	2,03128	1,76706	1,07001
1,86	1,50225	2,04625	1,78745	1,08778
1,87	1,51322	2,06133	1,80798	1,10576
1,88	1,52437	2,07652	1,82863	1,12394
1,89	1,53570	2,09182	1,84952	1,14233
1,90	1,54722	2,10723	1,87051	1,16093
1,91	1,55892	2,12276	1,89166	1,17974
1,92	1,57081	2,13841	1,91297	1,19877
1,93	1,58290	2,15418	1,93443	1,21800
1,94	1,59518	2,17006	1,95605	1,23745
1,95	1,61265	2,18608	1,97783	1,25713
1,96	1,62032	2,20222	1,99977	1,27701
1,97	1,63319	2,21849	2,02187	1,29712
1,98	1,64626	2,23489	2,04415	1,31745
1,99	1,65954	2,25142	2,06707	1,33800

kz	S(kz)	T(kz)	U(kz)	V(kz)
2,00	1,67302	2,26808	2,08918	1,35878
2,01	1,68671	2,28337	2,11193	1,37828
2,02	1,70062	2,30181	2,13487	1,40102
2,03	1,71474	2,31889	2,15797	1,42249
2,04	1,72907	2,33611	2,18125	1,44418
2,05	1,74362	2,35347	2,20470	1,46611
2,06	1,75840	2,37098	2,22832	1,48827
2,07	1,77360	2,38864	2,25212	1,51068
2,08	1,78861	2,40645	2,27609	1,53332
2,09	1,80405	2,42441	2,30024	1,55620
2,10	1,81973	2,44253	2,32458	1,57933
2,11	1,83565	2,46081	2,34910	1,60269
2,12	1,85179	2,47925	2,37380	1,62630
2,13	1,86817	2,49785	2,39868	1,65017
2,14	1,88479	2,51661	2,42375	1,67428
2,15	1,90165	2,53554	2,44902	1,69865
2,16	1,91876	2,55464	2,47447	1,72327
2,17	1,93612	2,57392	2,50011	1,74813
2,18	1,95373	2,59337	2,52594	1,77326
2,19	1,97158	2,61300	2,55198	1,79865
2,20	1,98970	2,63208	2,57820	1,81431
2,21	2,00807	2,65279	2,60464	1,85022
2,22	2,02671	2,67296	2,63126	1,87640
2,23	2,04560	2,69332	2,65810	1,90285
2,24	2,06476	2,71388	2,68513	1,92956
2,25	2,08420	2,73462	2,71237	1,95655
2,26	2,10390	2,75556	2,73982	1,98381
2,27	2,12387	2,77670	2,76748	2,01135
2,28	2,14412	2,79804	2,79536	2,03916
2,29	2,16465	2,81958	2,82345	2,06725
2,30	2,18547	2,84133	2,85175	2,09563
2,31	2,20657	2,86329	2,88027	2,12429
2,32	2,22795	2,88546	2,90902	2,15324
2,33	2,24964	2,90785	2,93798	2,18247
2,34	2,27161	2,93045	2,96717	2,21200
2,35	2,29388	2,95328	2,99659	2,24182
2,36	2,31645	2,97634	3,02624	2,27193
2,37	2,33932	2,99962	3,05612	2,30234
2,38	2,36250	3,02312	3,08624	2,33306
2,39	2,38598	3,04686	3,11658	2,36406
2,40	2,40978	3,07084	3,14717	2,39539
2,41	2,43389	3,09506	3,17800	2,42700
2,42	2,45832	3,11952	3,20907	2,45895
2,43	2,48307	3,14423	3,24039	2,49119
2,44	2,50814	3,16919	3,27196	2,52375

kz	*S(kz)*	*T(kz)*	*U(kz)*	*V(kz)*
2,45	2,53354	3,19439	3,30378	2,55664
2,46	2,56927	3,21986	3,33585	2,58983
2,47	2,58535	3,24558	3,36817	2,62335
2,48	2,61174	3,27156	3,40076	2,65720
2,49	2,63848	2,29781	3,43360	2,69136
2,50	2,66557	3,32433	3,46672	2,72587
2,51	2,69300	3,35113	3,50010	2,76070
2,52	2,72079	3,37820	3,53374	2,79584
2,53	2,74893	3,40555	3,56765	2,83137
2,54	2,77742	3,43318	3,60175	2,86722
2,55	2,80627	3,46110	3,63632	2,90342
2,56	2,83549	3,48931	3,67107	2,93995
2,57	2,86507	3,51780	3,70061	2,97683
2,58	2,89502	3,54660	3,74144	3,01408
2,59	2,92535	3,57571	3,77705	3,05167
2,60	2,95606	3,60511	3,81295	3,08962
2,61	2,98714	3,63483	3,84915	3,12793
2,62	3,01862	3,66486	3,88565	3,16660
2,63	3,05047	3,69521	3,92235	3,20564
2,64	3,08273	3,72587	3,95955	3,24505
2,65	3,11538	3,75186	3,99696	3,28483
2,66	3,14843	3,78818	4,03469	3,32499
2,67	3,18188	3,81984	4,07273	3,36552
2,68	3,21755	3,85182	4,11108	3,40645
2,69	3,25001	3,88415	4,14926	3,44775
2,70	3,28470	3,91682	4,18877	3,48944
2,71	3,31980	3,94985	4,22810	3,53152
2,72	3,35533	3,92321	4,26717	3,57401
2,73	3,39128	4,01695	4,30777	3,61688
2,74	3,42767	4,05105	4,34811	3,66017
2,75	3,46449	4,08550	4,38879	3,70384
2,76	3,50175	4,12034	4,42982	3,74794
2,77	3,53945	4,15554	4,47120	3,79244
2,78	3,57760	4,19112	4,51293	3,83736
2,79	3,61619	4,22709	4,55503	3,88271
2,80	3,65525	4,26345	4,59748	3,92847
2,81	3,69476	4,30020	4,64030	3,97465
2,82	3,73493	4,33735	4,68330	4,02127
2,83	3,77520	4,37490	4,72705	4,06832
2,84	3,81612	4,41285	4,77098	4,11582
2,85	3,85751	4,45122	4,81530	4,16375
2,86	3,89940	4,49001	4,86000	4,21212
2,87	3,94176	4,52921	4,90510	4,26095
2,88	3,98461	4,56884	4,95059	4,31028
2,89	4,02796	4,60891	4,99648	4,35996

kz	$S(kz)$	$T(kz)$	$U(kz)$	$V(kz)$
2,90	4,07181	4,64940	5,04277	4,41016
2,91	4,11617	4,69034	5,08947	4,46082
2,92	4,16103	4,73173	5,13658	4,51195
2,93	4,20640	4,77357	5,18410	4,56355
2,94	4,25230	4,81586	5,23206	4,61563
2,95	4,29875	4,85862	5,28042	4,66820
2,96	4,34567	4,90181	5,32923	4,72124
2,97	4,39315	4,94553	5,37846	4,77478
2,98	4,44117	4,98970	5,42814	4,82881
2,99	4,48972	5,03435	5,47825	4,88335
3,00	4,53883	5,07949	5,52883	4,95838
3,01	4,58850	5,12513	5,57985	4,99392
3,02	4,63872	5,17127	5,63133	5,04998
3,03	4,68950	5,21791	5,68327	5,10655
3,04	4,74085	5,26556	5,73569	5,16364
3,05	4,79277	5,31272	5,78858	5,22126
3,06	4,84527	5,36090	5,84195	5,27942
3,07	4,89836	5,40963	5,89580	5,33810
3,08	4,95204	5,45888	5,95014	5,39734
3,09	5,00631	5,50868	6,00498	5,45711
3,10	5,06118	5,55901	6,06032	5,51744
3,11	5,11666	5,60990	6,11616	5,57832
3,12	5,17275	5,66135	6,17252	5,63976
3,13	5,22931	5,71336	6,22936	5,70177
3,14	5,28678	5,76594	6,28678	5,76435
3,15	5,34475	5,81910	6,34471	5,82751
3,16	5,40316	5,87284	6,40317	5,89125
3,17	5,46257	5,92717	6,46217	5,95657
3,18	5,52245	5,98209	6,52171	6,02049
3,19	5,58298	6,03762	6,58182	6,08601
3,20	5,64418	6,09375	6,64247	6,15213
3,21	5,70603	6,15050	6,70369	6,21885
3,22	5,76855	6,20787	6,76349	6,28621
3,23	5,83161	6,26588	6,82800	6,35417
3,24	5,89564	6,32451	6,89080	6,42277
3,25	5,96021	6,38379	6,95384	6,49199
3,26	6,02535	6,44372	7,01848	6,56185
3,27	6,09145	6,50431	7,08322	6,63236
3,28	6,15813	6,56555	7,14857	6,70352
3,29	6,22552	6,62747	7,21454	6,77533
3,30	6,29364	6,69006	7,28112	6,84782
3,31	6,36248	6,75334	7,34833	6,92095
3,32	6,43206	6,81732	7,41619	6,99478
3,33	6,50238	6,88199	7,48460	7,06928
3,34	6,57345	6,94737	7,55383	7,14448
3,35	6,64527	7,01346	7,62363	7,22036

kz	S(kz)	T(kz)	U(kz)	V(kz)
3,36	6,71786	7,08027	7,69410	7,29696
3,37	6,79121	7,14782	7,76524	7,37425
3,38	6,86534	7,21610	7,83706	7,45226
3,39	6,94026	7,28513	7,90957	7,53099
3,40	7,01597	7,35491	7,98277	7,61045
3,41	7,09247	7,42546	8,05666	7,69065
3,42	7,16978	7,49676	8,13028	7,77159
3,43	7,24790	7,56885	8,20661	7,85326
3,44	7,32685	7,64172	8,28266	7,93573
3,45	7,40662	7,71539	8,35945	8,01893
3,46	7,48723	7,78986	8,38697	8,10291
3,47	7,51858	7,86514	8,51535	8,18768
3,48	7,65099	7,94124	8,59427	8,27322
3,49	7,73415	8,01816	8,67407	8,35956
3,50	7,81818	8,09592	8,75464	8,44671
3,51	7,90309	8,17453	8,83599	8,53466
3,52	7,98888	8,25398	8,91813	8,62343
3,53	8,07556	8,33431	9,00107	8,71302
3,54	8,16315	8,41550	9,08482	8,80346
3,55	8,25164	8,49717	9,16938	8,89472
3,56	8,34104	8,58054	9,25478	8,98685
3,57	8,43137	8,61440	9,34100	9,07982
3,58	8,52264	8,74917	9,42807	9,17367
3,59	8,61485	8,83485	9,51599	9,26838
3,60	8,70801	8,92147	9,60477	9,36399
3,61	8,80213	9,00902	9,69442	9,46048
3,62	8,89772	9,09751	9,78495	9,55788
3,63	8,99330	9,18696	9,87637	9,65618
3,64	9,09035	9,27738	9,96870	9,75541
3,65	9,18845	9,36878	10,06193	9,85557
3,66	9,28747	9,46116	10,15608	9,95666
3,67	9,38754	9,55453	10,25115	10,05869
3,68	9,48864	9,64891	10,34717	10,16168
3,69	9,59077	9,74430	10,44414	10,26564
3,70	9,68159	9,84072	10,54206	10,37057
3,71	9,79819	9,93819	10,64095	10,47648
3,72	9,90349	10,03670	10,74082	10,58339
3,73	10,00986	10,13626	10,84169	10,69130
3,74	10,11732	10,23690	10,94355	10,80023
3,75	10,22587	10,33861	11,04643	10,91017
3,76	10,33552	10,44141	11,15033	11,02116
3,77	10,44630	10,54533	11,25526	11,13318
3,78	10,55819	10,65034	11,36124	11,24627
3,79	10,67123	10,75649	11,46878	11,36041
3,80	10,78540	10,87377	11,57638	11,47564
3,81	10,90074	10,97221	11,68555	11,59195

kz	*S(kz)*	*T(kz)*	*U(kz)*	*V(kz)*
3,82	11,01725	11,08180	11,79582	11,70935
3,83	11,13493	11,19255	11,90719	11,82786
3,84	11,25380	11,30449	12,01969	11,94750
3,85	11,37389	11,41763	12,13329	12,06826
3,86	11,49518	11,53198	12,24803	12,19017
3,87	11,61769	11,64754	12,36393	12,31322
3,88	11,74145	11,76434	12,48099	12,43745
3,89	11,86646	11,88238	12,59922	12,56285
3,90	11,99271	12,00166	12,71864	12,68944
3,91	12,12024	12,12224	12,83926	12,81723
3,92	12,24905	12,24407	12,96109	12,94623
3,93	12,37917	12,36722	13,08415	13,07645
3,94	12,51059	12,49167	13,20844	13,20797
3,95	12,64333	12,61744	13,33398	13,34063
3,96	12,77740	12,74453	13,46079	13,47460
3,97	12,91283	12,87299	13,58888	13,60966
3,98	13,04960	13,00280	13,71825	13,74637
3,99	13,18775	13,13398	13,84893	13,88421
4,00	13,32730	13,26656	13,98094	14,02366
4,01	13,46823	13,40053	14,11427	14,16384
4,02	13,61057	13,53593	14,24895	14,30565
4,03	13,75435	13,67275	14,38500	14,44882
4,04	13,89955	13,81102	14,52242	14,59335
4,05	14,04622	13,95074	14,66122	14,73228
4,06	14,19435	14,09195	14,80144	14,88658
4,07	14,34395	14,23464	14,94306	15,03530
4,08	14,49506	14,37883	15,08613	15,18545
4,09	14,64767	14,52455	15,23065	15,33703
4,10	14,80180	14,67179	15,37663	15,43007
4,11	14,95747	14,82058	15,57408	15,64456
4,12	15,11470	14,97095	15,67304	15,80055
4,13	15,27350	15,12288	15,82351	15,96304
4,14	15,43386	15,27641	15,97551	16,11703
4,15	15,59533	15,43157	16,12905	16,27755
4,16	15,75942	15,58835	16,28415	16,43962
4,17	15,92464	15,74676	16,44082	16,60324
4,18	16,09150	15,90648	16,59909	16,76844
4,19	16,26001	16,06860	16,75896	16,93522
4,20	16,43020	16,23204	16,92046	17,10363
4,21	16,60208	16,39721	17,08360	17,27121
4,22	16,77568	16,56409	17,24841	17,44530
4,23	16,95099	16,73272	17,41490	17,61862
4,24	17,12806	16,90312	17,58307	17,79360
4,25	17,30687	17,07529	17,75297	17,97028
4,26	17,48746	17,24926	17,92458	18,14867
4,27	17,66985	17,42505	18,09795	18,32878

kz	S(kz)	T(kz)	U(kz)	V(kz)
4,28	17,85405	17,60266	18,27309	18,51064
4,29	18,04008	17,78214	18,45002	18,69425
4,30	18,22794	17,96367	18,62874	18,87964
4,31	18,41767	18,14670	18,80929	19,06683
4,32	18,60928	18,33183	18,99168	19,25583
4,33	18,80280	18,51889	19,17594	19,44667
4,34	18,99823	18,70790	19,36207	19,63935
4,35	19,19558	18,89887	19,55010	19,83392
4,36	19,39491	19,09182	19,74005	20,03037
4,37	19,59620	19,28677	19,93194	20,22872
4,38	19,79949	19,48374	20,12579	20,42901
4,39	20,00479	19,68277	20,32162	20,63121
4,40	20,21212	19,88385	20,51945	20,83545
4,41	20,42150	20,08701	20,71931	21,04164
4,42	20,63296	20,29229	20,92120	21,24985
4,43	20,84651	20,49968	21,12516	21,46007
4,44	21,06217	20,70922	21,33120	21,67235
4,45	21,27996	20,92093	21,53935	21,88670
4,46	21,49991	21,13483	21,74963	22,10315
4,47	21,72204	21,35094	21,96236	22,32170
4,48	21,94635	21,56927	22,17665	22,54240
4,49	22,17288	21,78587	22,39345	22,76524
4,50	22,40166	22,01274	22,61246	22,99027
4,51	22,63270	22,23791	22,83371	23,21750
4,52	22,86602	22,46540	23,05722	23,44695
4,53	23,10165	22,69524	23,28303	23,67865
4,54	23,33965	22,92744	23,51114	23,91962
4,55	23,57990	23,16204	23,74159	24,14888
4,56	23,82259	23,39905	23,97439	24,38796
4,57	24,06766	23,63850	24,20957	24,62888
4,58	24,31766	23,88041	24,44916	24,87166
4,59	24,56510	24,12481	24,68719	25,11733
4,60	24,81752	24,37172	24,92967	25,36541
4,61	25,07242	24,62117	25,17463	25,61593
4,62	25,32984	24,87318	25,42210	25,86892
4,63	25,58980	25,12777	25,67210	26,12438
4,64	25,85233	25,38498	25,92467	26,38236
4,65	26,11746	25,64483	26,14981	26,64288
4,66	26,38520	25,90734	26,43757	26,90597
4,67	26,65559	26,17254	26,69797	27,17164
4,68	26,92865	26,44046	26,96103	27,43994
4,69	27,20440	26,71113	27,22678	27,71087
4,70	27,48287	26,98456	27,49526	27,98448
4,71	27,76410	27,26079	27,76799	28,26079
4,72	28,04810	27,53985	28,04045	28,53982

kz	$S(kz)$	$T(kz)$	$U(kz)$	$V(kz)$
4,73	28,33490	27,82177	28,31729	28,82160
4,74	28,62454	28,10655	28,59693	29,10618
4,75	28,91704	28,39327	28,87944	29,39356
4,76	29,21242	28,68490	29,16483	29,68378
4,77	29,51072	28,97852	29,45314	29,97686
4,78	29,81197	29,27513	29,74440	30,27285
4,79	30,11619	29,57477	30,03855	30,57176
4,80	30,42341	29,87746	30,33591	30,87363
4,81	30,73367	30,18325	30,73367	31,17849
4,82	31,04699	30,49215	30,93959	31,48637
4,83	31,36340	30,80420	31,24607	31,79729
4,84	31,68295	31,11943	31,55569	32,11130
4,85	32,00565	31,43787	31,86847	32,42842
4,86	32,33153	31,75955	32,18445	32,74868
4,87	32,66063	32,08450	32,53670	33,07212
4,88	32,99298	32,41277	32,82615	33,39876
4,89	33,32862	32,74438	33,15194	33,72865
4,90	33,66756	33,07936	33,48105	34,06181
4,91	34,00976	33,41774	33,81353	34,39828
4,92	34,35554	33,79570	34,14942	34,73810
4,93	34,70464	34,10486	34,48879	35,08128
4,94	35,05718	34,45367	34,83153	35,42788
4,95	35,41320	34,80602	35,17782	35,77792
4,96	35,77275	35,16195	35,52765	36,13145
4,97	36,13585	35,52149	35,88107	36,48849
4,98	36,50253	35,88467	36,23810	36,84908
4,99	36,87284	36,25155	36,59878	37,21326
5,0	37,24680	36,62214	36,96314	37,58106
5,1	41,19599	40,54105	40,81801	41,46686
5,2	45,55370	44,87495	45,08518	45,75840
5,3	50,36263	49,66682	49,80826	50,49909
5,4	55,67008	54,96409	55,03539	55,73685
5,5	61,52834	60,81919	60,81967	61,52473
4,6	67,99531	67,29004	66,21974	67,92131
5,7	75,13504	74,44067	74,30033	74,99136
5,8	83,01840	82,34183	82,13288	82,80633
5,9	91,72379	91,07172	90,79631	91,44562
6,0	101,33790	100,71687	100,37773	100,99629
6,1	111,95664	111,37280	110,97337	111,55491
6,2	123,68604	123,19521	122,68950	123,22830
2π	134,37338	133,87245	133,37338	133,87245
6,3	136,64336	136,15092	135,64350	136,13411
6,4	150,96826	150,46912	149,97508	150,35257
6,5	166,77508	166,39259	165,79749	166,17747
6,6	184,24925	183,92922	183,29902	183,61768
6,7	203,55895	203,30357	202,64457	202,89872
6,8	224,89590	224,70860	224,02740	224,21449
6,9	248,47679	248,35764	247,66106	247,77920

Suite

kz	$S(kz)$	$T(kz)$	$U(kz)$	$V(kz)$
7,0	274,53547	274,48655	273,78157	273,82956
7,1	303,33425	303,28381	302,64970	302,62707
7,2	335,16205	335,25434	334,55370	334,46067
7,3	370,33819	370,50003	369,81211	369,64954
7,4	409,21553	409,44531	408,77698	408,54660
7,5	452,18406	452,92446	451,73742	451,54146
7,6	499,67473	500,03281	499,42347	499,06489
7,7	552,16384	552,58097	552,01042	551,58780
7,8	610,17757	610,64966	610,12361	609,65112
$\frac{5}{2}\pi$	643,99272	644,49252	643,99272	643,49252
7,9	674,29767	674,81986	674,34367	673,82102
8,0	745,16683	745,73409	745,31233	744,74473
8,1	823,49532	823,95189	823,73886	823,28200
8,2	910,06807	910,70787	910,40722	909,76714
8,3	1005,75247	1006,41912	1006,18385	1005,51695
8,4	1111,50710	1112,18393	1112,02639	1111,33933
8,5	1228,39125	1229,09140	1228,99326	1228,29291
8,6	1357,57558	1358,28205	1358,25430	1357,54765
8,7	1500,35377	1501,05950	1501,10242	1500,39658
8,8	1658,15549	1658,85342	1658,96658	1658,26850
8,9	1832,56070	1833,42607	1833,42614	1832,74284
9,0	2025,31545	2025,97701	2026,22658	2025,56489
9,1	2238,34934	2238,98270	2239,29706	2238,66360
9,2	2473,79487	2474,39373	2474,76971	2474,17079
9,3	2734,00871	2734,56071	2735,00094	2734,44255
9,4	3021,59536	3022,10755	3022,59505	3022,08297
3π	3097,41192	3097,91193	3098,41197	3097,91193
9,5	3339,43314	3339,89411	3340,43031	3339,96926
9,6	3690,70306	3691,11321	3691,68775	3691,27754
9,7	4078,92063	4079,26590	4079,88299	4079,53766
9,8	4508,47103	4508,25298	4508,90146	4508,61946
9,9	4982,14802	4982,35202	4983,03721	4982,32136
10,0	5596,19606	5506,34442	5507,03599	5506,88844

Fonctions de Krylov pour les calculs des poutres de section constante sur fondation élastique

ζ	J_1	J_2	J_3	J_4
0	1	0	0	0
0,010	1,0000	0,01000	0,00005	0,00000
0,020	1,0000	0,02000	0,00020	0,00000
0,05	1,0000	0,0500	0,0013	0,00002
0,10	1,0000	0,1000	0,0050	0,0002
0,20	0,9997	0,2000	0,0200	0,0014
0,30	0,9987	0,2999	0,0450	0,0045
0,40	0,9957	0,3997	0,0800	0,0107
0,50	0,9895	0,4990	0,1249	0,0208
0,60	0,9784	0,5974	0,1798	0,0360
0,70	0,9600	0,6944	0,2444	0,0571
0,80	0,9318	0,7891	0,3186	0,0852
0,90	0,8931	0,8804	0,4021	0,1211
1,00	0,8337	0,9668	0,4945	0,1659
1,10	0,7568	1,0465	0,5952	0,2203
1,20	0,6561	1,1173	0,7035	0,2852
1,30	0,5272	1,1767	0,8183	0,3612
1,40	0,3656	1,2217	0,9383	0,4490
1,50	0,1664	1,2486	1,0620	0,5490
$\pi/2$	0,0000	1,2546	1,1507	0,6273
1,60	−0,0753	1,2535	1,1873	0,6615
1,70	−0,3644	1,2322	1,3118	0,7863
1,80	−0,7060	1,1789	1,4326	0,9237
1,90	−1,1049	1,0888	1,5464	1,0727
2,00	−1,5656	0,9558	1,6490	1,2325
2,10	−2,0923	0,7735	1,7359	1,4020
2,20	−2,6882	0,5351	1,8018	1,5791
2,30	−3,3562	0,2335	1,8408	1,7614
2,40	−4,0976	−0,1386	1,8461	1,9461
2,50	−4,9128	−0,5885	1,8105	2,1293
2,60	−5,8003	−1,1236	1,7256	2,3065
2,70	−6,7565	−1,7509	1,5827	2,4725
2,80	−7,7759	−2,4770	1,3721	2,6208
2,90	−8,8471	−3,3079	1,0838	2,7443
3,00	−9,9669	−4,2485	0,7069	2,8346
3,10	−11,1119	−5,3023	0,2303	2,8823
3,20	−12,2656	−6,4711	−0,3574	2,8769
3,30	−13,4048	−7,7549	−1,0678	2,8068
3,40	−14,5008	−9,1507	−1,9121	2,6589
3,50	−15,5198	−10,6525	−2,9014	2,4195
3,60	−16,4218	−12,2508	−4,0459	2,0735
3,70	−17,1622	−13,9315	−5,3544	1,6049
3,80	−17,6875	−15,6761	−6,8343	0,9969
3,90	−17,9387	−17,4599	−8,4909	0,2321
4,00	−17,8498	−19,2524	−10,3265	−0,7073
4,10	−17,3472	−21,0160	−12,3404	−1,8392

Suite

ξ	J_1	J_2	J_3	J_4
4,20	−16,3505	−22,0755	−14,5274	−3,1812
4,30	−14,7722	−24,2669	−16,8773	−4,7501
4,40	−12,5180	−25,6373	−19,3743	−6,5615
4,50	−9,4890	−26,7447	−21,9959	−8,6290
4,60	−5,5791	−27,5057	−24,7117	−10,9638
4,70	−0,6812	−27,8274	−27,4823	−13,5732
4,80	5,3164	−27,6052	−30,2589	−16,4604
4,90	12,5239	−26,7239	−32,9814	−19,6232
5,00	21,0504	−25,0565	−35,5775	−23,0525
5,10	30,9997	−22,4661	−37,9619	−26,7317
5,20	42,4661	−18,8057	−40,0350	−30,6346
5,30	55,5317	−13,9201	−41,6826	−34,7246
5,40	70,2637	−7,6440	−42,7727	−38,9524
5,50	86,7044	−0,1901	−43,1593	−43,2557
5,60	104,8687	9,7544	−42,6775	−47,5558
5,70	124,7352	21,2199	−41,1454	−51,7563
5,80	146,2448	34,7564	−38,3640	−55,7429
5,90	169,2837	50,5203	−34,1198	−59,0363
6,00	196,1881	70,6079	−27,4846	−62,7889
6,10	221,8019	91,4992	−19,4005	−65,1503
6,20	245,5231	112,5249	−10,2356	−66,4981
2π	267,7468	133,8725	0	−66,9362
6,30	272,2487	138,4120	2,2886	−66,9175
6,50	324,7861	198,1637	35,7713	−63,3105
7,00	413,3762	386,8072	180,1191	−13,2842
7,50	313,3700	580,6710	423,9858	133,6506
$5\pi/2$	0	643,9927	643,9926	321,9964
8,00	−216,8647	628,8779	737,3101	422,8713
8,50	−1479,3701	241,4136	981,0984	860,3917
9,00	−3691,4815	−1010,8800	834,8607	1340,3007
3π	−6195,8239	−3097,9120	0	1548,9560
9,50	−6660,9594	−3581,4756	−250,9959	1539,7410
10,0	−9240,8733	−7616,1462	−2995,7095	812,3636

Liste des tableaux

Index

À NOS LECTEURS

Les Editions Mir vous seraient très reconnaissantes de bien vouloir leur communiquer votre opinion sur ce livre, sa traduction et sa présentation, ainsi que toute autre suggestion.

Notre adresse:

Editions Mir,

2, Pervi Rijski péréoulok,
Moscou, I-110, GSP, U.R.S.S.

Printed in Romania

A paraître

RÉSISTANCE DES MÉTAUX ET DES ALLIAGES À LA DÉFORMATION PLASTIQUE

PAR P. Poloukhine and all.

Dans cet ouvrage sont rassemblées les données systématisées sur la résistance à la déformation et sur les caractéristiques de plasticité et de résistance des aciers. des métaux non ferreux et des alliages dans les conditions propres aux différents procédés de travail des métaux par déformation.
Le livre est destiné aux étudiants et aux boursiers de thèse des Ecoles techniques supérieures. Il peut également être utile aux scientifiques et aux ingénieurs travaillant dans le domaine du travail des métaux par déformation.